Os apontamentos *Luís V. Pessoa, Problemas Propostos - Análise Complexa e Equações Diferenciais, DMIST, 2011* serviram de apoio pedagógico, aos alunos inscritos em algum dos cursos de *Análise Complexa e Equações Diferenciais (ACED),* por o autor professados no *Instituto Superior Técnico.* O autor considera natural a ocorrência de imprecisões, as quais o leitor poderá indicar por meio de comunicações endereçadas a lpessoa@math.tecnico.ulisboa.pt.

Problemas Propostos

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Departamento de Matemática - Instituto Superior Técnico

Luís V. Pessoa

30 de Junho de 2011

Conteúdo

1 Análise Complexa **2**

1.1 Estrutura Algébrica e Métrica do Corpo Complexo 2
1.2 Retas, Círculos e Transformações Lineares-Fracionárias 7
1.3 Séries Numéricas 12
1.4 Séries de Potências 17
1.5 Funções Elementares 20
1.6 $\mathbb{C}$-Diferenciabilidade 23
1.7 Integrais de Linha e Teorema Fundamental 27
1.8 Fórmulas Integrais de Cauchy e Série de Taylor 30
1.9 Funções Harmónicas e Harmónicas Conjugadas 36
1.10 Série de Laurent e o Teorema dos Resíduos 39
1.11 Integrais Impróprios e Integrais de Funções nas Variáveis Trigonométricas 47
1.12 A Transformada de Laplace. 49

2 Equações diferenciais ordinárias **52**

2.1 Equações escalares lineares, separáveis e exatas 52
2.2 Teorema de Picard-Lindelöf 57
2.3 Sistemas de equações diferenciais lineares 59
2.4 Equações diferenciais lineares de ordem superior 62

3 Equações diferenciais parciais **70**

3.1 Separação de variáveis e séries de Fourier 70
3.2 Convergência de séries de Fourier e equações diferenciais parciais 74

1 Análise Complexa

1.1 Estrutura Algébrica e Métrica do Corpo Complexo

1. Considere as variáveis complexas z, w e ξ. Demonstre as seguintes igualdades

i) $\mathrm{Re}\,(xz) = x\mathrm{Re}\,z \quad (x \in \mathbb{R})$;

ii) $\mathrm{Im}\,(xz) = x\mathrm{Im}\,z \quad (x \in \mathbb{R})$;

iii) $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,(iz)$;

iv) $\mathrm{Im}\,z = -\mathrm{Re}\,(iz)$;

v) $2z\mathrm{Re}\,z = |z|^2 + z^2$;

vi) $i\,2z\mathrm{Im}\,z = z^2 - |z|^2$;

vii) $\mathrm{Re}\,\dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1-|z|^2}{|z-1|^2}$;

viii) $\mathrm{Im}\,\dfrac{1+z}{1-z} = 2\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{|z-1|^2}$;

ix) $\mathrm{Im}\,\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}\,z \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$;

x) $\mathrm{Im}\,\dfrac{z+1}{\overline{z}-1} = 2\dfrac{\mathrm{Re}\,z\mathrm{Im}\,z}{|z-1|^2}$;

xi) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w})$;

xii) $2\mathrm{Im}\,z\mathrm{Im}\,w = \mathrm{Re}\,(z\overline{w}) - \mathrm{Re}\,(zw)$;

xiii) $2\mathrm{Re}\,z\mathrm{Re}\,w = \mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + \mathrm{Re}\,(zw)$;

xiv) $2\mathrm{Re}\,z\mathrm{Im}\,w = \mathrm{Im}\,(zw) + \mathrm{Im}\,(\overline{z}w)$;

xv) $\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}\,(\overline{z}w)$;

xvi) $\langle iz, w\rangle = \mathrm{Im}\,(\overline{z}w)$;

xvii) $\langle \xi z, w\rangle = \mathrm{Re}\,(\xi)\mathrm{Re}\,(\overline{z}w) + \mathrm{Im}\,(\xi)\mathrm{Im}\,(\overline{z}w)$.

Resolução: *vii), viii)* Sem dificuldades obtém-se

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2+z-\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + 2i\frac{z-\overline{z}}{2i}\frac{1}{|1-z|^2}\,.$$

Porque $1-|z|^2$, $|1-z|^2$ e $(z-\overline{z})/(2i)$ são números reais, então infere-se o seguinte

$$\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\,\frac{1+z}{1-z} = 2\frac{\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}\,, \quad z \neq 1.$$

■

2. Considere números naturais n e verifique a seguinte igualdade

$$i^n = (-1)^{\frac{n}{2}}\left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] + i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{1-(-1)^n}{2}\right].$$

3. Considere as variáveis complexas z e w. Estabeleça uma demonstração das seguintes desigualdades

i) $||z|-|w|| \leq |z-w|$;

ii) $|\mathrm{Re}\,z| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$;

iii) $|z-w|^2 \leq \big(1+|z|^2\big)\big(1+|w|^2\big)$;

iv) $2|\mathrm{Im}\,z| \leq |1-z^2|$;

v) $2|\mathrm{Re}\,z| \leq |1+z^2|$;

vi) $2|z| \leq |1+z^2| + |1-z^2|$.

Resolução: $iv), v), vi)$ Do problema 1 viii) obtém-se

$$2|\mathrm{Im}\, z| = |1-z|^2 \left|\mathrm{Im}\, \frac{1+z}{1-z}\right| \leq |1-z|^2 \left|\frac{1+z}{1-z}\right| = |1-z^2|\,.$$

Da alínea iv), deduz-se de imediato que

$$2|\mathrm{Re}\, z| = 2|\mathrm{Im}\, iz| \leq |1-(iz)^2| = |1+z^2|\,.$$

Das alíneas iv) e v), infere-se

$$2|z| \leq 2|\mathrm{Re}\, z| + 2|\mathrm{Im}\, z| \leq |1-z^2| + |1+z^2|\,.$$

■

4. Considere a variável complexa z, tanto as variáveis reais θ e φ. Verifique as seguintes igualdades

i) $[\,\mathrm{E}(-i\theta)\, -\, \mathrm{E}(i\theta)\,]^2 = -|1-\, \mathrm{E}(i2\theta)\,|^2$; ii) $[\,\mathrm{E}(-i\theta)\, +\, \mathrm{E}(i\theta)\,]^2 = |1+\, \mathrm{E}(i2\theta)\,|^2$;

iii) $1+\, \mathrm{E}(i2\theta)\, = 2\cos(\theta)\,\mathrm{E}(i\theta)$; iv) $|1-\, \mathrm{E}(i2\theta)\,|^2 = 4\sin^2(\theta)$;

v) $\mathrm{E}(i\theta)\, +\, \mathrm{E}(i\varphi)\, = 2\cos(\frac{\varphi-\theta}{2})\,\mathrm{E}(i\frac{\theta+\varphi}{2})$; vi) $|z-\, \mathrm{E}(i\theta)\,| = |1-\overline{z}\,\mathrm{E}(i\theta)\,|$.

Resolução: $v), vi)$ Tendo em consideração as fórmulas de *Euler*, sem dificuldades deduz-se o seguinte

$$2\cos(\frac{\varphi-\theta}{2})\,\mathrm{E}(i\frac{\theta+\varphi}{2})\; = \left[\mathrm{E}(i\frac{\varphi-\theta}{2})\; +\; \mathrm{E}(i\frac{\theta-\varphi}{2})\right]\; \mathrm{E}(i\frac{\theta+\varphi}{2})\; =\; \mathrm{E}(i\varphi)\; +\; \mathrm{E}(i\theta)\;.$$

Em consequência, segue que

$$|z-\, \mathrm{E}(i\theta)\,| = |\,\mathrm{E}(i\theta)\,(\,\mathrm{E}(-i\theta)\,z-1)| = |\,\mathrm{E}(-i\theta)\,z-1| = |1-\overline{z}\,\mathrm{E}(i\theta)\,|\,.$$

■

5. Mostre a seguinte desigualdade

$$\frac{|1-\, \mathrm{E}(i\theta)\,|}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}\,,\;\; 0\leq\theta\leq\pi.$$

e forneça uma interpretação geométrica no plano complexo.

Sugestão: Note que a asserção é equivalente a

$$\sin\frac{\theta}{2} \geq \frac{\theta}{\pi}\,,\;\; 0\leq\theta\leq\pi,$$

e em seguida estude o sinal da função derivada $f'(\theta)$, aonde

$$f(\theta) = \sin\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{\pi}\,,\;\; 0\leq\theta\leq\pi.$$

6. Considere a variável complexa z e a igualdade

$$\big(1+z\cdots+z^{n-1}\big)(1-z)=1-z^n.$$

Se θ é real tal que $\theta\neq 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, então verifique sucessivamente as seguintes igualdades

$$i)\quad \sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(-ij\theta)}{1-\mathrm{E}(i\theta)}+\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(ij\theta)}{1-\mathrm{E}(-i\theta)} = \left[\frac{\sin\,(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2 \;;$$

$$ii)\quad \sum_{j=-n}^{n}\frac{\mathrm{E}(-ij\theta)}{1-\mathrm{E}(i\theta)}+\sum_{j=-n}^{n}\frac{\mathrm{E}(ij\theta)}{1-\mathrm{E}(-i\theta)} = \frac{\sin\,(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \;.$$

Resolução: $i)$ É obvio que

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(-ij\theta)}{1-\mathrm{E}(i\theta)}+\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(ij\theta)}{1-\mathrm{E}(-i\theta)}=2\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(-ij\theta)}{1-\mathrm{E}(i\theta)}\,.$$

Computações elementares estabelecem

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(-ij\theta)}{1-\mathrm{E}(i\theta)} &= \frac{1}{1-\mathrm{E}(i\theta)}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{E}(-ij\theta)=\frac{1}{1-\mathrm{E}(i\theta)}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{E}^j(-i\theta)=\frac{1}{1-\mathrm{E}(i\theta)}\frac{1-\mathrm{E}(-i(n+1)\theta)}{1-\mathrm{E}(-i\theta)}\\ &= \mathrm{E}(i\frac{n+1}{2}\theta)\,\frac{\mathrm{E}(-i\frac{n+1}{2}\theta)\,-\,\mathrm{E}(i\frac{n+1}{2}\theta)}{|1-\mathrm{E}(-i\theta)\,|^2}=-i\;\mathrm{E}(i\frac{n+1}{2}\theta)\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,.\end{aligned}$$

Logo

$$2\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{E}(-ij\theta)}{1-\mathrm{E}(i\theta)}=\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\left[\frac{\sin\,(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2\,.$$

■

7. Fornecidos números inteiros n e j, escreva os seguintes números complexos na forma cartesiana

i) $(1-i)^3$; ii) $(1-i)^3(1+i)^2$; iii) $\dfrac{1}{(1-i)^2}$; iv) $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$;

v) $\dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^{11}}$; vi) $\dfrac{(1+i)^{n+2j}}{(1-i)^n}$; vii) $i^n+(-1)^{n+1}i^n$; viii) $i^n+(-1)^n i^n$.

8. Determine os argumentos principais e uma forma polar dos seguintes números complexos

i) $\sqrt{3}+i$; ii) $(1+i)^2$; iii) $\big(\sqrt{3}+i\big)^2(1+i)$;

iv) $\big(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\big)^5$; v) $\big(\sqrt{3}+i\big)^{17}$; vi) $(1+i)^{12}$;

vii) $\big(i\sqrt{3}-1\big)^{17}(2-i\sqrt{12})^{31}$; viii) $\dfrac{(1+i)^{13}}{(i-1)^{12}}$; xi) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}\big(\sqrt{3}+i\big)^5$.

9. Considere a variável real θ. Tendo em conta as fórmulas de *Moivre*, demonstre as seguintes asserções:

$$\begin{aligned} &i) \quad \cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots\,; \\ &ii) \quad \sin n\theta = n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \cdots\,. \end{aligned}$$

10. Considere as variáveis complexas não nulas z e w.

i) Verifique as seguintes igualdades entre conjuntos

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \quad , \quad \operatorname{Arg}\frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z \quad , \quad \operatorname{Arg}\overline{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

ii) Encontre exemplos de números complexos z e w tais que

$$\arg(zw) \neq \arg z + \arg w \quad , \quad \arg\frac{1}{z} \neq -\arg z \quad , \quad \arg\overline{z} \neq -\arg z.$$

11. Seja $\arctan x$ a inversa da restrição da função $\tan x$ ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$. Verifique que

$$\arg z = \arctan\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sign} x)\operatorname{sign} y,$$

aonde z é variável complexa, x e y são variáveis reais não nulas, e $z = x + iy$.

12. Encontre as soluções das seguintes equações e represente-as no plano complexo:

i) $z^3 = -i$; ii) $z^4 = -16$; iii) $z^2 = 2 + i\sqrt{12}$;

iv) $2z^4 = \sqrt{3}i - 1$; v) $z^4 - (9+4i)z^2 + 36i = 0$; vi) $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$;

vii) $z^6 + iz^3 + 2 = 0$; viii) $\overline{z}^2 + z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$; ix) $z^3\overline{z}^2 - 5z^2\overline{z} + 6z = 0$.

13. Fornecido um número natural não nulo n, diz-se que um número complexo ξ é uma raíz de ordem n da unidade, se $\xi^n = 1$. Denote o conjunto das raízes de ordem n da unidade por $\mathbb{T}_n$, i.e

$$\mathbb{T}_n := \left\{ \mathrm{E}(ik\frac{2\pi}{n}) \,:\, k = 0, \cdots, n-1 \right\}.$$

Verifique que o conjunto das raízes de ordem n de ξ coincide com $\sqrt[n]{|\xi|}\,\mathrm{E}(i\arg\xi/n)\,\mathbb{T}_n$, i.e. o conjunto das raízes de ordem n de ξ é a dilatação de $\sqrt[n]{|w|}$, da rotação de ângulo $\arg w/n$, do conjunto $\mathbb{T}_n$.

14. Represente as seguintes regiões no plano complexo:

i) $\{z : \mathrm{Re}\, z \mathrm{Re}\,(1/z) > 0\}$; ii) $\left\{z : |\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2z| > 2\right\}$;

iii) $\left\{z : (\,|z| - 1\,)(\,|\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2z| - 2\,) < 0\right\}$; iv) $\left\{z : \mathrm{Re}\,[\,(\sqrt{3} + i)z\,] \geq 0\right\}$;

v) $\{z : |z|\mathrm{Re}\,(iz) \geq \mathrm{Re}\,(iz)\}$; vi) $\left\{z : |z|\mathrm{Re}\,(iz^2) \geq \mathrm{Re}\,(iz^2)\right\}$;

vii) $\left\{z : \mathrm{Im}\,[\,(\sqrt{3} + i)z\,]\mathrm{Im}\,[\,(i - \sqrt{3})z\,] > 0\right\}$; viii) $\left\{z : \mathrm{Re}\,[\,(iz + i)(1 - z)^{-1}\,] > 0\right\}$;

ix) $\left\{z : \mathrm{Im}\,[\,(1 - i)z^3] + |z|^2\mathrm{Im}\,[\,(1 + i)z\,] < 0\right\}$; x) $\{z : |z - i| > |z + i|\}$;

xi) $\{z : |z - 1| + |z + 1| = 4\}$; xii) $\{z : |z| - |z - 2| > 2\}$.

Sugestão: Para a alínea ix) poder-lhe-á ser útil considerar a igualdade $2\mathrm{Re}\, z\mathrm{Im}\, w = \mathrm{Im}\,(zw) + \mathrm{Im}\,(\overline{z}w)$.

15. Seja k um natural não nulo. Demonstre que a função racional $i\left[(z - i)^{-k} - (z + i)^{-k}\right]$ coincide com o cociente de polinómios de coeficientes reais.

