

Versão E

1. Diga sobre a convergência das sucessões

$$\frac{n^3 + (n-2)!}{n^2 + (n-3)!} \quad \text{e} \quad \frac{2^n}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

Caso exista, indique o respetivo limite.

2. Considere a sucessão definida por recorrência

$$x_1 = 1/2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n^2(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 2.1. Por meio de Indução, demonstre $0 < x_n < 1$.

- 2.2. Verifique que a sucessão é decrescente.

- 2.3. Justifique a convergência e determine $\lim x_n$.

Versão D

1. Diga sobre a convergência das sucessões

$$\frac{1}{4^n} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{2n} \quad \text{e} \quad \frac{(2 + (-2)^n)^n}{2^{n+1} - 2^{n-1}}.$$

Caso exista, indique o respetivo limite.

2. Considere a sucessão definida por recorrência

$$x_1 = 1/3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_n(1 - x_n)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 2.1. Por meio de Indução, demonstre $0 < x_n < 1$.

- 2.2. Verifique que a sucessão é decrescente.

- 2.3. Justifique a convergência e determine $\lim x_n$.

Obs.: Deve apresentar breves justificações para quaisquer das respostas.

VERSÃO E

1. **1.0 + 1.0 val** Dados naturais j e k , verifica-se

$$\frac{n^j}{(n-k)!} = \frac{n^j}{(n-k) \cdot \dots \cdot (n-k-j+1)} \frac{1}{(n-k-j)!} \rightarrow 1 \times 0 = 0.$$

Então

$$\lim \frac{n^3 + (n-2)!}{n^2 + (n-3)!} = \frac{n^3/(n-3)! + (n-2)}{n^2/(n-3)! + 1} = \frac{0 + \infty}{0 + 1} = +\infty.$$

Se $b_n := 2^n/(3 + (-1)^n)^n$, deduz-se $b_{2n} = 1/4^n \rightarrow 0$ e $b_{2n-1} = 1$. Logo b_n diverge.

2.

- 2.1. **1.0 val** Se $P(n)$ designa a proposição $0 < x_n < 1$, então $P(1)$. Se $P(n)$ então $0 < x_n^2 < 1$ e $0 < 1 - x_n < 1$. Logo $0 < x_{n+1} < 1$.

- 2.2. **0.5 val** Como $0 < (1 - x_n) < 1$ e $x_n^2 < x_n$, então $x_{n+1} < x_n$.

- 2.3. **0.5 val** A sucessão é monótona e limitada. Logo converge. Se $x := \lim x_n$, da relação de recorrência, deduz-se $x = x^2(1 - x)$. Resolvendo, obtém-se $x = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$ i.e. $x = 0$.

VERSÃO D

1. **1.0 + 1.0 val** Sabe-se

$$a_n := \frac{1}{4^n} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{2n} = \frac{2^{2n}}{4^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} \right)^{2n} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} \right)^{2n}.$$

Resulta que $\lim a_{2n} = e$ e $\lim a_{2n-1} = 1/e$. Então a_n diverge. De

$$b_n := \frac{(2 + (-2)^n)^n}{2^{n+1} - 2^{n-1}} = \frac{(1 + (-2)^n/2)^n}{2 - 1/2},$$

infere-se $\lim b_{2n} = +\infty$ e $\lim b_{2n-1} = -\infty$. Logo b_n diverge.

2.

- 2.1. 1.0 val Se $P(n)$ designa a proposição $0 < x_n < 1$, $P(1)$ é evidente. Se $P(n)$, então $0 < x_n < 1$ e $0 < (1 - x_n)^2 < 1$. Logo $0 < x_{n+1} < 1$.
- 2.2. 0.5 val Como $0 < (1 - x_n)^2 < 1$, então $x_{n+1} < x_n$.
- 2.3. 0.5 val A sucessão é monótona e limitada. Logo converge. Se $x := \lim x_n$, da relação de recorrência, deduz-se $x = x(1 - x)^2$. Resolvendo, obtém-se $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$. Dada a monotonia conclui-se $x = 0$.

Diagrama Auxiliar à Atribuição de Classificações

A	4.0 – 3.5
B	2.5 – 3.0
C	1.0 – 2.0
D	0.0 – 0.5

Após o termino de determinada aula seguinte à afixação publica de classificações, pode consultar e apoderar-se da sua respetiva resolução.

A afixação de correção, cotação e diagrama auxiliar à atribuição de classificações ocorre excepcionalmente a propósito do primeiro mini-teste.