
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1}{e^{-x} - 1} \right| > \frac{1}{3} \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq \frac{1}{4} \right\}, \quad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A , B e C , mostrando em particular que

$$A =]-\log 4, 0[\cup]0, +\infty[\quad \text{e} \quad C \subset \left[-\frac{1}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{1}{2} \right].$$

b) Determine, se existirem em \mathbb{R} , o $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\sup B$ e $\min C$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (i) Qualquer sucessão estritamente crescente de termos em A tem limite positivo.
- (ii) Qualquer sucessão (a_n) de termos em A , que verifica $a_n a_{n+1} < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, é divergente.
- (iii) Toda a função definida e contínua em C tem mínimo.

(4,0) **II.** Considere uma sucessão (a_n) dada por

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}, \\ b_{n+1} = \frac{b_n + b_n^{5/2}}{2}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $b_n \in [0, 1]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (b_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (b_n) é uma sucessão convergente e calcule o valor de $\lim b_n$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\text{a) } \lim \sqrt[n]{n^n + n} \quad \text{b) } \lim \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) \right)^n \quad \text{c) } \lim (-1)^{3n} \frac{1 + n^3}{3n^2 - 1}$$

(5) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq 0, \\ x^2 e^x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule ou mostre que não existe, cada um dos limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

b) Calcule $f'(x)$ em cada um dos pontos em que f for diferenciável. Em particular estude cuidadosamente se a derivada $f'(0)$ existe e é finita.

c) Determine e classifique todos os pontos de extremo local ou absoluto da restrição de f ao intervalo $] -\infty, 0]$.

d) Justifique que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe ponto de extremo local de f no intervalo $]n\pi, (n+1)\pi[$.

(2) **V.** Seja $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = x\}$ é ilimitado. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ existe então $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 1$.