16. Mostre que o polinómio $1 + z + \cdots + z^n$ não têm raízes reais, se n é par, e $z = -1$ é a única raiz real (com multiplicidade 1), se n é ímpar. Ademais, é válida a seguinte factorização

$$1 + \ldots + z^n = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\left(2\frac{2\pi}{n+1}\right) + 1\right)\cdots\left(z^2 - 2z\cos\left(n\frac{2\pi}{n+1}\right) + 1\right).$$

Resolução: Defina-se $p_n(z) = 1 + z \cdots + z^n$. Da igualdade

$$(1 - z)(1 + z \cdots + z^n) = 1 - z^{n+1}\,, z \neq 1$$

deduz-se que os zeros do polinómios $p_n(z)$ são raízes de ordem $n + 1$ da unidade. Sabemos que as raízes da unidade de ordem $n + 1$ constituem um subconjunto de $\mathbb{T} := \partial D(0, 1)$. Como $\mathbb{T} \cap \mathbb{R} = \{1, -1\}$ e $p_n(1) = n \neq 0$, então $z = -1$ é a única possível raiz real de p_n, e os zeros de p_n são as raízes da unidade de ordem $n + 1$, excetuando $z = 1$. Em particular todos os zeros são simples. Poder-se-á verificar diretamente que $z = -1$ é raiz de p_n sse n é impar. Alternativamente, como p_n têm coeficientes reais então existe um número par de raízes não reais. Se n é par e existem raízes reais, então necessariamente são em número par. Logo, se n é par não existem raízes reais. Se n é impar então as raízes reais são em numero impar e logo $z = -1$ é a única raiz real. Finalmente, os zeros de p_n são dados por

$$p_n(z) = 0 \quad \text{sse} \quad z = \mathrm{E}(ik2\pi/(n + 1))\ ,\ k = 1, \cdots, n.$$

Defina-se $z_k = \mathrm{E}(i2\pi k/(n + 1))\,;\, k = 1, \cdots, n$. Como o polinómio $p_n(z)$ tem coeficientes reais, então $\overline{z}_k$ é raiz de p_n. Terminamos a resolução considerando sucessivamente que

$$z_k = \cos\left(k\frac{2\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n+1}\right)$$

e que

$$(z - z_k)(z - \overline{z}_k) = \left[z - \cos\left(k\frac{2\pi}{n+1}\right)\right]^2 + \sin^2\left(k\frac{2\pi}{n+1}\right) = z^2 - 2\cos\left(k\frac{2\pi}{n+1}\right) + 1\,,\ k = 1, \cdots, n.$$

■

1.2 Retas, Círculos e Transformações Lineares-Fracionárias

1. Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

i) se R_ξ é a reta que passa por a origem e por o complexo ξ, então

$$R_\xi = \left\{z : \overline{\xi}z - \xi\overline{z} = 0\right\} ;$$

ii) se $R_{\xi,\eta}$ é a reta que passa por os complexos distintos ξ e η, então

$$R_{\xi,\eta} = \left\{z : (\overline{\xi} - \overline{\eta})z - (\xi - \eta)\overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi})\right\} .$$

2. Se $A \subset \mathbb{C}$ é conjunto não vazio e $z \in \mathbb{C}$, então $\operatorname{dist}(z, A)$ denota a distância de A ao ponto z, i.e.

$$\operatorname{dist}(z, A) := \inf\{|z - w| : w \in A\} .$$

Considere números complexos ξ e η, tais que $\xi \neq \eta$. Denota-se por $R_{\xi,\eta}$, a reta que inclui ξ e η. Demonstre as seguintes asserções:

i) Existe um único real t, verificando a condição $i(\xi - \eta)t \in R_{\xi,\eta}$;

ii) A reta $R_{\xi,\eta}$ passa por a origem sse $\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi}) = 0$;

iii) Se z denota o complexo de $R_{\xi,\eta}$ «mais próximo» da origem, então

$$z = i\frac{\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi})}{\overline{\xi} - \overline{\eta}};$$

iv) É válida a seguinte igualdade

$$\operatorname{dist}(R_{\xi,\eta}, 0) = \left|\frac{\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi})}{\xi - \eta}\right|.$$

Resolução: O vetor $\xi - \eta$ inclui-se na transladada da reta $R_{\xi,\eta}$, para a origem. Se $0 \neq t \in \mathbb{R}$, então $\xi - \eta$ e $i(\xi - \eta)t$ são vetores ortogonais. Assim, se $i(\xi - \eta)t \in R_{\xi,\eta}$, então $\operatorname{dist}(R_{\xi,\eta}, 0) = |i(\xi - \eta)t|$. Considerando

$$\mathrm{Im}\left[\frac{i(\xi - \eta)t - \eta}{\xi - \eta}\right] = t - \mathrm{Im}\,\frac{\eta}{\xi - \eta} \quad \text{e} \quad i(\xi - \eta)\mathrm{Im}\,\frac{\eta}{\xi - \eta} = i\frac{\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi})}{\overline{\xi} - \overline{\eta}} ,$$

o leitor não encontrará dificuldades em terminar a resolução. ■

3. Pode dizer-se que $\mathrm{Re}\,(az) = 1$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ é a equação geral das retas que não passam na origem. De facto:

i) Considere $a \neq 0$ fixo. Mostre que o conjunto $\{z : \mathrm{Re}\,(az) = 1\}$ é uma reta que não passa por a origem. Em função de a, determine complexos ξ e η tais que $R_{\xi,\eta} = \{z : \mathrm{Re}\,(az) = 1\}$, aonde $R_{\xi,\eta}$ denota a reta incluindo os complexos distintos ξ e η;

ii) Suponham-se fornecidos complexos distintos ξ e η, tais que $0 \notin R_{\xi,\eta}$. Em função de ξ e η, determine um complexo a, tal que $R_{\xi,\eta} = \{z : \mathrm{Re}\,(az) = 1\}$.

Resolução: Considere a evidente asserção

$$\mathrm{Re}\,(az) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,[ia(z - 1/a)] = 0.$$

Resolva $\eta = 1/a$ e $\xi - \eta = i/a$. Para a alínea *ii)* considere a alínea *ii)* do problema 1 e sem dificuldades obtenha que $z \in R_{\xi,\eta}$ sse

$$\mathrm{Im}\,\left[(\overline{\xi} - \overline{\eta})z\right] = \mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi}) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\left[\frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{i\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi})}z\right] = 1\,.$$

Observe que a desigualdade $\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi}) \neq 0$ é consequência de $0 \notin R_{\xi,\eta}$. ■

4. Suponha fornecida uma reta $R := \{z : \mathrm{Re}\,(az) = 1\}$, aonde $a \neq 0$. Verifique que $1/a$ é o ponto de R ≪mais próximo≫ da origem (poder-lhe-á ser útil considerar os problemas 2 e 3).

5. Considere a reflexão $\alpha_\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, relativa à reta R_ξ que passa por a origem e interceta o circulo unitário no complexo ξ. Diz-se que $\alpha_\xi(z)$ é a **imagem simétrica** de z relativa à reta R_ξ.

i) Mostre que $\alpha_\xi(z) = \xi^2\overline{z}$;

ii) Se $R_\xi = \{xz_m : x \in \mathbb{R}\}$, aonde $z_m = (1 + im)$ e $m \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha_\xi(z) = \frac{z_m}{\overline{z}_m}\overline{z} = \frac{(1 - m^2) + i2m}{1 + m^2}\,\overline{z}.$$

6. Considere a reflexão $\alpha_{\xi,\eta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ relativa à reta $R_{\xi,\eta}$ $(\xi, \eta \in \mathbb{C},\ \xi \neq \eta)$. Justifique o seguinte

$$\alpha_{\xi,\eta}(z) = \frac{\xi(\overline{z} - \overline{\eta}) - \eta(\overline{z} - \overline{\xi})}{\overline{\xi} - \overline{\eta}}\,,\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Resolução: A seguinte asserção $\alpha_{\xi,\eta}(z) = \alpha_{\xi-\eta}(z - \eta) + \eta$, é evidente. Termine, considerando o problema 5. ■

7. Identifique a linear-fracionária $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, com a seguinte matriz de entradas em $\mathbb{C}$

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

i) Se a linear-fracionária S, é identificada com a matriz B, então a composição de lineares-fracionárias $T \circ S$, é linear-fraccionária e identifica-se com o produto de matrizes AB;

ii) A linear fraccionária T^{-1}, identifica-se com a matriz dos cofatores $(\mathrm{cof}\,A)^t$;

iii) Forneça exemplos de lineares-fracionárias S e T, tais que a função $z \to S(z) + T(z)$ não é linear-fracionária. Finalmente, demonstre que a linear-fracionária λT, $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda \neq 0)$ não se identifica com a matriz λA.

8. Considere a transformação de inversão $T(z) = 1/z$, $z \in \dot{\mathbb{C}}$. Suponha que a inversão dum círculo do plano complexo compactificado é um círculo do plano complexo compactificado. Se ξ e η são complexos distintos, então $R_{\xi,\eta}$ denota a reta no plano complexo, a qual inclui ξ e η. Demonstre o seguinte:

a) Se $C = \partial D(z, r)$, aonde $z \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ então

   i) Se $0 \in C$ então $T(C) = R_{\mu,\nu}$, aonde $\mu = (\overline{z} - ir)/|z + ir|^2$ e $\nu = (\overline{z} + ir)/|z - ir|^2$;

   ii) Se $0 \notin C$ então $T(C) = \partial D(w, \delta)$, aonde $w = \overline{z}/(|z|^2 + r^2)$ e $\delta = r/(|z|^2 + r^2)$.

b) Se $C = R_{\xi,\eta}$, aonde $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ e $\xi \neq \eta$, então

   i) Se $0 \in C$ então $T(C) = R_{\mu,\nu}$, aonde $\mu = \overline{\xi}$ e $\nu = \overline{\eta}$;

   ii) Se $0 \notin C$ então $T(C) = \partial D(w, \delta)$, aonde $w = i(\overline{\eta} - \overline{\xi})/\mathrm{Im}\,(2\eta\overline{\xi})$ e $\delta = |\overline{\eta} - \overline{\xi}|/|\mathrm{Im}\,(2\eta\overline{\xi})|$.

Resolução: *a)i).* Sabe-se que $T(0) = \infty$. Como $T(C)$ é circulo no plano compactificado e inclui o ponto infinito, então $T(C)$ é uma reta no plano compactificado. Os complexos $z + ir$ e $z - ir$, incluem-se em C. Logo $T(C)$ é a reta que inclui os pontos $T(z + ir)$ e $T(z - ir)$.
a)ii) Como $0 \notin C$ então $\infty \notin T(C)$. Logo $T(C)$ é um circulo em $\mathbb{C}$. O segmento de reta entre os complexos $\xi_1 := z(1 + ir/|z|)$ e $\xi_2 := z(1 - ir/|z|)$, é um diâmetro de C. Logo $[T(\xi_1), T(\xi_2)]$ é um diâmetro de $T(C)$. Assim $T(C) = \partial D(w, \delta)$ aonde

$$w = \frac{T(\xi_1) + T(\xi_2)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \left|\frac{T(\xi_1) - T(\xi_2)}{2}\right| .$$

b)i) De $0 \in C$ deduz-se $\infty \in T(C)$. Em consequência, $T(C)$ é uma reta em $\mathbb{C}$, aonde são inclusos os pontos $1/\xi$, $1/\eta$ e a origem. O resultado deduz-se de imediato.
b)ii) Como $0 \notin C$ então $\infty \notin T(C)$ e $T(C)$ é um circulo em $\mathbb{C}$. Do problema 2 sabemos que o ponto de $R_{\xi,\eta}$ a distância mínima da origem é $\xi := i\mathrm{Im}\,(\eta\overline{\xi})/(\overline{\xi} - \overline{\eta})$. Logo $T(C)$ é um circulo em $\mathbb{C}$, cujo ponto com distância máxima à origem é $1/\xi$. Conclui-se $T(C) = \partial D(w, \delta)$, aonde $w = 1/(2\xi)$ e $\delta = |w|$. ∎

9. Esboce no plano complexo, os conjuntos $\Omega := f(\Delta)$, aonde a função f e a região Δ, são indicados nas seguintes alíneas:

a) A função f é a linear-fracionária $f(z) = 1/(z - i)$ e as regiões Δ são descritas em seguida:

   i) $\Delta := \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$; ii) $\Delta := \{z : \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$;

   iii) $\Delta := \{z : \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0,\ |z| < 1\}$; iv) $\Delta := \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$.

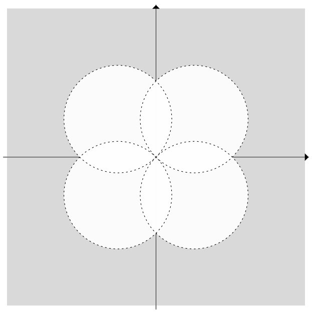
b) A região Δ é o semiplano superior Π, e as funções $f(z)$ são descritas em seguida:

$$\text{i) } f(z) := \frac{1}{z + i}\ ; \quad \text{ii) } f(z) := \frac{z}{z + i}\ ; \quad \text{iii) } f(z) := \frac{z - 1}{iz - 1}\ ; \quad \text{iv) } f(z) := \frac{1}{z^2}\ .$$

10. Considere a transformação de inversão $T(z)$. Represente $T(\Omega)$ no plano complexo, aonde Ω é a seguinte região

$$\Omega := \{x + iy : |x| + |y| < 1\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Resolução:



Considere-se a região $A = \{x + iy : y < x + 1;\, x, y \in \mathbb{R}\}$. A região Ω consiste na interceção de A, com as regiões obtidas da rotação de A, por $\pi/2, \pi$ e $3\pi/2$, i.e. $\Omega = A \cap (iA) \cap (-A) \cap (-iA)$. Porque $T(i) = -i$ então $T(\Omega) = T(A) \cap [iT(A)] \cap [-T(A)] \cap [-iT(A)]$. Logo, é suficiente considerar $T(A)$. O complexo $\xi := (1 + i)/2$ é o ponto da reta de equação $y = x + 1$, ≪mais próximo≫ da origem. A imagem da reta $y = x + 1$ por $T(z)$, é a circunferência de centro em $T(\xi)/2$ e raio $|T(\xi)/2|$. Como $T(0) = \infty$ então $T(A)$ corresponde ao ≪exterior≫ de $\partial D((1 - i)/2, \sqrt{2}/2)$. Logo, $T(\Omega)$ coincide com a região $T(A)$, intercetada com as suas rotações sucessivas de angulo $\pi/2$.

■

11. Seja $T(z)$ uma transformação linear-fraccionária. Demonstre sucessivamente o seguinte:

i) $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sse existem existem números reais a, b, c e d, nas seguintes condições

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{e} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

ii) $T(\Pi) = \Pi$ sse verifica-se $i)$ e $ad - bc > 0$.

Resolução: Se $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ aonde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então é evidente que $T(\dot{\mathbb{R}}) = \dot{\mathbb{R}}$. Da seguinte igualdade

$$\operatorname{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z \tag{1}$$

deduz-se que $T(\Pi) = \Pi$ sse $ad - bc > 0$. Inversamente, suponha-se fornecida uma transformação linear fraccionária $T(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ tal que $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Então necessariamente $T(\dot{\mathbb{R}}) = \dot{\mathbb{R}}$. O caso $\gamma = 0$ é elementar. Supõe-se $\gamma \neq 0$. Então $T(-\delta/\gamma) = \infty, T(\infty) = \alpha/\gamma$ e $T(0) = \beta/\gamma$. Logo $\delta/\gamma, \alpha/\gamma$ e β/γ são reais e

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,, \quad \text{aonde} \quad a := \alpha/\gamma,\, b := \beta/\gamma,\, c := 1 \;\text{ e }\; d := \delta/\gamma\,.$$

Considerando (1), a resolução termina sem dificuldades. ■

12. Considere C, um qualquer circulo no plano complexo compactificado, e uma transformação linear-fraccionária $T(z)$, tal que $T(C) = \mathbb{R}$. Define-se $\alpha_C(z)$, a **imagem simétrica** de z relativa ao circulo C, por intermédio de $\alpha_C(z) = T^{-1}\Big(\overline{T(z)}\Big)$. Demonstre sucessivamente as seguintes asserções:

i) A função α_C está bem definida, i.e. se $S(z)$ é linear-fraccionária tal que $S(C) = \mathbb{R}$ então

$$S^{-1}\Big(\overline{S(z)}\Big) = T^{-1}\Big(\overline{T(z)}\Big)\,, \quad z \in \mathbb{C};$$

ii) Se existem complexos ξ e η tais que $\xi \neq \eta$ e $C = R_{\xi,\eta}$, então $\alpha_C(z) = \alpha_{\xi,\eta}$, aonde a aplicação $\alpha_{\xi,\eta}$ encontra-se definida no problema 6;

iii) Suponha $C = \partial D(0,r)$, $r > 0$ e verifique as seguintes propriedades

$$\alpha_C(z) = \frac{r^2}{\overline{z}} \quad , \quad |z\alpha_C(z)| = r^2 \quad \text{e} \quad \arg \alpha_C(z) = \arg z \,, \;\; z \in \dot{\mathbb{C}} \,.$$

Resolução: A linear fraccionária ST^{-1} transforma o eixo real compactificado a um ponto em si próprio. Considerando o problema 11 deduz-se $ST^{-1}(\overline{w}) = \overline{ST^{-1}(w)}$. Na igualdade anterior, substituindo w por $T(z)$, e multiplicando ambos os membros por S^{-1}, obtém-se $T^{-1}(\overline{T(z)} = S^{-1}(\overline{S(z)})$. Para a alínea *ii)*, é suficiente considerar $T(z) = (z-\eta)/(\xi-\eta)$ e aplicar a definição em *i)*. Para a alínea *iii)*, considere uma linear fraccionária que transforme $\partial D(0,r)$ em $\dot{\mathbb{R}}$, e.g. $T(z) = i(z - ir)/(z + ir)$. ■

13. justifique que pode dizer-se que $\operatorname{Re}(az) = 0$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ é a equação geral das retas que passam na origem.

