

2º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2006/07 22/JAN/2007, 9.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o domínio D da função definida pela expressão

$$f(x) = \log(|x^2 + x - 1| - 1) .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que a derivada de ordem n da função $1/(x-1)$ é dada por

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}, \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad n \in \mathbb{N} .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a) \frac{1 - e^{\sqrt{x}}}{1 + e^{x^2}}; \quad b) \int_0^{1/x} x \cos(t^2) dt .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\operatorname{sen}(2x)]^{1/\log x} .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x(x-2) .$$

6. (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \arctan(x/2), \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

- (a) Mostre que f tem um mínimo absoluto em $x = 0$.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f .
(c) Determine as assíntotas ao gráfico de f .
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\sinh^2(x) \cosh(x)$

(b) $\frac{x^2 + 3x - 3}{(x^2 + 4)(x + 1)}$

(c) $e^x \sen x$

(d) $\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$ (considere a mudança de variável $t^2 = 4 - x^2$)

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

9. (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e majorada. Prove que existe e é finito o limite de f quando $x \rightarrow +\infty$.

10. (0,5 val.) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o seu integral indefinido, i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$