Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2007/08 21/JAN/2008, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3\,|x-1| < |2x-5|\}\ .$$

2. (1,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k!) = n! - 1\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \frac{\log\left(3+\cosh(x/2)\right)}{\sqrt{x}}\,; \qquad b)\ \int_{-x}^{x^2} e^{x+t}(1-t)\ dt\,.$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^+} (1-x)^{\frac{1}{\operatorname{arcsen}(x)}}\ .$$

5. (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}}\,, & \text{se } x < -1; \\ \log(x+2)\,, & \text{se } x \geq -1. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que f não é diferenciável no ponto -1.

(c) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f

(d) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = 1$ e $g'(0) = 3$. Calcule o valor de $(f \circ g)'(0)$.

6. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}$

(b) $\dfrac{x^2-3}{(x-3)(x^2-5x+6)}$

(c) $\dfrac{\arctan(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x(4-x)}}$ (considere a mudança de variável $x = t^2$)

7. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \cos(x)\,, \quad y = -\frac{\pi}{2} - x \quad \text{e} \quad x = \pi\,.$$

8. (1,0 val.) Determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$$

9. (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, estritamente crescente, tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta.$$

Mostre que o contradomínio de f é o intervalo $]\alpha, \beta[$.

10. (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Mostre que se f é ímpar então F é par.