Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

$1^{\underline{o}}$ SEM. 2006/07 22/JAN/2007, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o domínio D da função definida pela expressão

$$f(x) = \log\left(|x^2 - x - 1| - 1\right) .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que a derivada de ordem n da função $1/(x+1)$ é dada por

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+1)^{n+1}}\,,\ \forall\, x \in \left]-1, +\infty\right[\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \frac{1 - e^{x^2}}{1 + e^{\sqrt{x}}}\,; \qquad b)\ \int_0^{1/x} x\,\mathrm{sen}(t^2)\ dt\,.$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^+} [\mathrm{sen}(x/2)]^{1/\log x} \ .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = x(x-1)\,.$$

6. (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \arctan(2x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Mostre que f tem um mínimo absoluto em $x = 0$.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\cosh^2(x)\,\mathrm{senh}(x)$

(b) $\dfrac{3x^2+x+3}{(x^2+4)(x+1)}$

(c) $e^x \cos x$

(d) $\dfrac{1}{x\sqrt{4+x^2}}$ (considere a mudança de variável $t^2 = 4 + x^2$)

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

9. (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e majorada. Prove que existe e é finito o limite de f quando $x \to +\infty$.

10. (0,5 val.) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ o seu integral indefinido, i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt\,,\ \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x-y|\,,\ \forall\, x, y \in [a,b]\,.$$