

Versão E

1. Considere a sucessão definida por recorrência

$$x_1 := 7, \quad x_{n+1} := 5x_n - 2^n 3.$$

- 1.1. Por meio do Princípio de *indução matemática*, demonstre $x_n = 2^n + 5^n$.

- 1.2. Indique os conjuntos dos majorantes ou dos minorantes, de $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, onde $y_n := x_n/4^n$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := x_n / (1 + |x_n - 1|), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

- 2.1. Se $a < 0$, diga da monotonia da sucessão (1).

- 2.2. Se $a \geq 1$, demonstre por meio de *indução matemática*, que a sucessão é constante se $n \geq 2$.

- 2.3. Se $a \geq 1$ e $a < 1$, justifique que $\lim x_n = 1$ e $\lim x_n = 0$, respectivamente.

Versão D

1. Considere a sucessão definida por recorrência

$$x_1 := 7, \quad x_{n+1} := (n+1)x_n + (n+2)!2.$$

- 1.1. Por meio do Princípio de *indução matemática*, demonstre $x_n = n! + (n+2)!$.

- 1.2. Indique os conjuntos dos majorantes ou dos minorantes de $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, onde $y_n := x_n/(n+1)!$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := x_n + |x_n - 1|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

- 2.1. Diga sobre a monotonia da sucessão em (2).

- 2.2. Se $a \leq 1$, demonstre por meio de *indução matemática*, que a sucessão é constante se $n \geq 2$.

- 2.3. Se $a \leq 1$ e $a > 1$, justifique que $\lim x_n = 1$ e $\lim x_n = +\infty$, respectivamente.

Obs.: Deve apresentar breves justificações para quaisquer das respostas.

VERSÃO E

- 1.

- 1.1. **1.0 val** Considere $P(n)$ a proposição $x_n = 2^n + 5^n$. Compute $2^1 + 5^1 = 7 = x_1$. Deduz-se $P(1)$. Suponha $P(n)$. Então $x_{n+1} := 5(2^n + 5^n) - 2^n 3 = 5^{n+1} + 2^n 5 - 2^n 3 = 5^{n+1} + 2^{n+1}$.

- 1.2. **1.0 val** Calcule $y_n = (2^n + 5^n)/4^n = (1/2)^n + (5/4)^n$. Logo $\lim y_n = +\infty$ e o conjunto dos majorantes é $\emptyset$.

- 2.

- 2.1. **0.5 val** Se $a < 0$, então $P(n)$ para qualquer natural n , onde $P(n)$ designa a proposição $x_n < 0$. A frase anterior verifica-se facilmente por meio de *indução matemática*. Isso porque o sinal do produto dos membros na igualdade no lado direito de (1), coincide com o sinal de $x_n x_{n+1}$. Assim, é evidente que $x_{n+1} > x_n$. De facto, o seguinte diagrama pode ser esclarecedor

$$(1 + |x_n - 1|) \geq 1 \Rightarrow 1/(1 + |x_n - 1|) \leq 1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n / (1 + |x_n - 1|) \geq x_n.$$

- 2.2. **1.0 val** Se $a \geq 1$, então $x_2 = a/(1 + |a - 1|) = 1$. Seja $Q(n)$ a proposição $x_n = 1$, $n = 2, \dots$. Verifica-se $Q(2)$ e se $x_n = 1$ então $x_{n+1} = 1/(1 + |1 - 1|) = 1$. Resulta $x_n = 1$, para $n = 2, \dots$.

- 2.3. **0.5 val** Se $a \geq 1$ então $x_n = 1$, $n = 2, \dots$. Logo $\lim x_n = 1$. Se $a < 0$, então x_n é crescente e majorada. Necessariamente x_n converge em $\mathbb{R}$. Se $x := \lim x_n$, então de (1) resulta $x = x/(1 + |x - 1|)$, donde se conclui $x = 0$ ou $x = 1$. Como os termos da sucessão x_n são negativos então x é não positivo. Conclui-se $x = 0$.

VERSÃO D

1.

1.1. 1.0 val Dado um natural n , por *hipótese de indução* sabe-se $x_n = n! + (n + 2)!$. Então

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (n + 1)(n! + (n + 2)!) + (n + 2)!2 = (n + 1)! + (n + 2)!(n + 1) + (n + 2)!2 \\&= (n + 1)! + (n + 3)(n + 2)! = (n + 1)! + (n + 3)!\end{aligned}$$

1.2. 1.0 val De simples manipulações algébricas resulta que $y_n = 1/(n + 1) + (n + 2) \rightarrow +\infty$. Logo a sucessão y_n não é majorada e o conjunto dos majorantes é $\emptyset$.

2.

2.1. 0.5 val É evidente que $x_{n+1} \geq x_n$, i.e. a sucessão é monótona crescente.

2.2. 1.0 val Se $a \leq 1$, então $x_2 = a + |a - 1| = 1$. Seja $Q(n)$ a proposição $x_n = 1$, para $n \geq 2$. Verifica-se $Q(2)$ e se $x_n = 1$ então $x_{n+1} = 1 + |1 - 1| = 1$. Resulta que $x_n = 1$, para $n \geq 2$.

2.3. 0.5 val Se $a > 1$ então a sucessão é crescente. Necessariamente converge para um certo $x \in \mathbb{R}$ ou para $+\infty$. Se $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$, então de (2) deduz-se $x = x + |x - 1|$. Dado $x = \lim x_n \geq x_1 = a > 1$, conclui-se $\lim x_n = +\infty$.

Diagrama Auxiliar à Atribuição de Classificações

A	4.0 – 3.5
B	2.5 – 3.0
C	1.0 – 2.0
D	0.0 – 0.5

Após o termino de determinada aula seguinte à afixação publica de classificações, pode consultar e apoderar-se da sua respetiva resolução.

A afixação de correção, cotação e diagrama auxiliar à atribuição de classificações ocorre excepcionalmente a propósito do primeiro mini-teste.