Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2006/07 08/JAN/2007, 9.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o domínio D da função definida pela expressão

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\left(2x^2 + 3x - 1\right) .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \,, \ \forall n \in \mathbb{N} .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \log\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+x^2}\right) ; \qquad b)\ \int_{1/x}^{-x} e^{t^2}\, dt .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^+} [\arctan(x)]^{\frac{2}{\log x}} .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = 1 - x^2 , \quad y = x^2 - 2 \quad \text{e} \quad |x| = 1 .$$

6. (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em π e tal que

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{x-\pi} \,, \ \forall x \neq \pi .$$

(a) Mostre que $f(\pi) = 0$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq \pi$.

(c) Mostre que f é diferenciável em π com $f'(\pi) = 1/2$.

(d) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $x \operatorname{senh}(x^2)$

(b) $\dfrac{x^2+5x+4}{((x+1)^2+1)(x+2)}$

(c) $(1+x)\log(1+x)$

(d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}$ (considere a mudança de variável $t=\cos x$)

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

9. (0,5 val.) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e majorado, com supremo $s \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão (x_n) de termos em A convergente para s, i.e.

$$x_n \in A\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x_n \to s\,.$$

10. (0,5 val.) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ o seu integral indefinido, i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,\ \forall x \in [a,b]\,.$$

Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então existe $c \in \,]a,b[$ tal que $F'(c) = 0$.