1.3 Séries Numéricas

1. Considere um número natural k e uma sucessão complexa a_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_n (a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}) \quad \text{existe em } \mathbb{C}.$$

i) Mostre que $\lim_n (a_{n+k} - a_n) = 0$;

ii) Fixo $k \in \mathbb{N}_1$, considere $\theta_k = 2\pi/k$ e $a_n = \mathrm{E}^n(i\theta_k)$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ verifica as condições do enunciado e $\lim_n a_n$ não existe.

2. Considere um número complexo z. A sucessão z_n, $n \in \mathbb{N}$ diz-se a sucessão geométrica de razão z. Mostre sucessivamente as seguintes asserções:

i) Se $|z| > 1$ então $\lim_n z^n = \infty$;

ii) Se $|z| < 1$ então $\lim_n z^n = 0$;

iii) Se $|z| = 1$ e $z \neq 1$ então $\lim_n z^n$ não existe.

Resolução: Suponha que $\lim_n z^n = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Das hipóteses, deduz-se que $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Das fórmulas trigonométricas do dobro, deduz-se $b = 2ba$ e $2a^2 - a1 = 0$. Então $b = 0$. No entanto, se $\lim_n \sin(n\theta) = 0$, então aplique a igualdade $\sin(n\theta) = \sin(n-1)\theta\cos\theta - \cos(n-1)\theta\sin\theta$, para concluir que $\lim_n \cos(n\theta) = 0$. Da fórmula fundamental da trigonometria, deduza um absurdo.

Os argumentos acima, servem para mostrar que, nos casos não triviais, não existem os seguintes limites $\lim_n \cos(n\theta)$ e $\lim_n \sin(n\theta)$. É mais simples mostrar que $\lim z^n$ não existe, caso $|z| = 1$ e $z \neq 1$. De fato, se $\lim_n z^n = w$ então necessariamente $|w| = 1$ e

$$w = \lim z^{n+1} = z \lim z^n = zw.$$

Logo, $w = 0$ ou $z = 1$, o que é absurdo.

Também é possivel mostrar que se $z = \mathrm{E}(i\theta)$, $\theta/\pi = p/q$ aonde p e q são naturais positivos irredutíveis entre si, então a sucessão z^n, $n \in \mathbb{N}$ têm $2q$ sublimites distintos. Mais exigente é verificar que se $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$ então qualquer complexo unitário é sublimite da sucessão z^n, $n \in \mathbb{N}$. ■

3. Considere uma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ de termos reais positivos. Mostre que

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n},$$

aonde, de acordo com as convenções usuais, deve ter em conta que $1/0^+ = +\infty$ e $1/+\infty = 0$.

4. Averigue quais das seguintes séries são convergentes:

i) $\sum_n 2^n + 2^{-n}$; ii) $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$; iii) $\sum_n \frac{2^n}{2^n+3^n}$;

iv) $\sum_n 2^{(-1)^n n}$; v) $\sum_n e^{-\sqrt{n}}$; vi) $\sum_n \left(\sqrt{n^j+1} - \sqrt{n^j}\right), j \in \mathbb{N}_1$;

vii) $\sum_n \frac{1}{(\ln n)^j}, j \in \mathbb{N}_1$; viii) $\sum_n \ln\left(1+\frac{1}{n^j}\right), j \in \mathbb{N}_1$; ix) $\sum_n \sin\left(n\pi + \frac{(-1)^n}{n^j}\right), j \in \mathbb{N}_1$;

x) $\sum_n \frac{n^3 2^n + n}{n^2 3^n + 1}$; xi) $\sum_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; xii) $\sum_n \left(1+\frac{2(-1)^n-3}{n}\right)^{n^2}$;

xiii) $\sum_n \mathrm{E}\left(i(n\pi + \frac{1}{n})\right)$; xiv) $\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^j}, j \in \mathbb{N}_1$; xv) $\sum_n \frac{1}{\ln n!}$;

xvi) $\sum_n \frac{1}{\ln (jn)!}, j \in \mathbb{N}_1$; xvii) $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$; xviii) $\sum_n \frac{1}{n+(-1)^n}$.

Resolução: *v)* Mostre a seguinte igualdade $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$, $\alpha > 0$. Para $\alpha > 0$ adequado, aplique a igualdade anterior, para terminar a resolução.
vi) A seguinte igualdade $\sqrt{n^j+1} - \sqrt{n^j} = 1/\left(\sqrt{n^j+1} + \sqrt{n^j}\right)$, poder-lhe-á facilitar a resolução.
vii) Poder-lhe-á ser útil considerar a regra de *Cauchy,* para verificar indutivamente que $\lim n/(\ln n)^j = +\infty$.
ix) Atente às seguintes evidentes igualdades

$$\sin\left(n\pi + \frac{(-1)^n}{n^j}\right) = (-1)^n \sin\left[\frac{(-1)^n}{n^j}\right] = \sin\left(\frac{1}{n^j}\right) \quad \text{e ao limite} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

xii) Considerando separadamente a sucessão dos termos pares e dos termos impares, não encontrará dificuldades em verificar que se a_n, $n \in \mathbb{N}_1$ designa o termo geral da série, então $0 \le a_n \le (2/e)^n$, para ordens superiores a determinado natural.
xiii) Verifique que o termo geral da série não é infinitésimo.
xiv), xv), xvi) Tenha em consideração o critério integral, para sem dificuldades concluir que a série na alínea *xiv)* converge sse $j = 2, \ldots$. Para as alínea *xv)* e *xvi)*, estabeleça a evidente desigualdade $\ln n! \le n \ln n$.

■

5. Considere o critério de *Dirichlet,* para estudar a convergência das seguintes séries:

i) $\sum_n \sin\frac{1}{n}\xi^n, |\xi| = 1$; ii) $\sum_n \frac{1+\sqrt{n}\,\xi^n}{n^2+1}, |\xi| = 1$; iii) $\sum_n \frac{1+\sqrt{n}\,\xi^n}{n-1}, |\xi| = 1$;

iv) $\sum_n \frac{1+n\,\xi^n}{n^2-1}, |\xi| = 1$; v) $\sum_n \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$.

Resolução: *iii)* Definindo a função de variável real positiva $f(x) = x/(x^2-1)$, $x \in \mathbb{R}^+$, obtém-se

$$f(x) = \frac{(x-1)+1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}\,.$$

Segue que a seguinte sucessão $a_n := \sqrt{n}/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}_2$ é decrescente. Do critério de *Dirichlet,* conjuntamente com a divergência da série $\sum 1/\sqrt{n}$, conclui-se o seguinte

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n-1}\xi^n \quad \text{converge sse} \quad |\xi| = 1,\, \xi \neq 1\,.$$

Como a série $\sum 1/(n-1)$ é divergente, então a série parametrizada em ξ

$$\sum \frac{1+\sqrt{n}\xi^n}{n-1}, \tag{1}$$

diverge, se $|\xi| = 1$ e $\xi \neq 1$. Caso $\xi = 1$, então a série em (1), tem a natureza de $\sum 1/\sqrt{n}$. ■

6. Considere a variável complexa z. Calcule a soma das seguintes séries ou justifique a sua divergência:

i) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} z^n\,, k \in \mathbb{N}\,;$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^{n+1}}{(1+z)^{n-1}}\,;$ iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\,;$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}\,, p \in \mathbb{N}_1\,;$ v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+j)}\,, j \in \mathbb{N}_2\,;$ vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}\,;$

vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n \ln(n+1)}\,;$ viii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n\frac{2n+1}{(n^2-1)(n^2+2n)}\,.$

Resolução: *v*) Alega-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+j)} = \frac{1}{(j-1)(j-1)!}\,,\ \ j \in \mathbb{N}_2\,.$$

De facto, considerando a evidente igualdade

$$\frac{1}{(n+1)\cdots(n+j)} = \frac{1}{j-1}\left(\frac{1}{(n+1)\cdots(n+j-1)} - \frac{1}{(n+2)\cdots(n+j)}\right),$$

deduz-se tratar-se duma série telescópica. O resultado segue sem dificuldades.
viii) Considere a seguinte definição e igualdades

$$a_n := n\frac{2n+1}{(n^2-1)(n^2+2n)} = n\left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2+2n}\right) = n\left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{(n+1)^2-1}\right),\ \ n \in \mathbb{N}_1\,.$$

Se $b_n = 1/(n^2-1)$, $n \in \mathbb{N}_2$ então ser-lhe-á suficiente atentar a que

$$\sum_{n=2} a_n = \sum_{n=2} [nb_n - (n+1)b_{n+1}] + \sum_{n=2} b_{n+1} = \sum_{n=2} [nb_n - (n+1)b_{n+1}] + \frac{1}{2}\sum_{n=2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

■

7. Calcule os limites superior e inferior das sucessões de termo geral a_{n+1}/a_n e $\sqrt[n]{a_n}$. Averigue a convergência da série $\sum a_n$, nos diferentes casos definidos nas seguintes alíneas

i) n^2, $p \in \mathbb{N}$;	ii) $\dfrac{n}{n+1}$;	iii) $n!$;	iv) $\dfrac{n!}{(n+2)!}$;
v) $\dfrac{n^p}{n!}$, $p \in \mathbb{N}$;	vi) $\dfrac{a^n}{n^p}$; $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$;	vii) $\dfrac{n^n}{n!}$;	viii) $\dfrac{n^n}{(2n)!}$;
ix) $\dfrac{a^n b^n}{a^n + b^n}$; $a, b \in \mathbb{R}^+$;	x) $\left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)^n$;	xi) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n!}$;	xii) $\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}$;
xiii) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$;	xiv) $n^r r^n$, $r > 0$;	xv) $r^{(-1)^n n^2}$, $r > 0$;	xvi) $r^{(n^n)}$, $r > 0$;
xvii) $2 + (-1)^n$;	xviii) $2^{-n(2+(-1)^n)}$;	xix) $\dfrac{1}{1 + (-1)^n n}$.	

8. Considere uma sucessão de termos positivos a_n, $n \in \mathbb{N}$ e a sucessão das somas parciais

$$S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}\,,\ \ n \in \mathbb{N}_1.$$

Suponha que $\sum_n a_n$ converge e mostre que a série $\sum_n S_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ converge sse $|z| < 1$.

9. Seja a_n, $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de termos complexos e defina a sucessão de termo geral

$$\alpha_n = a_n + \cdots + a_{2n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}_1.$$

i) Mostre que se a série $\sum a_n$ converge então $\lim_n \alpha_n = 0$;

ii) Forneça exemplo duma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que a série $\sum a_n$ diverge e $\lim_n \alpha_n = 0$.

Resolução: Defina a sucessão das somas parciais $S_n := a_0 + \cdots + a_{n-1}$. Tão simplesmente verifique que $\alpha_n = S_{2n} - S_n$. Em relação à alínea *ii)*, poderá considerar a alínea *xiv)* do problema 4. ∎

10. Considere uma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ de termos não negativos.

i) Mostre que se $\sum a_n$ converge então $\sum a_n^2$ converge;

ii) Forneça exemplo de sucessão nas condições do enunciado, tal que $\sum a_n^2$ converge e $\sum a_n$ diverge;

iii) Justifique que, excluindo a hipótese $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, a asserção em i) não é válida.

11. Considere uma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ de termos não negativos.

i) Mostre que se a série $\sum a_n^2$ converge, então $\sum a_{2n}a_{2n+1}$ converge;

Sugestão: Poderá ser útil considerar a desigualdade $(a-b)^2 \geq 0\,;\; a, b \in \mathbb{R}$;

ii) Dê exemplo duma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ nas condições do enunciado, tal que $\sum a_{2n}a_{2n+1}$ converge e $\sum a_n^2$ diverge;

iii) Suponha que a sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ é monótona e demonstre que se a série $\sum a_{2n}a_{2n+1}$ converge então $\sum a_n^2$ também converge.

12. Considere uma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ de termos não negativos.

i) Seja $\alpha > \frac{1}{2}$. Mostre que se a série $\sum a_n^2$ converge então $\sum a_n/n^\alpha$ também converge.

ii) Dê exemplo duma sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ de termos não negativos tal que $\sum a_n^2$ converge e $\sum a_n/\sqrt{n}$ diverge.

Resolução: Considerando a evidente desigualdade

$$\frac{a_j}{j^\alpha} \leq \frac{1}{2}\left(a_j^2 + \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)\,;\;\; j = 2, \ldots$$

sem dificuldades, na seguinte desigualdade, o leitor poderá encontrar a solução da alínea *i)*

$$a_1 + \frac{a_2}{2^\alpha} + \cdots + \frac{a_n}{n^\alpha} \leq a_1 + \frac{1}{2}\left(a_2^2 + \cdots + a_n^2 + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right),\;\; n \in \mathbb{N}_1\,.$$

Para *ii)*, considere e.g. $a_n = 1/(\sqrt{n}\ln n)$. ■

13. Fixo $0 \leq \alpha \leq 1$, considere as sucessões de termos gerais $a_n = n^{-1}(\ln n)^{-\alpha}$ e $s_n = a_2 + \cdots + a_n$. Mostre que

$$s_n \sim \begin{cases} \dfrac{\ln^{1-\alpha} n}{1-\alpha} & , \quad \alpha < 1 \\ \ln \ln n & , \quad \alpha = 1 \end{cases}.$$

1.4 Séries de Potências

1. Determine o raio de convergência das séries de potências $\sum a_n z^n$, aonde o termo geral da sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}$ é indicado nas diferentes alíneas do problema [7 sec. 1.3].

2. Determine a região de convergência absoluta das seguintes séries de potências:

i) $\sum_n n^3 z^n$; ii) $\sum_n \frac{1}{n^2+(-1)^n n^3} z^n$; iii) $\sum_n n^{(-1)^n} z^n$; iv) $\sum_n n^{(-1)^n n} z^n$;

v) $\sum_n \frac{1}{1+n^{(-1)^n n}} z^n$; vi) $\sum_n \frac{n!}{n^n} z^n$; vii) $\sum_n \frac{n^n}{n!} z^n$; viii) $\sum_n \frac{(2n)!}{(3n)!} z^n$;

ix) $\sum_n 2^n z^{n^2}$; x) $\sum_n \frac{n^3+1}{n^2-1} 2^n z^{n^2}$; xi) $\sum_n 2^{(-1)^n n^2} z^n$; xii) $\sum_n 2^{(-1)^n n} z^{n^2}$;

xiii) $\sum_n \frac{1}{n!} z^{n!}$; xiv) $\sum_n \frac{n^n}{\epsilon^{n!}} z^n \,, \epsilon > 0$; xv) $\sum_n n^n z^{n!}$; xvi) $\sum_n \frac{n^n}{n!} z^{n!}$;

xvii) $\sum_n \cos(n\theta) z^n \,, \theta \in \mathbb{R}$.

