Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2007/08 21/JAN/2008, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x-5| < 2\,|x-1|\} \; .$$

2. (1,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1 \, , \; \forall\, n \in \mathbb{N} \, .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a) \; \frac{\log\left(2+\operatorname{senh}(x/3)\right)}{\sqrt{x}} \; ; \qquad b) \; \int_{-x^2}^{x} e^{x-t}(1+t)\, dt \, .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{arcsen}(-x)}} \; .$$

5. (2,0 val.) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} \, , & \text{se } x < 2; \\ \log(x-1) \, , & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que f não é diferenciável no ponto 2.

(c) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f

(d) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0)=3$ e $g'(0)=-2$. Calcule o valor de $(f\circ g)'(0)$.

6. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$

(b) $\dfrac{x^2-8}{(x-2)(x^2-5x+6)}$

(c) $\dfrac{\arctan(\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x(9-x)}}$ (considere a mudança de variável $x = t^2$)

7. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \cos(x)\,, \quad y = -\frac{\pi}{2} + x \quad \text{e} \quad x = -\pi\,.$$

8. (1,0 val.) Determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

9. (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, estritamente crescente, tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta.$$

Mostre que o contradomínio de f é o intervalo $]\alpha, \beta[$.

10. (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Mostre que se f é ímpar então F é par.