Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2007/08 07/JAN/2008, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o domínio D da função definida pela expressão

$$f(x) = \arccos\left(x^2 + x - 5\right) .$$

2. (1,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que a derivada de ordem n da função $\log\left(\frac{1-x}{3}\right)$ é dada por

$$\frac{d^n}{dx^n} \log\left(\frac{1-x}{3}\right) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\,, \ \forall\, x < 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \frac{\arctan(1-e^x)}{1+x}\,; \qquad b)\ \int_{-x^3}^{x^2} \cosh(t^2)\, dt\,.$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\log x}} .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = -x\,, \quad y = x^3 \quad \text{e} \quad y = 1\,.$$

6. (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $x = 0$ e tal que

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2x^2}}\,, \ \forall\, x \neq 0 .$$

(a) Mostre que $f(0) = 0$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(c) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 0$.

(d) Justifique se $x = 0$ é ou não um extremo local de $f(x)$.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(b) $\dfrac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}$

(c) $(1-x)\operatorname{senh}(1+x)$

(d) $\dfrac{-2\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ (considere a mudança de variável $t = \cos^2 x$)

8. (1,0 val.)

(a) Mostre que a seguinte série é convergente e calcule a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \, .$$

(b) Determine se a seguinte série é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \, .$$

9. (0,5 val.) Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ um número irracional. Mostre que existe uma sucessão (x_n) de termos em $\mathbb{Q}$ convergente para a.
(Sugestão: Considere o conjunto A formado por todos os número racionais menores do que a.)

10. (0,5 val.) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existem funções diferenciáveis, crescentes, $F_+, F_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x) = F'_+(x) - F'_-(x), \, , \ \forall \, x \in [a,b] \, .$$