Resolução: *xiv*) Defina-se $a_n := n^n/\epsilon^{n!}$, $n \in \mathbb{N}_1$. Então $b_n := \sqrt[n]{a_n} := n/\epsilon^{(n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}_1$. Se $0 < \epsilon \leq 1$, é evidente que $\lim b_n = +\infty$. Se $\epsilon > 1$ então encontramos uma indeterminarão no cálculo do limite da sucessão b_n, $n \in \mathbb{N}_1$. No entanto, são óbvias as seguintes computações

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}\epsilon^{-(n-1)(n-1)!} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Logo $\lim b_n = 0$. A região de convergência absoluta é $\{0\}$ e $\mathbb{C}$, respetivamente se $0 < \epsilon \leq 1$ e $\epsilon > 1$.

xv) O raio de convergência pode ser calculado da seguinte forma

$$\limsup \sqrt[n!]{n^n} = \limsup \left(n^{1/(n-1)}\right)^{1/(n-2)!} = 1^0 = 1\,.$$

Se $|z| = 1$ então o termo geral da série não é infinitésimo. Logo, a região de convergência absoluta é $D(0,1)$.

xvi) Sem dificuldades, deduz-se da alínea anterior que o raio de convergência da série é $r = 1$. Como

$$\frac{n^n}{n!} = n\frac{n^{n-1}}{n!} \geq n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,,$$

segue sem dificuldades que a região de convergência absoluta é $D(0,1)$.

xvii) Da desigualdade

$$\cos(n\theta) = \cos[(n-1)\theta]\cos(\theta) - \sin[(n-1)\theta]\sin\theta$$

segue que se $\cos(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ é sucessão infinitésima então também $\sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ é infinitésima. Da relação fundamental da trigonometria deduz-se um absurdo. Logo, a região de convergência absoluta é $D(0,1)$. ∎

3. Considere o critério de Dirichlet para determinar a região de convergência simples das seguintes séries de potências:

i) $\sum_n \frac{1}{n} z^n$; ii) $\sum_n \frac{(n+1)^n}{n^n} z^n$; iii) $\sum_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} z^n$;

iv) $\sum_n \frac{n!}{n^n} z^n$; v) $\sum_n \frac{1}{n+(-1)^n} z^n$; vi) $\sum_n \cos(n\theta) z^n \,,\ \theta \in \mathbb{R}$.

Resolução: *iv*) Defina-se a sucessão $b_n = n!/n^n$, $n \in \mathbb{N}_1$. Então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Se r designa o raio de convergência então $r = e$. Considere-se a sucessão $c_n := e^n b_n$, $n \in \mathbb{N}_1$ e compute-se

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = e\frac{b_{n+1}}{b_n} = e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Porque a sucessão $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}_1$ é crescente então a sucessão de termo geral c_{n+1}/c_n é decrescente ao valor 1. Logo $c_{n+1} \geq c_n$. Em consequência a sucessão c_n, $\in \mathbb{N}_1$ não é infinitésima e a série

$$\sum_n \frac{n!}{n^n} z^n = \sum_n c_n \xi^n \quad \text{é divergente} \qquad (|z| = e,\ |\xi| = 1)\,.$$

v) Sem dificuldades conclui que o raio de convergência é $r = 1$. Para determinar a região de convergência simples consulte [1, Secção 2.1 - Exemplo 13]. ■

4. Determine a região de convergência absoluta das seguintes séries na variável complexa z:

$$\text{i)} \sum_n \frac{(z-i)^{n-1}}{(z+i)^{n+1}}\ ; \quad \text{ii)} \sum_n \frac{1-nz}{n-z}\ ; \quad \text{iii)} \sum_n \left(\frac{1-nz}{n-z}\right)^n.$$

5. Considere uma sucessão de termos complexos a_n, $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum a_n z^n$ é uma série de potências com raio de convergência $r \in [0, +\infty]$, mostre sucessivamente que:

i) para $k \in \mathbb{N}_1$ fixo, a série de potências $\sum_n a_n z^{kn}$ tem raio de convergência $\sqrt[k]{r}$;

ii) se $b, c \in \mathbb{C}$ e $b \neq 0$ então a série de potências $\sum a_n (bz + c)^n$ têm raio de convergência $r/|b|$;

iii) se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n > k \Rightarrow a_n \neq 0$, então a série $\sum_n a_n^{-1} z^n$ tem raio de convergência r^{-1}.

6.

a) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum a_n z^n$, aonde a_n, $n \in \mathbb{N}$ denota uma sucessão complexa tal que, para ordens suficientemente grandes, o termo geral verifica as condições indicadas nas seguintes alíneas:

   i) existem constantes positivas $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ tais que $\lambda_1 \leq |a_n| \leq \lambda_2$;

   ii) existem constantes positivas $0 < \lambda_1, \lambda_2$ tais que $\lambda_1 n^2 \leq |a_n| \leq \lambda_2 n^3$;

   iii) existem constantes positivas $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ tais que $\lambda_1(3^n - n^2) \leq a_n \leq \lambda_2(3^n + n^3)$;

   iv) existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n \leq n^p$ e $a_n + a_m \leq a_{nm}$.

b) Verifique que para cada $j \in \mathbb{N}$, as sucessões $\ln^j n$, $n \in \mathbb{N}_1$ estão nas condições da alínea a) iv).

Resolução: *i)* Se r designa o raio de convergência, então $r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Deduz-se o seguinte

$$1 = \lim \sqrt[n]{\lambda_1} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim \sqrt[n]{\lambda_2} = 1\,.$$

vi) De $0 < a_n < n^p$ infere-se $r := \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{n^p} = 1$. Ademais $a_{2^n} \geq na_2$. Logo, considerando que $na_2 > 1$ para ordens superiores a determinado natural, obtém-se o seguinte

$$r \geq \limsup \sqrt[2^n]{a_{2^n}} \geq \limsup \sqrt[2^n]{na_2} \geq 1\,.$$

■

7. Considere um natural k e a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0} (n+1)^k \frac{z^n}{n!}. \tag{1}$$

i) Mostre que a série de potência (1), tem raio de convergência $+\infty$.

ii) Denote a soma da série de potências (1) por $S(z,k)$ e obtenha a fórmula de recorrência

$$S(z,k) = e^z + z\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} S(z,j)\,.$$

iii) Determine as somas $S(z,1), S(z,2)$ e $S(z,3)$, para qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$.

Resolução: Sem dificuldades o leitor deduz-se a solução de *i)*. Para a alínea *ii)*, aplique o binómio de Newton à parcela $(n+1)^k$ e comute a soma finita com o símbolo de série. ■

1.5 Funções Elementares

1. Determine a região de convergência absoluta das seguintes séries na variável complexa:

$$\text{i)}\ \sum_n e^{nz}\ ;\quad \text{ii)}\ \sum_n e^{nz^2}\ ;\quad \text{iii)}\ \sum_n (e^{nz}+e^{n\overline{z}})\ ;\quad \text{iv)}\ \sum_n \cos^n(z-\overline{z})\ .$$

2. Tenha em consideração a fórmula de Euler para reduzir o calculo das seguintes primitivas de funções de variável real, ao cálculo de primitivas imediatas:

$$\text{i)}\ \int e^t \cos t\ dt\ ;\quad \text{ii)}\ \int \cos^3 t\ dt\ ;\quad \text{iii)}\ \int e^t \sin^3 t\ dt\ ;\quad \text{iv)}\ \int \frac{1}{1-\cos t}\ dt\ .$$

Resolução: Para a alínea *i)* considere as seguintes computações

$$\int \cos(t)e^t\ dt = \frac{1}{2}\int \left(e^{(1+i)t}+e^{(1-i)t}\right) dt = \frac{1}{2+2i}e^{(1+i)t}+\frac{1}{2-2i}e^{(1-i)t} = \mathrm{Re}\left[\frac{1-i}{2}e^{(1+i)t}\right] = \frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)\,.$$

Com respeito à alínea *iv)* é suficiente o seguinte

$$\int \frac{1}{1-\cos t}\ dt = -\int \frac{e^{it}}{(e^{it}-1)^2}\ dt = \frac{-i}{e^{it}-1} = e^{-it/2}\frac{-i}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = -\frac{1}{2\sin(t/2)}e^{-it/2} = -\frac{1}{2\tan(t/2)}+\frac{i}{2}\,.$$

■

3. Considere números complexos z e w. Demonstre as seguintes igualdades

i) $\cos(z\pm w)=\cos(z)\cos(w)\mp\sin(z)\sin(w)$; ii) $\sin(z\pm w)=\sin(z)\cos(w)\pm\cos(z)\sin(w)$;

iii) $\cos(2z)=\cos^2(z)-\sin^2(z)$; iv) $\sin(2z)=2\sin z\cos z$;

v) $\cos z-\cos w = 2\sin\dfrac{z+w}{2}\ \sin\dfrac{w-z}{2}$; vi) $\sin z-\sin w = 2\cos\dfrac{z+w}{2}\ \sin\dfrac{z-w}{2}$;

vii) $\cos^2(z)+\sin^2(z)=1$; viii) $|\cos z|^2+|\sin z|^2=\cosh(2\mathrm{Im}\,z)$;

ix) $|\cos z|^2-|\sin z|^2=\cos(2\mathrm{Re}\,z)$; x) $|\cos z|^2=\sinh^2(\mathrm{Im}\,z)+\cos^2(\mathrm{Re}\,z)$;

xi) $|\sin z|^2=\cosh^2(\mathrm{Im}\,z)-\cos^2(\mathrm{Re}\,z)$.

4. Considere números complexos z e w. Demonstre as seguintes igualdades

i) $\cosh(z\pm w)=\cosh(z)\cosh(w)\pm\sinh(z)\sinh(w)$; ii) $\sinh(z\pm w)=\sinh(z)\cosh(w)\pm\cosh(z)\sinh(w)$;

iii) $\cosh(2z)=\cosh^2(z)+\sinh^2(z)$; iv) $\sinh(2z)=2\sinh(z)\cosh(2)$;

v) $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$; vi) $|\cosh z|^2+|\sinh z|^2=\cosh(2\mathrm{Re}\,z)$;

vii) $|\cosh z|^2-|\sinh z|^2=\cos(2\mathrm{Im}\,z)$; viii) $|\cosh z|^2=\sinh^2(\mathrm{Re}\,z)+\cos^2(\mathrm{Im}\,z)$;

ix) $|\sinh z|^2=\sinh^2(\mathrm{Re}\,z)+\sin^2(\mathrm{Im}\,z)$; xi) $\sinh\left(z-i\frac{\pi}{2}\right)=-i\cosh z$.

5. Considere um complexo w e funções de variável complexa $g(z)$, eventualmente indexadas em w.

a) Se $g(z) := e^{zw}$, então determine o valor do seguinte limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\,. \tag{1}$$

b) Determine o valor do limite (1), nos casos em que a função $g(z)$ é definida nas seguintes alíneas

$$\text{i) } \cos z\ ;\quad \text{ii) } \sin z\ ;\quad \text{iii) } \cosh z\ ;\quad \text{iv) } \sinh z\ .$$

6. Mostre que as funções trigonométricas complexas são ilimitadas em qualquer reta não paralela ao eixo real.

7. Mostre que as funções trigonométricas hiperbólicas complexas são ilimitadas em quaisquer retas não paralelas ao eixo imaginário.

8. Considere quaisquer números complexos z e w, naturais n e reais x, no domínio das seguintes expressões. Demonstre-as.

i) $\mathrm{Ln}\,(zw) = \ln z + \mathrm{Ln}\, w$;

ii) $\mathrm{Ln}\,(zw) = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, w$;

iii) $n\,\mathrm{Ln}\, z \subset \mathrm{Ln}\, z^n$;

iv) $\mathrm{Ln}\,\overline{z} = \overline{\mathrm{Ln}\, z}$;

v) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1}{z} = -\,\mathrm{Ln}\, z$;

vi) $\mathrm{Ln}\, e^z = z + i\,\mathrm{Arg}\, 1$;

vii) $\ln(-1)^n = i\,\dfrac{\pi}{2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]$;

viii) $\ln(x) = \ln|x| + i\dfrac{\pi}{2}(1-\mathrm{sign}\, x)$;

ix) $\ln(ix) = \ln|x| + \mathrm{sign}\, x \ln i$;

x) $\ln\overline{z} = \overline{\ln z}\,, z\notin\mathbb{R}$;

xi) $\ln\dfrac{1}{z} = -\ln z\,, z\notin\mathbb{R}$;

xii) $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x + i\pi(1-\mathrm{sign}\, x)$.

9. Considere complexos não nulos x e z. Mostre a seguinte fórmula

$$\ln(xz) = \ln z + \ln x - i\frac{\pi}{2}\,[1+\mathrm{sign}\,(\arg z)]\,[1-\mathrm{sign}\, x]\ ;\ \ z\notin\mathbb{R}^+\,,\ x\in\mathbb{R}\,,$$

aonde a função sinal $\mathrm{sign}\,:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\{-1,0,1\}$ é definida por

$$\mathrm{sign}\,(x) = \begin{cases} 1 & ,\quad x>0 \\ -1 & ,\quad x<0 \end{cases}\,.$$

Sugestão: Poder-lhe-á ser útil considerar a alínea *viii*) do problema 8 e demonstrar previamente que

$$\arg(xz) = \arg z - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(\arg z)(1-\mathrm{sign}\, x)\,;\ \ x\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C},\ x\neq 0\,, z\notin\mathbb{R}_0^+\,.$$

10. Calcule

i) i^{4i} ; ii) 1^i ; iii) $\ln i^{2ni}\,, n \in \mathbb{N}$; iv) $|i^x|\,, x \in \mathbb{R}$; v) $(ei)^i$;

vi) $\ln e^{\pi - i\pi}$; vii) i^{1-i} ; viii) i^i ; ix) $i^{1-i}\, i^i$; x) $\operatorname{Ln} i^2$;

xi) $2 \operatorname{Ln} i$; xii) $\ln i^3$; xiii) $3 \ln i$; xiv) $(e^\pi)^i$; xv) $(e^i)^\pi$.

11. Considere quaisquer números complexos z e w, naturais n e reais x, no domínio das seguintes expressões. Demonstre-as.

i) $\operatorname{Ln} z^w = w \operatorname{Ln} z + i \operatorname{Arg} 1$; ii) $|z^{ix}| = e^{-x \operatorname{Arg} z}$; iii) $(zw)^\xi = z^\xi w^\xi$;

iv) $\ln e^{\pi + in\pi} = \pi + i\dfrac{\pi}{2}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]$; v) $|(e^z)^x| = |e^{xz}|$; vi) $\left|(e^z)^i\right| = \left\{e^{iz} e^{-2k\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. Demonstre a seguinte igualdade $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$.

13. Considere um número real x, verificando $-1 \le x \le 1$. Mostre que o conjunto das soluções das equações na variável complexa $\sin z = x$ e $\cos z = x$, são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Resolução: Seja x um número real tal que $|x| \le 1$. As soluções de $\cos z = x$ são dadas por

$$\operatorname{Arccos} x = \{\mp i \,\ln|x + x_1| \pm \,\arg(x + x_1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\,, \quad \text{aonde} \quad x_1 = i\sqrt{1 - x^2}.$$

Considere que $\ln|x + x_1| = 0$ para concluir

$$\operatorname{Arccos} x = \left\{\pm \arg(x + i\sqrt{1 - x^2}) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{R}\,.$$

■

14. Determine as soluções das seguintes equações na variável complexa

i) $e^{iz^2} = i$; ii) $e^{iz}(\sqrt{3} + i) + e^{-iz}(\sqrt{3} - i) = 0$; iii) $\cos z = \sin z$;

iv) $e^{iz} - 4e^{-iz} = 2i$; v) $e^{-2z} + ie^{-z} - ie^z + 1 = 0$.

15. Considere números complexos não nulos z e reais x. Mostre que o conjunto z^x é finito sse $x \in \mathbb{Q}$.

16. Encontre os erros nas seguintes igualdades

$$\operatorname{Ln}|z| = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Ln} z + \overline{\operatorname{Ln} z}\right) = \{\,\ln|z| + ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

1.6 $\mathbb{C}$-Diferenciabilidade

1. Determine o domínio de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade das seguintes funções na variável complexa e calcule as suas respetivas derivadas

i) $|z|\ ,\ z \in \mathbb{C}$; ii) $z|z|\ ,\ z \in \mathbb{C}$; iii) $z/\overline{z}\ ,\ z \neq 0$;

iv) $\operatorname{Re}(z/\overline{z})\ ,\ z \neq 0$; v) $\operatorname{Im}(z/\overline{z})\ ,\ z \neq 0$; vi) $\operatorname{Re}(z^2/\overline{z}^2)\ ,\ z \neq 0$.

2. Determine o domínio de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade das seguintes funções na variável $z := x+iy$; $x, y \in \mathbb{R}$ e calcule as suas derivadas nos pontos aonde definidas

i) e^{ix} ; ii) $e^{ix|x|}$; iii) $(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$;

iv) $z+4ixy$; v) $\overline{z}+4ixy$; vi) $\overline{z}^3+2(x^2-y^2)$;

vii) $\arg(z)+\overline{z}^2$; viii) $x+i\arg z$; ix) $|z|^2+i\arg z$.

3. Considere a seguinte função $f(z) = \dfrac{z^2-\overline{z}^2}{|z|}\ ,\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $f(0)=0$.

i) Mostre que f verifica as equações de Cauchy-Riemann na origem.

ii) Mostre que $|f(z)| \leq 2|z|\,, z \neq 0$ e conclua que f é contínua em $\mathbb{C}$.

iii) A função f é $\mathbb{C}$-diferenciável na origem?

