

1º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I  
(LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE)

1º SEM. 2006/07      08/JAN/2007, 9.00 - V. 1      DURAÇÃO: 2H

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o domínio  $D$  da função definida pela expressão

$$f(x) = \arcsen(2x^2 - 3x - 1) .$$

2. (1,0 val.) Use indução para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

3. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a) \log \left( \frac{1 - x^2}{1 + \sqrt{x}} \right) ; \quad b) \int_{-x}^{1/x} e^{t^2} dt .$$

4. (0,5 val.) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\arctan(x)]^{\frac{1}{2 \log x}} .$$

5. (0,5 val.) Determine a área da região plana  $D \subset \mathbb{R}^2$  limitada pelas curvas

$$y = 2 - x^2, \quad y = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad |x| = 1 .$$

6. (2,0 val.) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua em  $\pi/2$  e tal que

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x - \pi/2}, \quad \forall x \neq \pi/2 .$$

- (a) Mostre que  $f(\pi/2) = 0$ .  
(b) Calcule  $f'(x)$  para  $x \neq \pi/2$ .  
(c) Mostre que  $f$  é diferenciável em  $\pi/2$  com  $f'(\pi/2) = 1/2$ .  
(d) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

7. (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a)  $x \cosh(x^2)$

(b)  $\frac{3x^2 + 7x + 4}{((x + 1)^2 + 1)(x + 2)}$

(c)  $(1 + x) \log(1 + x)$

(d)  $\frac{1}{\cos x(1 + \sin x)}$  (considere a mudança de variável  $t = \sin x$ )

8. (1,0 val.) Determine o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a série de potências

$$\sum \frac{(x + 3)^n}{(n + 1)2^n}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

9. (0,5 val.) Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto não-vazio e majorado, com supremo  $s \in \mathbb{R}$ . Mostre que existe uma sucessão  $(x_n)$  de termos em  $A$  convergente para  $s$ , i.e.

$$x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x_n \rightarrow s.$$

10. (0,5 val.) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o seu integral indefinido, i.e.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Mostre que se  $\int_a^b f = 0$  então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $F'(c) = 0$ .