4. Determine o domínio de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade das funções definidas por as seguintes expressões e calcule as respetivas derivadas:

i) $\overline{z}^2+2\overline{z}+z\ ,\ z \in \mathbb{C}$; ii) $\overline{z}^3-3i\,\overline{z}^2-6\overline{z}+3\ ,\ z \in \mathbb{C}$; iii) $\overline{z}^5+5\overline{z}+z^3\ ,\ z \in \mathbb{C}$;

iv) $3\overline{z}^5-5\overline{z}^3+15\overline{z}+z^3\ ,\ z \in \mathbb{C}$; v) $e^{\overline{z}^5+5\overline{z}+z^3}\ ,\ z \in \mathbb{C}$; vi) $\cos z\, e^{\overline{z}}\ ,\ z \in \mathbb{C}$;

vii) $\cos(\frac{1}{z})\, e^{\overline{z}}\ ,\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; viii) $\cos(e^{\overline{z}})\ ,\ z \in \mathbb{C}$; ix) $\cos(e^{\overline{z}-z})\ ,\ z \in \mathbb{C}$;

x) $\cos|z|\ ,\ z \in \mathbb{C}$; xi) $z^2\overline{z}^2-2z\overline{z}+z^2\ ,\ z \in \mathbb{C}$; xii) $\overline{z}^2+2|z|^2\ ,\ z \in \mathbb{C}$;

xiii) $3|z|^2z-\overline{z}^3\ ,\ z \in \mathbb{C}$; xiv) $|\sin z|^2\ ,\ z \in \mathbb{C}$; xv) $\ln|z|\ ,\ 0 \neq z \in \mathbb{C}$.

5. Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ uma função $\mathbb{R}$-diferenciável.

i) Considere a função módulo $m(z) = |z|\ ,\ z \in \mathbb{C}$ e mostre que

$$\partial_{\overline{z}} m(z) = \frac{z}{2|z|} \quad \text{e} \quad \partial_z m(z) = \frac{\overline{z}}{2|z|}\,, \quad \text{aonde} \quad z \neq 0.$$

ii) Se $\varphi(z) = f(|z|)\,,\ z \neq 0$ então

$$\partial_{\overline{z}}\varphi(z) = f'(|z|)\frac{z}{2|z|} \quad \text{e} \quad \partial_z\varphi(z) = f'(|z|)\frac{\overline{z}}{2|z|}\,, \quad \text{aonde} \quad z \neq 0.$$

iii) Se φ é $\mathbb{C}$-diferenciável em $\mathbb{C}$ então φ é a função constante.

iv) Seja $z \in \mathbb{C}$. A função φ é $\mathbb{C}$-diferenciável em z sse $\overline{\varphi}$ é $\mathbb{C}$-diferenciável em z.

6. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, conexo não vazio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função admitindo derivadas de primeira ordem. Demonstre que se $\partial_{\overline{z}}f(z) = \partial_z f(z) = 0\,,\ z \in U$ então f é constante em U.

7. Fornecidos $n, k = 1, \cdots$ considere as funções $\varphi_{n,k}(z) = z^{n+k}/\overline{z}^n$, $z \neq 0$ e $\varphi_{n,k}(0) = 0$. Verifique sucessivamente as seguintes asserções:

i) As funções $\varphi_{n,k}$ são contínuas em $\mathbb{C}$;

ii) As funções $\varphi_{n,1}$ não são $\mathbb{C}$-diferenciáveis em qualquer número complexo z;

iii) As funções $\varphi_{n,1}$ verificam a condição de Cauchy-Riemann na origem sse n é par;

iv) As funções $\varphi_{n,k}$, $k = 2, \cdots$ são $\mathbb{C}$-diferenciáveis em z sse $z = 0$. Ademais $\varphi'_{n,k}(0) = 0$.

8. Fornecido $n = 1, \cdots$ considere as funções $\psi_n(z) = z^n/\overline{z}^n$, $z \neq 0$. Denote por $\mathbb{T}_k,\ k \in \mathbb{N}_1$ o conjunto das raízes de ordem k da unidade e verifique sucessivamente as seguintes asserções:

i) As funções ψ_n não são $\mathbb{C}$-diferenciáveis em qualquer $z \neq 0$;

ii) As funções $\operatorname{Re}\psi_n$ são $\mathbb{C}$-diferenciáveis no conjunto $\mathbb{T}_{4n}$;

iii) As funções $\operatorname{Im}\psi_n$ são $\mathbb{C}$-diferenciáveis no conjunto $e^{i\pi/(4n)}\mathbb{T}_{4n}$.

9. Considere $n \in \mathbb{N}_1$ e o polinómio em z e $\overline{z}$ dado por $\psi_n(z) = (n+1)|z|^2 z^{n-1} - \overline{z}^{n+1}\,,\ z \in \mathbb{C}$. Mostre que o conjunto de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade da função ψ coincide com o conjunto das retas que passam por a origem e por as raízes de ordem $2n$ da unidade.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A derivada direcional de f em ordem ao vetor $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z + tv) - f(z)}{t}\,.$$

Como sabemos, se f é $\mathbb{R}$-diferenciável no ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = J_f(z)v = \partial_z f(z)v + \partial_{\overline{z}}f(z)\overline{v}\,, \quad \text{aonde} \quad z = x + iy. \tag{1}$$

Nas diferentes alíneas abaixo considere funções $\mathbb{R}$-diferenciáveis no ponto $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

a) Mostre que não existe $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = \partial_z f(z)\,, \quad \text{para qualquer que seja a função } f.$$

Sugestão: Proceda por absurdo e considere $f(z) = e^{\overline{z}}\,, z \in \mathbb{C}$.

b) Demonstre a seguinte igualdade $\overline{\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]}(z) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(z)$ e de **a)** deduza que não existe um vetor $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = \partial_{\overline{z}} f(z)\,, \quad \text{para qualquer que seja a função } f.$$

c) Prove adicionalmente que:

$$\text{i)} \quad \partial_{\overline{z}} f(z) = \frac{v}{2|v|^2}\left[\frac{\partial f}{\partial v}(z) + i\frac{\partial f}{\partial(iv)}(z)\right] \;;\quad \text{ii)} \quad \partial_z f(z) = \frac{\overline{v}}{2|v|^2}\left[\frac{\partial f}{\partial v}(z) - i\frac{\partial f}{\partial(iv)}(z)\right]\,.$$

11. Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é função admitindo derivadas de primeira ordem em $z \in \operatorname{int} U$, então é válido o seguinte

$$|J_f(z)| = |\,\partial_z f(z)|^2 - |\,\partial_{\overline{z}} f(z)|^2\,.$$

Resolução: O leitor não encontrará dificuldades, caso considere as igualdades abaixo

$$|J_f(z)| = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,, -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right\rangle = \langle\, \partial_z f + \partial_{\overline{z}} f\,, \partial_z f - \partial_{\overline{z}} f\,\rangle\,.$$

■

12. Considere uma função φ definida numa vizinhança do ponto $z \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Demonstre sucessivamente que se φ é $\mathbb{C}$-diferenciável em z então:

$$\text{i)}\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z) = \varphi'(z)\,; \quad \text{ii)}\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z) = i\,\varphi'(z)\,; \quad \text{iii)}\ \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}(z) = \overline{\varphi'}(z)\,;$$

$$\text{iv)}\ \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}(z) = -i\,\overline{\varphi'}(z)\,; \quad \text{v)}\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(z) = v\,\varphi'(z)\,; \quad \text{vi)}\ \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v}(z) = \overline{v}\,\overline{\varphi'}(z)\,.$$

13. Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções $\mathbb{R}$-diferenciáveis em $\mathbb{C}$ e considere a função composta $\varphi = f \circ g$. Mostre que para qualquer vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$, verifica-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(z) = \partial_z f(w)\frac{\partial g}{\partial v}(z) + \partial_{\overline{z}} f(w)\frac{\partial \overline{g}}{\partial v}(z) \quad \text{aonde} \quad w = g(z)\,.$$

Se $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é $\mathbb{R}$-diferenciável e $\psi = f \circ \gamma$ então

$$\psi'(t) = \partial_z f(w)\gamma'(t) + \partial_{\overline{z}} f(w)\overline{\gamma}'(t) \quad \text{aonde} \quad w = \gamma(t)\,.$$

Resolução: Ser-lhe-á suficiente justificar as seguintes computações (considere ([1 exe. 10]))

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial v}(z) &= J_{f\circ g}(z)v = J_f(w)J_g(z)v = J_f(w)\eta = \partial_z f(w)\eta + \partial_{\overline{z}} f(w)\overline{\eta} \\ &= \partial_z f(w)\frac{\partial g}{\partial v}(z) + \partial_{\overline{z}} f(w)\frac{\partial g}{\partial \overline{v}}(z)\,,\end{aligned} \qquad \text{aonde} \quad \eta = \frac{\partial g}{\partial v}(z)\,.$$

■

14. Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função $\mathbb{R}$-diferenciável em $z \in \operatorname{int} U$. Diz-se que f é $\mathbb{C}$-anti-diferenciável no complexo z se $\overline{f}$ é $\mathbb{C}$-diferenciável em z. Demonstre a equivalência entre as seguintes asserções

i) f é $\mathbb{C}$-diferenciável ou $\mathbb{C}$-anti-diferenciável no ponto z;

ii) O módulo da derivada direcional $\left|J_f(z)e^{i\theta}\right|$ não depende de $\theta \in \mathbb{R}$;

iii) O limite $\lim_{w\to z} |(f(w) - f(z))/(w - z)|$ existe e é finito.

Suponha $|J_f(z)| \neq 0$. Verifique a equivalência de quaisquer das asserções $i), ii)$ e $iii)$ com a seguinte

iv) Caminhos ortogonais em z são transformados por f em caminhos ortogonais em $f(z)$.

Resolução: Para a equivalência $i) \Leftrightarrow ii)$ considere a seguinte igualdade

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(z)\right| = |J_f(z)e^{i\theta}| = |\,\partial_z f(z) + \partial_{\overline{z}} f(z)e^{-i2\theta}| \quad \text{aonde} \quad v = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Para a equivalência $i) \Leftrightarrow iv)$ considere que nas condições das hipóteses, a alínea *iv)* pode ser substituída por a condição de ortogonalidade entre as derivadas direcionais em ordem a vetores ortonormais. Fixe-se $\theta \in \mathbb{R}$ e considerem-se os vetores ortogonais $v = e^{i\theta}$ e $w = \pm ie^{i\theta}$. Seguem as seguintes computações

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(z)\,, \frac{\partial f}{\partial w}(z)\right\rangle &= \left\langle e^{i\theta}\,\partial_z f(z) + e^{-i\theta}\,\partial_{\overline{z}} f(z)\,, \pm ie^{i\theta}\,\partial_z f(z) \mp ie^{-i\theta}\,\partial_{\overline{z}} f(z)\right\rangle \\ &= \pm\left\langle e^{-i\theta}\,\partial_{\overline{z}} f(z)\,, ie^{i\theta}\,\partial_z f(z)\right\rangle \mp \left\langle e^{i\theta}\,\partial_z f(z)\,, ie^{-i\theta}\,\partial_{\overline{z}} f(z)\right\rangle \\ &= \pm 2\mathrm{Re}\left(ie^{i2\theta}\,\partial_z \overline{f}(z)\,\partial_z f(z)\right).\end{aligned}$$

Na última igualdade acima considerou-se que $\langle \xi\,, \eta\rangle = \mathrm{Re}\,(\overline{\xi}\eta)$. Sem dificuldades conclui-se que *iv)* verifica-se sse $\partial_z \overline{f}(z)\,\partial_z f(z) = 0$. ■

15. Considere U aberto conexo não vazio e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Demonstre que se o contradomínio de u inclui-se numa variedade uni-dimensional então a função u é constante. Deduza que se $\mathrm{Re}\, u$, $\mathrm{Im}\, u$, $|u|$ ou $\arg u$ são holomorfas em U então u é constante.

Resolução: Para a primeira parte do problema, consulte a resolução do problema [1.9 exe. 9]. Para a segunda parte, exemplifica-se a resolução, considerando o caso $\arg u \in \mathcal{H}(U)$. Porque o contradomínio de $\arg u$ inclui-se numa variedade uni-dimensional então deduz-se da alínea *i)* que $U \ni z \mapsto \arg u(z)$ é constante. Logo a função $u(z) = |u(z)|e^{i\arg u(z)}$ tem contradomínio incluído em determinada reta passando por a origem. De $i)$ conclui-se que u é constante. ■

1.7 Integrais de Linha e Teorema Fundamental

1. Considere $r > 0$ e aplique a definição de integral de linha para calcular

$$\text{i)} \quad \int_{[0,2i]} \arg z \; dz \; ; \quad \text{ii)} \quad \int_{[0,1+i]} \arg z \; dz \; ; \quad \text{iii)} \quad \int_{|z|=r} \arg z \; dz \; ;$$

$$\text{iv)} \quad \int_{|z|=r} \arg z \; d\overline{z} \; ; \quad \text{v)} \quad \int_{|z|=r} \arg z \; |dz| \; ; \quad \text{vi)} \quad \int_{\gamma} \arg z \; dz \; ;$$

aonde

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(x) = x + ix^2.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\,,\; f(z) = 2\ln z/z$ e calcule os integrais de linha $\int_\gamma f(z)\; dz$, aonde os caminhos γ são indicados nas seguintes alíneas

$$\text{i)} \quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\,,\; \gamma(t) = (1-t) + it \; ; \quad \text{ii)} \quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\,,\; \gamma(t) = e^{-i3\pi t/2} \; ;$$

$$\text{iii)} \quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\,,\; \gamma(t) = e^{i2\pi t} \; ; \qquad \text{iv)} \quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\,,\; \gamma(t) = e^{i4\pi t} \; .$$

3. Considere o caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,,\; \gamma(x) = xe^{ix}$ e calcule os seguintes integrais de linha

$$\text{i)} \quad \int_\gamma z \; dz \; ; \qquad \text{ii)} \quad \int_\gamma \overline{z} \; dz \; ; \qquad \text{iii)} \quad \int_\gamma \arg z \; dz \; ;$$

$$\text{iv)} \quad \int_\gamma \operatorname{Re} z \; dz \; ; \quad \text{v)} \quad \int_\gamma \operatorname{Im} z \; dz \; ; \quad \text{vi)} \quad \int_\gamma \frac{e^{|z|}}{i - |z|} \; dz \; .$$

4. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ e $[-z, z]$ o segmento de reta de $-z$ a z. Justifique que o integral de linha

$$\int_{[-z,z]} w \ln w \; dw \,,$$

está bem definido e calcule-o.

Resolução: Considere o Teorema fundamental do cálculo e as evidentes proposições $\overline{z} = 1/z$, $z \in C_1$ e $\overline{z} = -z$, $z \in C_2$ para calcular o integral do lado esquerdo. Para determinar o integral do lado direito, poder-lhe-á ser útil considerar a seguinte igualdade [1, pag. 95]

$$\operatorname{Re} \int_\gamma f(w) \; dw = \int_\gamma \overline{f}(w) d\gamma(w) \, .$$

■

5. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira representada por uma série de potências $\sum_{n=0} a_n z^n$ convergente em $\mathbb{C}$. Suponha que a_n, $n \in \mathbb{N}$ é uma sucessão de termos reais e justifique que

$$\int_{[z_1,z_2]} \overline{f}(w)\, dw = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1} \left[F(\overline{z}_2) - F(\overline{z}_1) \right] ,$$

aonde F é a função inteira representada por a série de potências $\sum_{n=0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Resolução: Considere a parametrização $\gamma(t) = z_2 t + z_1(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$. Eventualmente a resolução ser-lhe-á evidente se considerar que $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ e as seguintes igualdades

$$\int_{[z_1,z_2]} \overline{f}(w)\, dw = \int_0^1 \overline{f}(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1} \overline{\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt} = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1} \overline{\int_{[z_1,z_2]} f(w)\, dw} .$$

■

6. Considere uma caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 verificando as seguintes condições:

$$\operatorname{Re}\gamma(0) = \operatorname{Im}\gamma(1) > 0\,,\ \operatorname{Im}\gamma(0) = \operatorname{Re}\gamma(1) = 0 \quad ; \quad \operatorname{Re}\gamma(t) > 0\,,\ \operatorname{Im}\gamma(t) > 0 \quad (0 < t < 1)\,.$$

Defina os caminhos γ_k , $k = 1, \cdots, 4$ da seguinte forma $\gamma_k(t) = i^{k-1}\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Aplicando a definição de integral de linha verifique que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ é integrável em intervalos compactos então

$$\int_\alpha f(|z|)\, dz = \int_\alpha f(|z|)\, d\overline{z} = 0\,,$$

aonde α é o caminho fechado seccionalmalmente regular definido por as seguintes condições

$$\alpha : [0,4] \to \mathbb{C} \quad , \quad \alpha(t) = \gamma_k(t - k + 1)\,,\ k - 1 \leq t \leq k \quad (k = 1, \cdots, 4).$$

7. Considere os caminhos γ_1, γ_2 e γ_3 respetivamente definidos por $\left[0, e^{-i\pi/4}\right]$, $\left[e^{i\pi/4}, 0\right]$ e

$$\gamma_3 : [-\pi/4\,,\, \pi/4] \to \mathbb{C} \quad , \quad \gamma_3(t) = e^{it}.$$

i) Represente no plano complexo as curvas $\mathcal{C}^{\gamma_j}$, $j = 1, \cdots, 4$, aonde γ_4 é uma parametrização seccionalmente regular da curva fechada $\mathcal{C}^{\gamma_1} \cup \mathcal{C}^{\gamma_2} \cup \mathcal{C}^{\gamma_3}$, percorrida no sentido postivo;

ii) Calcule os integrais indicados nas seguintes alíneas:

i) $\displaystyle\int_{\gamma_3} \cos\left(\sqrt{2}\pi z\right) dz$; ii) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \cos z\, dz$; iii) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \cos\left(\sqrt{2}\pi \overline{z}\right) dz$;

iv) $\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{1}{z^2} \sin\left(\pi\overline{z}/\sqrt{2}\right) dz$; v) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \sin(\sqrt{2}\pi \operatorname{Re} z)\, dz$; vi) $\displaystyle\int_{\gamma_3} e^{|z|^2}\, dz$;

vii) $\displaystyle\int_{\gamma_4} z e^{\pi |z|^2}\, dz$; viii) $\displaystyle\int_{\epsilon\gamma_3} z \ln z\, dz \ (\epsilon > 0)$; ix) $\displaystyle\int_{\gamma_4} z \ln z\, dz$.

8. Considere os caminhos γ_1 e γ_4 referidos no problema 7. Demonstre que

$$\left|\int_{r\gamma_1} e^{z^2}\, dz\right| \leq r \quad \text{e} \quad \left|\int_{r\gamma_4} e^{z^2}\, |dz|\right| \leq 2r(1+e^{r^2}) \quad , \quad (r>0).$$

9. Considere a definição de integral de linha para calcular a função índice $I(\gamma, z)$, $z \notin \mathcal{C}^\gamma$ aonde o caminho γ encontra-se indicado nas seguintes alíneas:

i) $\gamma(t) = e^{i2n\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$ $\quad (n \in \mathbb{N}_1)$ $\quad ; \quad$ *ii)* $\gamma(t) = \operatorname{sign} t - e^{i2\pi t} \operatorname{sign} t$, $-n \leq t \leq m$ $\quad (n, m \in \mathbb{N}_1)$.

Na alínea *ii),* o símbolo $\operatorname{sign} t$ designa o **sinal** de $t \in \mathbb{R}$. No problema assume-se $\operatorname{sign} 0 = 0$. Esboce as curvas $\mathcal{C}^\gamma$ no plano complexo.

10. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular e $U \subset \mathbb{C}$ um aberto tal que $\mathcal{C}^\gamma \subset U$. Se $F : U \to \mathbb{C}$ é diferenciável e $F'(z) = \overline{f}(z)$, $z \in U$ então

$$\int_\gamma f(z)\, d\overline{z} = \overline{F}(\gamma(b)) - \overline{F}(\gamma(a))\,.$$

1.8 Fórmulas Integrais de Cauchy e Série de Taylor

1. Seja f uma função na classe $\mathcal{H}(D(0,2))$. Encontre os erros nas seguintes igualdades

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(w)}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\overline{w}f(w)+w\overline{w}f'(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\partial_w\left[w\overline{w}f(w)\right]\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\partial_w f(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}f'(w)\,dw = 0\,. \end{aligned}$$

2. Considere uma função f com valores complexos e na classe $C^1(U)$, aonde U designa um conjunto aberto contendo $\operatorname{cl} D(0,1)$.

i) Verifique as seguintes igualdades:

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = -\int_{|z|=1} f(z)z^2\,d\overline{z} = i\int_{|z|=1} f(z)z\,|dz|\,.$$

ii) Suponha que $\overline{f}\in\mathcal{H}(U)\,,\ f(0)=0$ e demonstre que

$$\operatorname{Re}\int_{|z|=1} f(z)\,|dz| = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz \quad \text{e} \quad \int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz \quad \text{é imaginário puro.}$$

Resolução: A alínea *i)* é consequência imediata das diferentes definições de integral de linha envolvidas. Para a alínea *ii)*, considere *i)* e o seguinte

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_{|z|=1} f(z)\,|dz| &= \int_{|z|=1}\frac{f(z)+\overline{f}(z)}{2}\,|dz| = \int_{|z|=1}\frac{f(z)+\overline{f}(z)}{2z}z\,|dz| = -i\int_{|z|=1}\frac{f(z)+\overline{f}(z)}{2z}\,dz \\ &= \pi\overline{f}(0)+\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz\,. \end{aligned}$$

■

3. Considere as curvas

$$C_1=\{z:|z|=1,\operatorname{Re}z>0\} \quad , \quad C_2=\{iy:-1<y<1\} \quad \text{e} \quad C_3=\gamma_1\cup\gamma_2\,.$$

Suponha que C_3 é percorrida no sentido positivo, e que C_1 e C_2 são percorridas no sentido induzido de C_3. Calcule os integrais

$$\int_{C_j} z^n\overline{z}^{n+1}\,dz \quad \text{e} \quad \int_{C_j} z^n\overline{z}^{n+1}\,d\gamma_j\,,\ \ (n\in\mathbb{N})$$

aonde γ_j são parametrizações regulares das curvas $C_j\,, j=1,2,3$.

4. Considere conjuntos $U\subset\mathbb{C}$ e $\mathcal{C}^\gamma=\partial U$, nas condições do teorema de Green. Demonstre que se $f\in\mathcal{H}(U)\cap C^1(\operatorname{cl}U)$ e $g\in C^1(\operatorname{cl}U)$, aonde $\operatorname{cl}U$ designa a aderência do conjunto U, então

$$\iint_U f(z)\,\partial_{\overline{z}}\overline{g}\,(z)\,dA(z) = \frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)\overline{g}(z)\,dz.$$

5. Seja γ um caminho de Jordan seccionalmente regular, $U = \operatorname{ins}\gamma$ e $f \in C^2(\operatorname{cl} U)$. O Laplaciano da função f é definido através de $\Delta f = 4\,\partial_{\overline{z}}\,\partial_z f$. Demonstre sucessivamente que:

i) se para qualquer que seja $z \in U$ verifica-se $\Delta f(z) \in \mathbb{R}$, então

$$\operatorname{Re} \int_\gamma \partial_z f(z)\; dz = 0\,;$$

ii) se para qualquer que seja $z \in U$ verifica-se $\Delta f(z) \geq 0$, então

$$\operatorname{Im} \int_\gamma \partial_z f(z)\; dz \geq 0\,;$$

iii) suponha que $g \in \mathcal{H}(U) \cap C^2(\operatorname{cl} U)$ e considere $f(z) = |g(z)|^2$. Mostre que f verifica as condições da alínea *ii)* e se g é injetiva então

$$\int_\gamma g'(z)\overline{g}(z)\; dz = 2i|g^{-1}(\operatorname{ins}\gamma)|\,,$$

aonde $|g^{-1}(\operatorname{ins}\gamma)|$ denota a área do conjunto $g^{-1}(\operatorname{ins}\gamma)$.

Resolução: Do teorema de *Green* infere-se

$$\iint\limits_U \partial_{\overline{z}}\,\partial_z f\,(z)\; dA(z) = \frac{1}{2i}\int_\gamma \partial_z f(z)\; dz\,.$$

Desta forma o leitor não encontrará dificuldades em terminar a demonstração de *i)* e *ii)*. Em relação à alínea *iii)*, é evidente que a função f verifica as condições da alínea *ii)*. Em consequência, o Teorema de Green e a mudança de variável de integração estabelecem o seguinte

$$\int_\gamma g'(z)\overline{g}(z)\; dz = 2i\int_U g'(z)\,\partial_{\overline{z}}\overline{g}(z)\; dA(z) = 2i\int_U |g'(z)|^2\; dA(z) = 2i|g^{-1}(U)|\,, \quad \text{aonde} \quad U = \operatorname{ins}\gamma\,.$$

■

6. [*Teste 2008-04-19*] Considere a função meromorfa de variável complexa

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1}\,.$$

i) Determine e classifique as singularidades da função f;

ii) Indique o raio de convergência da série de Taylor de f centrada no ponto $z = \sqrt{2}$;

iii) Considere a função de variável complexa $g(z) = f(e^z)$ e determine as suas singularidades;

iv) Calcule os integrais

$$\int\limits_{|z-i|=1} f(z)\; dz \quad \text{e} \quad \int\limits_{|z-1|=1} g(z)\; dz\,, \tag{1}$$

aonde as curvas de *Jordan* nos integrais em (1) são percorridas no sentido positivo;

v) Determine o domínio de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade da função $h = 1/\,\overline{f}$ e calcule a derivada $h'(z)$, nos pontos z aonde h é $\mathbb{C}$-diferenciável;

Resolução: i) As singularidades de f são os zeros do polinómio $p(z) := z^2 - \sqrt{2}\,z + 1$. Sem dificuldades conclui-se

$$z^2 - \sqrt{2}\,z + 1 = 0 \quad \text{sse} \quad z = e^{\pm i\pi/4}\,.$$

Como $e^{\pm i\pi/4}$ são zeros simples de $p(z)$ então $e^{\pm i\pi/4}$ são pólos simples de $f(z)$.

ii) Se r é o raio de convergência da série de Taylor centrada $\sqrt{2}$, então

$$r = \min\left\{|\sqrt{2} - e^{i\pi/4}|\,,\,|\sqrt{2} - e^{-i\pi/4}|\right\} = 1\,.$$

iii) As singularidades de g são as soluções das equações $e^z = e^{\pm i\pi/4}$. Sem dificuldades obtemos

$$e^z = e^{\pm i\pi/4} \Leftrightarrow z = i\pi\left(\pm\frac{1}{4} + 2k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

iv) Uma única singularidade de f é elemento do interior da curva de *Jordan* $\{z : |z - i| = 1\}$. Logo

$$\int\limits_{|z-i|=1} f(z)\,dz = \int\limits_{|z-i|=1} \frac{1/\left(z - e^{-i\pi/4}\right)}{z - e^{i\pi/4}}\,dz = \frac{2\pi i}{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}} = \pi\sqrt{2}\,.$$

v) A função h é de classe C^∞ no seu domínio. Logo h é $\mathbb{C}$-diferenciável em z sse $z \neq e^{\pm i\pi/4}$ e $\partial_{\overline{z}}h(z) = 0$. Como $\partial_{\overline{z}}h(z) = 2\overline{z} - \sqrt{2}\,,\ z \neq e^{\pm i\pi/4}$ então

$$\partial_{\overline{z}}h(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e logo} \quad h \text{ é } \mathbb{C}\text{-diferenciável} \quad \text{sse} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Como $\partial_z h(z) = 0\,,\ z \neq e^{\pm i\pi/4}$ então $h'(\sqrt{2}/2) = 0\,.$ ∎

7. Considere um conjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ e uma função $f \in \mathcal{H}(U)$, aonde $U := \mathbb{C}\backslash\mathcal{F}$. Defina a função

$$\varphi(r) := \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \quad \text{aonde} \quad \gamma_r(t) = re^{it}\,,\ \ -\pi < t \leq \pi\,,\ r > 0.$$

Suponha $M(r) = o(1/r)\,,\ r \to +\infty$, aonde $M_r := \sup_{|z|=r}|f(z)|$. Justifique as seguintes asserções:

i) a função $\varphi(r)$ está bem definida tanto $\varphi(r)$ é constante, para r superior a determinado real;

ii) $\varphi(r) = 0$, para qualquer r superior a determinado real.

8. Calcule os integrais indicados em cada uma das seguintes alíneas

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(2z+1)^3}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,1)$; ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3}{z+1}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$;

iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z^4}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,1)$; iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2+\pi)(z^2-\pi)}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(i\pi,\pi)$;

v) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z^2+1)}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$; vi) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2+1)e^{\pi z}}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$;

vii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)\cos z}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$; viii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)(z^2-\pi^2)}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(i\pi,1)$;

ix) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(i\pi\overline{z})}{(z^2+1)}\,dz$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$; x) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{1-z^n}\,dz \ \ (n\in\mathbb{N})$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$;

xi) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(1-z^n)^2}\,dz \ \ (n\in\mathbb{N})$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$; xii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^j}{(1-z^n)^j}\,dz \ \ (n,j\in\mathbb{N})$, $\mathcal{C}^\gamma = \partial D(0,2)$.

aonde γ designa uma parametrização no sentido positivo das curvas de *Jordan* $\mathcal{C}^\gamma$ acima indicadas.

9. Desenvolva em série de potências de $z-a$, as funções indicadas nas seguintes alíneas, e indique a região de convergência absoluta dos desenvolvimentos obtidos:

i) $\dfrac{1}{z}$, $a=1$; ii) $\dfrac{1}{z(z+2)}$, $a=1$; iii) $\dfrac{1}{z^2(2z+2)}$, $a=1$;

iv) $\sin z$, $a=\pi$; v) $\sin^2 z$, $a=0$; vi) $z\ln z$, $a=1$;

vii) e^z , $a=\pi$; viii) $\cos z\, e^z$, $a=\pi$; ix) $\left(z^3-z^2+z-1\right)^{-1}$, $a=0$.

10. Fixo um numero complexo α na condição $|\alpha|\neq 1$, considere a função racional

$$f(z)=\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}.$$

i) Desenvolva a função f em série de Mac-Laurin e indique o raio de convergência da série obtida;

ii) Verifique a seguinte igualdade

$$f^{(n)}(z)=n!\frac{(|\alpha|^2-1)\overline{\alpha}^{n-1}}{(1-\overline{\alpha}z)^{n+1}} \quad , \quad n\in\mathbb{N}_1;$$

iii) Sem utilizar a soma da série geométrica, desenvolva a função f em série de potências de $z-\alpha$ e indique o raio de convergência da série obtida.

11. [*Teste 2008-04-19*] Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!-1}{n!\,3^n}\,z^n\,. \tag{2}$$

i) Determine o raio de convergência da série de potências (2) ;

ii) Justifique que função

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!-1}{n!\,3^n}\,z^n$$

define uma função holomorfa num conjunto aberto que contém $D(0,2)\cup\partial D(0,2)$ e calcule

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{f(\xi)}{(\xi-1)^2}\,d\xi \quad \text{e} \quad \int\limits_{|z|=1}\frac{1}{\xi^2}f(\frac{1}{\xi})\,d\xi\ .$$

Resolução: i) Considerando a definição de exponencial e a soma da série geométrica, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!-1}{n!\,3^n}\,z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{3}\right)^n=\frac{3}{3-z}-e^{z/3}\,,\ \ |z|<3\,.$$

Como a exponencial é uma função inteira, deduz-se que o raio de convergência da série (2) é $r=3$.

ii) Funções definidas por séries de potências são analíticas no interior da sua região de convergência. Consequentemente $f\in\mathcal{H}(D(0,3))$. Da fórmula integral de Cauchy conclui-se

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{f(\xi)}{(\xi-1)^2}\,d\xi=2\pi i f'(1)=\pi i\left(\frac{9-4\sqrt[3]{e}}{6}\right).$$

Porque $f\in\mathcal{H}(D(0,3))$ então f admite primitiva em $D(0,3)$. Se $F'(z)=f(z)\,,\ z\in D(0,3)$ conclui-se

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{\xi^2}f(\frac{1}{\xi})\,d\xi=-\int\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[F(\frac{1}{\xi})\right]\,d\xi=0\,.$$

■

12. Considere uma função $f\in\mathcal{H}(D(0,2))$ e demonstre as igualdades nas seguinte alíneas

i) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(w)}{(\overline{w}-z)^n}\,dw=0$, para quaisquer que sejam $n\in\mathbb{N},\ |z|<1$;

ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{1-\xi z}\,|d\xi|=f(0)$, para qualquer que seja $|z|<1$.

Sugestão: Tenha em consideração que ao que respeita à integração no circulo unitário é válido $|d\xi|=-i\overline{\xi}\,d\xi$.

Resolução: Sem dificuldades de maior obtém-se o seguinte

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{1-\xi z}\,|d\xi| &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(1-\xi z)\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}f(\xi)\left[\frac{z}{(1-\xi z)}+\frac{1}{\xi}\right]\,d\xi\\ &= \frac{z}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{(1-\xi z)}\,d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\,,\ \ |z|<1\,.\end{aligned}$$

O integral do lado esquerdo é nulo, porque a função integranda é holomorfa em $\mathbb{C}$, com exceção dum ponto singular situado no exterior do circulo unitário. O segundo integral calcula-se por intermédio da fórmula integral de Cauchy. ■

13. Justifique as seguintes asserções:

$$i)\quad \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{(1-wz)^{n+1}}{(w-z)^{n+1}}\,dw=(n+1)z^n(1-z^2)\quad (n\in\mathbb{N}\,,\ |z|<1);$$

$$ii)\quad \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{(1-\overline{w}z)^{n+1}}{(\overline{w}-z)^{n+1}}\,dw=(n+1)\frac{z^2-1}{z^{n+2}}\qquad (n\in\mathbb{N}\,,\ |z|>1).$$

14. (Desigualdades de *Cauchy*) Considere $U\subset\mathbb{C}$ aberto não vazio e uma função $f\in\mathcal{H}(U)$. Se $r>0$ é tal que $D(z,r)\subset U$ então defina $M(z,r):=\sup_{|w-z|=r}|f(w)|$. Considere as fórmulas integrais de Cauchy para demonstrar sucessivamente o seguinte:

i) Para qualquer natural n verifica-se a seguinte desigualdade de *Cauchy*

$$|f^{(n)}(z)|\le n!\frac{M(z,r)}{r^n}\quad \text{aonde } r>0 \text{ é tal que}\quad D(z,r)\subset U;$$

ii) Se $U=\mathbb{C}$ e $f^{(n)}(z)$ é função limitada, então f é um polinómio de ordem inferior ou igual a n.

1.9 Funções Harmónicas e Harmónicas Conjugadas

1. Determine as harmónicas conjugadas em $U \subset \mathbb{C}$, das funções $u(z)$, $z \in U$ $(z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R})$ indicadas nas seguintes alíneas

i) $u(x,y) := x^2 - y^2$, $U := \mathbb{C}$; ii) $u(x,y) := x(y+1)$, $U := \mathbb{C}$;

iii) $u(x,y) := x^2 - y^2 + xy$, $U := \mathbb{C}$; iv) $u(x,y) := 3x^2y - y^3$, $U := \mathbb{C}$;

v) $u(x,y) := \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $U := \mathbb{C}\backslash\{0\}$; vi) $u(x,y) := \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $U := \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

vii) $u(x,y) := \ln[(x^2+y^2)^2]$, $U := \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}_0^-\}$; viii) $u(x,y) := e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $U := \mathbb{C}$;

ix) $u(x,y) := \mathrm{Im}\,[z(z+\overline{z}^2+|z|^2)]$, $U := \mathbb{C}$; x) $u(x,y) := \mathrm{Re}\,[2e^z - e^{\overline{z}}]$, $U := \mathbb{C}$.

2. Considere $f(z) = u(z) + iv(z)$ $(z = x+iy;\ x, y \in \mathbb{R})$, aonde v é harmónica conjugada de u. Calcule os integrais de linha indicados nas seguintes alíneas

i) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\, dz$, $u(x,y) := y(x+1)$, $v(0) = 0$;

ii) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz$, $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$, $v(0) = 0$;

iii) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^3}\, dz$, $u(x,y) := y - y^2 + x^2$, $v(0) = 1$;

iv) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-i}\, dz$, $u(x,y) := e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$, $v(0) = 0$.

3. Considere os operadores de derivação em coordenadas polares, i.e.

$$\partial_{\overline{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \quad \text{e} \quad \partial_z = \frac{e^{-i\theta}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

e verifique que o operador Laplaciano $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, atuando em funções admitindo derivadas de segunda ordem contínuas, escreve-se em coordenadas polares da seguinte forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,.$$

4. Considere o exercício 3 para demonstrar que se $u(x,y)$ é harmónica em $\mathbb{C}$ então a seguinte função $v(x,y) = u(\xi(x,y), \eta(x,y))$ é harmónica em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, aonde $\xi = x/(x^2+y^2)$ e $\eta = y/(x^2+y^2)$.

5. Seja $U \subset \mathbb{C}$ aberto, conexo não vazio e $u : U \to \mathbb{R}$ uma função harmónica. Demostre as asserções

i) a função e^u é harmónica em U sse u é constante;

ii) se v é harmónica conjugada de u então as funções $e^u \cos v$ e $e^u \sin v$ são harmónicas em U.

6. Seja $U \subset \mathbb{C}$ aberto simplesmente conexo não vazio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função **harmónica** em U. Demonstre sucessivamente as seguintes asserções

i) Se f é harmónica em U e não se anula então f^2 é harmónica sse $1/f$ é harmónica.

ii) Se $f \in \mathcal{H}(U)$ e $|f|^2$ é harmónica então f é constante em U.

Resolução: Supondo que f é função harmónica sem zeros, então a alínea *i)* resulta das seguintes computações elementares

$$\partial_{\overline{z}}\,\partial_z \frac{1}{f} = -\,\partial_{\overline{z}} \frac{\partial_z f}{f^2} = \frac{\partial_z f\, \partial_{\overline{z}} f^2 - f^2\, \partial_{\overline{z}}\, \partial_z f}{f^4} = \frac{2f\, \partial_z f\, \partial_{\overline{z}} f - f^2\, \partial_{\overline{z}}\, \partial_z f}{f^4} = \frac{\partial_z\, \partial_{\overline{z}} f^2}{f^3}\,.$$

A alínea *ii)* resulta da seguinte observação $\partial_{\overline{z}}\,\partial_z |f|^2 = \partial_{\overline{z}}\,\partial_z f\overline{f} = f'\overline{f'} = |f'|^2$. ■

7. Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$.

i) A função $\overline{g}$ é $\mathbb{C}$-diferenciável no complexo z sse $\partial_z g(z) = 0$. Se $\overline{g}$ é $\mathbb{C}$-diferenciável em z então $\partial_{\overline{z}} g(z) = \overline{\overline{g}'}(z)$.

ii) Seja g uma função $\mathbb{C}$-diferenciável no complexo z. Suponha que $g \in C^2(D(z,r))$, para algum $r > 0$. Demonstre que $\partial_{\overline{z}}\,\partial_z |g|^2(z) = |g'|^2(z)$.

iii) Nas condições da alínea *ii)* verifica-se

$$4\,\partial_{\overline{z}}\,\partial_z |g| = \Delta |g| = 4|g'|^2(z) \quad \text{aonde} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

8. Seja Ω aberto conexo não vazio. Demonstre que se $u = f + \overline{g}$, aonde $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e u assume valores reais então a função $f - g$ é constante.

Resolução: Considere as seguintes computações

$$0 = \partial_{\overline{z}} f = \partial_{\overline{z}} u - \overline{g'} = \overline{\partial_z u} - \overline{g'} = \overline{f'} - \overline{g'}.$$

■

9. Considere Ω simplesmente conexo e u uma função harmónica em Ω (não necessariamente real). Demonstre que se o contradomínio de u inclui-se numa variedade uni-dimensional então u é constante.

Resolução: Sabe-se da existência de funções $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tais que $u = f + \overline{g}$. Para determinado real positivo ϵ e para cada qualquer real θ, os caminhos $[-\epsilon, \epsilon] \mapsto \varphi(t) = u(z + te^{i\theta})$ estão bem definidos. Suponha-se o contradomínio de u incluso na variedade uni-dimensional C. Então, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ os vetores

$$\varphi'(0) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(z) = e^{i\theta}\, \partial_z u(z) + e^{-i\theta}\, \partial_{\overline{z}} u(z) = f'(z)e^{i\theta} + \overline{g'(z)}e^{-i\theta} \quad \text{aonde} \quad \eta = e^{i\theta}$$

são vetores tangente a C, eventualmente nulos. Não obstante, a equação

$$\left| f'(z)e^{i\theta} + \overline{g'(z)}e^{-i\theta} \right| = \left| f'(z) + \overline{g'(z)}e^{-i2\theta} \right|, \ \theta \in \mathbb{R}$$

é a equação da circunferência centrada em $f'(z)$ e com raio $|g'(z)|$. Logo $f'(z) = g'(z) = 0$. ■

10. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto não vazio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Verifique as asserções seguintes:

i) Se $u := \operatorname{Re} f$ e Δ designa o operador Laplaciano $4\, \partial_z\, \partial_{\overline{z}}$ então

$$\Delta u^n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 1 \\ 2|f'|^2 & , \quad n = 2 \\ n(n-1)|f'|^2 u^{n-2} & , \quad n = 3, 4, \cdots \end{cases} ;$$

ii) Nas condições da alínea anterior verifica-se

$$\Delta |f|^n = \begin{cases} 4|f'|^2 & , \quad n = 2 \\ n^2|f'|^2|f|^{n-2} & , \quad n \in \mathbb{N}_1,\, n \neq 2 \end{cases} ;$$

iii) Se $V \subset \mathbb{C}$ é conjunto aberto, $f(U) \subset V$ e $g : V \to \mathbb{C}$ admite derivadas de segunda ordem então

$$\Delta(g \circ f)(z) = \Delta g(w)|f'(z)|^2 , \quad \text{aonde} \quad w = f(z).$$

iv) Se $V \subset \mathbb{C}$ é conjunto aberto não vazio e $g : V \to U$ admite derivadas de segunda ordem então

$$\Delta(f \circ g)(z) = \Delta g(z) f'(w) + 4f''(w)\, \partial_z g(z)\, \partial_{\overline{z}} g(z) , \quad \text{aonde} \quad w = g(z).$$

Resolução: Consideramos que $\Delta = 4\, \partial_{\overline{z}}\, \partial_z$. $i), ii)$ Para a alínea *i)* considere $u = (f + \overline{f})/2$. Para *ii)* tenha em consideração $|f|^n = f^{n/2}(\overline{f})^{n/2}$, para os ramos da potência bem desejados. ■

1.10 Série de Laurent e o Teorema dos Resíduos

1. Para as funções meromorfas indicadas nas seguintes alíneas, determine o desenvolvimento em série de Laurent, convergente em discos pontuados no ponto indicado e os respetivos resíduos

$$\text{i)}\ \frac{1}{1-z^2}\ ,\ z=1\ ;\quad \text{ii)}\ \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\ ,\ z=-1\ ;\quad \text{iii)}\ \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\ ,\ z=-1\ ;$$

$$\text{iv)}\ \frac{e^{1/z}}{z^2}\ ,\ z=0\ ;\quad \text{v)}\ \frac{e^{\pi z}(z+i)}{z-i}\ ,\ z=i\ ;\quad \text{vi)}\ \frac{\ln(z+1)}{z}\ ,\ z=0\ .$$

2. Para as funções indicadas nas seguintes alíneas, determine os desenvolvimento em série de Laurent, convergente nas coroas circulares respetivamente indicadas

$$\text{i)}\ \frac{1}{(z-1)(z-2)}\ ,\ 1<|z|<2\ ;\quad \text{ii)}\ \frac{1}{(z-1)(z-2)}\ ,\ |z|>2\ ;$$

$$\text{iii)}\ \frac{1}{(z-1)(z-2)}\ ,\ 0<|z-1|<1\ ;\quad \text{iv)}\ \frac{1}{(z-1)(z-2)}\ ,\ |z-1|>1\ ;$$

$$\text{v)}\ \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}\ ,\ 1<|z|<2\ ;\quad \text{vi)}\ \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}\ ,\ 0<|z-1|<\sqrt{5}\ ;$$

$$\text{vii)}\ \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}\ ,\ \sqrt{5}<|z+2i|<4\ ;\quad \text{viii)}\ \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}\ ,\ 0<|z-2i|<\sqrt{5}\ .$$

3. Calcule os integrais indicados em cada uma das alíneas abaixo

$$\text{i)}\ \int_{\gamma_r} \frac{z}{e^z-1}\,dz\ ,\ r=3\pi\ ;\quad \text{ii)}\ \int_{\gamma_r} \frac{z}{e^{1/z}}\,dz\ ,\ r=1\ ;$$

$$\text{iii)}\ \int_{\gamma_r} \frac{1+z^2}{\sin(i\pi z)}\,dz\ ,\ r=e\ ;\quad \text{iv)}\ \int_{\gamma_r} \sin\frac{1}{z}\,dz\ ,\ r=1\ ;$$

$$\text{v)}\ \int_{\gamma_r} \frac{\cos\frac{1}{z}}{z}\,dz\ ,\ r=1\ ;\quad \text{vi)}\ \int_{\gamma_r} (z^3+z^4)\sin\frac{1}{z}\ ,\ r=1\ ;$$

$$\text{vii)}\ \int_{\gamma_r} \frac{\cos(i\pi\overline{z})}{(z^2+1)}\,dz\ ,\ r=2\ ;\quad \text{viii)}\ \int_{\gamma_r} \frac{z}{1-z^n}\,dz\ \ (n\in\mathbb{N})\ ,\ r=2\ ;$$

aonde γ_r denota uma parametrização seccionalmente regular da circunferência centrada na origem, de raio $r>0$ e percorrida no sentido positivo.

4. Considere $n \in \mathbb{N}_1$ e funções $f_j \in \mathcal{H}(D(0,2)),\ j=0,\cdots,n-1$.

i) Calcule

$$\int_{|z|=1} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^j f_j(z)\,dz\,.$$

ii) Utilize a alínea *i*) para calcular

$$\int_{|z|=1} \frac{z^n - e^{nz}}{z^{n-1}(z - e^z)}\, dz\,.$$

Sugestão: Considere $f_j(z) = e^{jz}\,, z \in \mathbb{C}$ e verifique que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^j f_j(z) = \frac{z^n - e^{nz}}{z^{n-1}(z - e^z)}$, se $|z| = 1$.

5.

a) Classifique as singularidades da função meromorfa f indicada nas seguintes alíneas:

i) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$; ii) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$;

iii) $f(z) = \dfrac{\sin(i\pi z)}{(1+z^2)^2}$; iv) $f(z) = z^3 \sin\dfrac{1}{z^2}$;

v) $f(z) = \dfrac{1}{z^3}\sin z^2$; vi) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^n}$ $(n \in \mathbb{N}_1)$;

vii) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^n)^2}$ $(n \in \mathbb{N}_1)$; viii) $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{1-z^n}$ $(n \in \mathbb{N}_1)$.

b) Considere γ um qualquer caminho de Jordan seccionalmente regular, positivamente orientado e tal que $\operatorname{cl} D(0,1) \subset \operatorname{ins}\gamma$. Calcule o integral

$$\int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

6. Considere o circulo unitário percorrido no sentido positivo e calcule os integrais indicados nas alíneas abaixo

i) $\displaystyle\int_{|w|=1} \frac{e^{1/w}}{1+zw}\, dw$, $|z| \neq 1$; ii) $\displaystyle\int_{|w|=1} \frac{e^{1/w}}{1+z^2w^2}\, dw$, $|z| \neq 1$;

iii) $\displaystyle\int_{|w|=1} \frac{e^{1/w}}{w(1+z^2w^2)}\, dw$, $|z| \neq 1$; iv) $\displaystyle\int_{|w|=2} \frac{e^{1/w}}{(1-w)^2}\, dw$.

Resolução: *iv*) Os desenvolvimentos em série de *Laurent* podem ser obtidas considerando o seguinte

$$\frac{e^{1/w}}{(1-w)^2} = e^{1/w}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^{-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\sum_{k=0}^{\infty}w^k = \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(k+1)}{n!}w^{k-n}\,.$$

Na série dupla anterior as potências $1/w$ obtêm-se caso $n = k+1$. Logo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/w}}{(1-w)^2}\,;\,0\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e\,.$$

O valor do integral obtém-se dos seguintes cálculos

$$\int_{|w|=2}\frac{e^{1/w}}{(1-w)^2}\, dw = 2\pi e i + 2\pi i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}e^{1/w}\right]_{|w=1} = 0\,.$$

Poder-se-ia proceder com argumentos distintos. De facto, considerando que a função $w \to e^{1/w}/(1-w)^2$ é holomorfa e limitada num aberto que contém o exterior da curva $|w| = 2$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2} \frac{e^{1/w}}{(1-w)^2}\, dw = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{e^w}{(1-1/w)^2}\right]_{|w=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{w^2 e^w}{(w-1)^2}\right]_{|w=0} = 0.$$

■

7. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto não vazio e $w \in U$. Suponha que $f \in \mathcal{H}(U_w)$ e justifique que:

i) se existe $k \in \mathbb{N}_1$ tal que
$$\lim_{z\to w} (z-w)^k f(z) = 0\,,$$
então w é um pólo da função f de ordem **estritamente inferior** a k ou w é uma singularidade removível de f;

ii) se existe $k \in \mathbb{N}_1$ tal que
$$\lim_{z\to w} \frac{1}{(z-w)^k}\, f(z) = 0$$
então w é um zero da função f com multiplicidade **estritamente superior** a k.

8. Considere funções f e g analíticas em $w \in \mathbb{C}$. Mostre sucessivamente que:

i) se $f(w) \neq 0$ e w é um zero simples da função g então f/g tem um pólo simples em w e verifica-se
$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}; w\right) = \frac{f(w)}{g'(w)}\,;$$

ii) se f e g têm respetivamente zeros em w com multiplicidade k e $k+1$ então f/g tem um pólo simples em w e verifica-se
$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}; w\right) = (k+1)\frac{f^{(k)}(w)}{g^{(k+1)}(w)}\,.$$

Resolução: Suponha que os seguintes desenvolvimentos $f(z) = a_0 + a_1(z-w) + \cdots$, $a_0 \neq 0$ e $g(z) = b_1(z-w) + b_2(z-w)^2 + \cdots$, $b_1 \neq 0$ são válidos numa vizinhança do ponto w. Então, a alínea *i)* resulta de

$$\lim_{z\to w}(z-w)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to w}\frac{a_0 + a_1(z-w)+\cdots}{b_1 + b_2(z-w)+\cdots} = \frac{a_0}{b_1}\,.$$

A solução de *ii)* obtém-se de forma semelhante. ■

9. Considere funções f e g analíticas em $w \in \mathbb{C}$. Mostre sucessivamente que:

i) se f e g têm respetivamente um zero de ordem $k+j$ e de ordem k em w então f/g tem um zero de ordem j em w, aonde $k, j \in \mathbb{N}_1$;

ii) se g e f têm respetivamente um zero de ordem $k+j$ e de ordem k em w então f/g tem um pólo de ordem j em w, aonde $k, j \in \mathbb{N}_1$;

iii) se f e g têm zeros de ordem k em w então f/g têm uma singularidade removível em w, aonde $k \in \mathbb{N}_1$.

10. [*Exame 2008-07-26*] Considere a função meromorfa de variável complexa

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z} - 1}{z^2 - 3z + 2} .$$

i) Determine e classifique as singularidades da função f;

ii) Indique o interior da região de convergência da série de Laurent de f centrada no ponto $z = 2$;

iii) Identifique a função f com o seu prolongamento por holomorfia às eventuais singularidades removíveis e determine o domínio de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade da função $h(z) := \overline{z} f(z)$;

iv) Mostre que $\operatorname{Re} h'(z) = 0$, nos pontos z aonde h é $\mathbb{C}$-diferenciável;

v) Calcule os integrais

$$\int_{|z-2|=2} f(z)\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z-2|=1/2} f(z)\, dz , \tag{1}$$

aonde as curvas de *Jordan* nos integrais em (1) são percorridas no sentido positivo.

Resolução: 1. i) As singularidades de f são os zeros do polinómio $p(z) := z^2 - 3\,z + 2 = (z-2)(z-1)$. Como $e^{i\pi z} = 0$ sse $z = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ então $z = 1$ é pólo simples de f e $z = 2$ é singularidade removível.

1. ii) A singularidade $z = 2$ é removível. Logo a série de *Laurent* centrada em $z = 2$ é uma série de *Taylor* e o seu raio de convergência coincide com a distância do ponto $z = 2$ à singularidade mais próxima. Logo o interior da região de convergência é $D(2, 1)$.

1. iii) A função h é de classe C^∞ no seu domínio, i.e. $h \in C^\infty(\mathbb{C}\backslash\{1\})$. Logo h é $\mathbb{C}$-diferenciável em z sse verifica-se a equação de Cauchy-Riemann $\partial_{\overline{z}} h(z) = 0$, $z \neq 1$. Claramente

$$\partial_{\overline{z}} h(z) = f(z). \quad \text{Logo} \quad \partial_{\overline{z}} h(z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2k\,,\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

1. iv) Sabemos que se h é $\mathbb{C}$-diferenciável em z então $h'(z) = \partial_z h(z)$. Ademais

$$\partial_z h(z) = \overline{z} f'(z) = i\pi \frac{\overline{z} e^{i\pi z}}{z^2 - 3\,z + 2} + \overline{z}\Big(e^{i\pi z} - 1\Big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{z^2 - 3\,z + 2}\right]$$

Como $h'(z)$ está bem definido sse $z = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ e $e^{i2\pi k} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ então

$$h'(2k) = i\pi \frac{2k}{4k^2 - 6k + 2}\,,\; k \in \mathbb{Z} \quad \text{e logo} \quad \operatorname{Re} h'(2k) = 0\,,\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

1. v) Como $z = 2$ é singularidade removível de f então f é holomorfa num aberto que contêm o interior da curva $\{z : |z-2| = 1/2\}$. Logo

$$\int_{|z-2|=1/2} f(z)\, dz = 0\,.$$

A função f é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ e $1 \in \text{ins}\,\{z : |z-2| = 2\}$. Logo

$$\int\limits_{|z-2|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1) = 2\pi i \left[\frac{e^{i\pi z}-1}{z-2}\right]_{|z=1} = 4\pi i\,.$$

■

11. [*Exame 2008-07-26*] Considere a função g definida no seu domínio por intermédio da soma da seguinte série de potências

$$g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}\, z^n\,. \tag{2}$$

i) Determine o domínio de g, i.e. a região de convergência da série de potências em (2) ;

ii) Aplique a definição de integral de linha e verifique a seguinte igualdade

$$\int_{|z|=1} g\left(\frac{1}{z}\right)\, dz = \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^2}\, dz\,;$$

iii) Justifique que g é holomorfa num conjunto aberto que contém $D(0,1) \cup \partial D(0,1)$ e calcule

$$\int\limits_{|z|=1} g\left(\frac{1}{z}\right)\, dz\,.$$

Resolução: 1. i) Defina-se $a_n := \sqrt{n}/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tendo em linha de conta que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 2\,,$$

deduz-se que a série de potências tem raio de convergência $r = 2$. Se $|z| = 2$ então

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\sqrt{n}}{2^n} z^n\right| = +\infty \quad \text{e logo} \quad \sum_n \frac{\sqrt{n}}{2^n} z^n \quad \text{diverge}\,.$$

Logo o domínio de g é $D(0,2)$.

1. ii) Tendo em consideração que $[-\pi,\pi] \ni \theta \to e^{-i\theta}$ é um caminho de Jordan que parametriza o circulo unitário no sentido negativo, obtemos que

$$\int\limits_{|z|=1} g(\frac{1}{z})\, dz = i\int_{-\pi}^{\pi} g\left(e^{-i\theta}\right) e^{i\theta}\, dz = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g\left(e^{-i\theta}\right)}{e^{-2i\theta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[e^{-i\theta}\right]\, dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^2}\, dz\,.$$

1. iii) A função g coincide com a soma duma série de potências convergente em $D(0,2)$. Em consequência $g \in \mathcal{H}(D(0,2))$. De acordo com fórmulas integrais de Cauchy e série de Taylor obtemos

$$\int\limits_{|z|=1} g(\frac{1}{z})\, dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i g'(0) = i\pi\,.$$

■

12. [*Exame 2010-04-24*] Considere a função de variável complexa $f(z) = 1/\cos(1/z)$. Determine e classifique as singularidades de f. A função f é meromorfa i.e. as singularidades de f são isoladas? Justifique e calcule

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz.$$

13. [*Exame 2010-06-21*] Considere a variável complexa z e as seguintes funções complexas

$$f(z) := z\sin\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right] \quad \text{e} \quad g(z) := \frac{1}{(z-2)^2}\sin(z).$$

1. Determine e classifique as singularidades das funções f e g;
2. Calcule os seguintes integrais

$$\oint_{|z-2|=1} f(z) + g(z)\,dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z-4|=1} f(z)g(z)\,dz,$$

onde as curvas são percorridas uma vez no sentido positivo.

Resolução: (a) É evidente que as funções f e g são singulares em z sse $z = 2$.

É fácil determinar o desenvolvimento da função f em série de Laurent em torno de $z = 2$. De facto,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-2)\sin\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right] + 2\sin\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right] \\ &= (z-2)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{(z-2)^{4k+2}} + 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{(z-2)^{4k+2}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{(z-2)^{4k+1}} + 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(4k+2)!}\frac{1}{(z-2)^{4k+2}},\ z \neq 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Considerando que no desenvolvimento acima, incluem-se uma infinidade de potências inteiras negativas de $(z-2)$, então deduz-se que $z = 2$ é uma singularidade essencial de f.

A função g é o cociente de funções inteiras. Em rigor

$$g(z) = \frac{h(z)}{p(z)}, \quad \text{aonde} \quad h(z) = \sin z \quad \text{e} \quad p(z) = (z-2)^2.$$

Em $z = 2$, a função $h(z)$ não se anula e $p(z)$ anula-se com multiplicidade 2. Logo, $z = 2$ é pólo de ordem 2 de $g(z)$.

(b) Por C designa-se o circulo $|z-2| = 1$, percorrido uma vez no sentido positivo. De (3) deduz-se sem dificuldades que $\mathrm{Res}(f\,;2) = 1$. Segue que

$$\int_C f(z) + g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C \frac{\sin(z)}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f\,;2) + \sin'(2)\right) = 2\pi i\,(1 + \cos(2)).$$

A função fg é singular sse $z = 2$. Tendo em linha de conta que a singularidade $z = 2$, encontra-se no exterior do circulo $|z-4| = 1$, conclui-se que

$$\int_{|z-4|=1} f(z)g(z)\,dz = 0.$$

■

14. [*Exame 2010-07-07*] Considere as funções de variável complexa indicadas de seguida

$$f(z) := \frac{e^{2z} - 2z}{z} \quad , \quad g(z) := \frac{2}{z} \quad e \quad h(z) := (f \circ g)(z) := f(g(z)).$$

i) Determine e classifique as singularidades das funções f, g e h;

ii) Calcule os resíduos das funções f, g e h, em quaisquer das suas respetivas singularidades isoladas;

ii) Calcule os seguintes integrais

$$\int_{|z|=1} f(z)g(z)\, dz \quad e \quad \int_{|z|=2} h(z)\, dz,$$

aonde as curvas são percorridas uma vez no sentido positivo.

Resolução: *i)* As funções f, g e h têm singularidades na origem. As funções f e g são o cociente de funções inteiras, aonde o numerador não se anula na origem e o denominador anula-se com ordem um. Logo, f e g têm pólos simples na origem. Com respeito à função h, observe o seguinte

$$h(z) = \frac{ze^{4/z} - 4}{2} \quad \text{logo} \quad h(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{1}{z^{n-1}} - 2 = \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \frac{1}{z^n}\ , \ z \neq 0. \tag{4}$$

Considerando que o desenvolvimento em série de Laurent no disco perfurado na origem, inclui uma infinidade de potências inteiras negativas, deduz-se que $z = 0$ é uma singularidade essencial de $h(z)$. *ii)* Os resíduos das funções f e g são os seguintes

$$\mathrm{Res}(f\,;\,0) = \left(\frac{e^{2z} - z}{z'}\right)_{|z=0} = 1 \quad , \quad \mathrm{Res}(g\,;\,0) = 2.$$

Do desenvolvimento em série de Laurent em discos perfurado na origem (4), obtém-se

$$\mathrm{Res}(h\,;\,0) = 2 \times 4^n_{|n=1} = 8.$$

iii) Das alíneas anteriores, segue de imediato o seguinte

$$\int_{|z|=1} h(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(h\,;\,0) = 16\pi i.$$

Considere as fórmulas integrais de Cauchy para terminar da seguinte forma

$$\int_{|z|=2} f(z)g(z)\, dz = \frac{2e^{2z} - 4z}{z^2}\, dz = 2\pi i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}(2e^{2z} - 4z)_{|z=0} = 0.$$

■

15. [*Exame 2010-06-21*] Para cada natural positivo $n = 1, 2, \cdots$ considere a seguinte função racional

$$F_n(z) = \frac{z^n + 1}{z^n - 1}.$$

i) Mostre que o seguinte limite existe e é finito

$$l_n := \lim_{r\to+\infty} \int_{|z|=r} F_n(z)\, dz.$$

ii) Mostre que se $n = 2, 3, \cdots$ então $l_n = 0$. Calcule l_1.

Sugestão: Considere a seguinte evidente igualdade

$$F_n(z) = 1 + \frac{2}{z^n - 1},\ n = 1, 2, \cdots .$$

Resolução: *i)* Para cada natural $n = 1, 2, \cdots$, considere a seguinte definição

$$I_n(r) := \int_{|z|=r} F_n(z)\, dz.$$

As singularidades da função F_n são as soluções da equação $z^n = 1$, i.e. são as raízes de ordem n da unidade. Assim, para $r > 1$ a função $I(r)$ é constante, mais precisamente

$$I_n(r) = 2\pi i \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Res}(F_n\, ;\, e^{ij2\pi/n})\,,\ r > 1.$$

Logo, o limite $\lim_{r\to+\infty} I_n(r)$ existe é finito e verifica

$$\lim_{r\to+\infty} I_n(r) = 2\pi i \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Res}(F_n\, ;\, e^{ij2\pi/n}) = l_n\,,\ n = 1, 2, \cdots .$$

ii) Considerando a sugestão, obtém-se o seguinte

$$0 \le |\int_{|z|=r} F_n(z)\, dz| = |\int_{|z|=r} \frac{2}{z^n - 1}\, dz| \le \int_{|z|=r} \frac{2}{|z|^n - 1}|dz| = 4\pi \frac{r}{r^n - 1}.$$

Logo, se $n = 2, \cdots$ então $l_n = 0$. Se $n = 1$, então da fórmula integral de Cauchy resulta o seguinte

$$l_1 = \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z-1}\, dz = 4\pi i.$$

■

Mostre que se g é analítica em $z = 0$ então $g(1/z)$ tem singularidade essencial em $z = 0$. Mostre que se $g(z)$ tem pólo de ordem finita em $z = 0$ ou singularidade removível e h singularidade essencial em $z = 0$ então gh tem singularidade essencial em $z = 0$.

ii) Sem dificuldades, conclui-se

$$g(z) = \frac{z^2}{1 + 9z^2}(e^{i/z} - 1).$$

O aluno interessado deduz-se que a função $h(z) := e^{i/z} - 1$ têm singularidade essencial em $z = 0$. A função $g(z)$ é analítica em $z = 0$ e $g(0) \neq 0$. Logo, a função $f(z) = g(z)h(z)$ tem singularidade essencial na origem. Pode, sem dificuldades, justificar a asserção anterior, considerando que

$$z = 0 \quad \text{é singularidade essencial de } f \text{ sse} \quad \lim_{z\to 0} f(z) \quad \text{não existe em } \dot{\mathbb{C}}.$$

Para determinar o resíduo, considere as seguintes computações

$$\textbf{Resolucão}\ :g0 = \int_{|z|=1} f(1/z)\, dz =$$

1.11 Integrais Impróprios e Integrais de Funções nas Variáveis Trigonométricas

1.

a) Calcule os seguintes integrais impróprios de Riemann:

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4i}\,dx$; ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,dx$; iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+16}\,dx$;

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$; v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$; vi) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(1+x^2)}\,dx$;

vii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{x^2+1}\,dx$; viii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n\,\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_1 .$$

Resolução: Considerando o Lema de Jordan deduz-se sem dificuldades que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}e^{ix}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{1+z^2}e^{iz}\,;\,i\right) = \frac{i\pi}{e} .$$

Logo, da igualdade

$$\frac{x}{1+x^2}\sin x = \mathrm{Im}\left[\frac{x}{1+x^2}e^{ix}\right] ,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{obtém-se} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\sin x\,dx = \mathrm{Im}\left[\frac{i\pi}{e}\right] = \frac{\pi}{e} .$$

Porque a função $\mathbb{R}\ni x \to x\sin x/(1+x^2)$ é par então

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2e} .$$

■

2. Aplique uma mudança de variável adequada para verificar que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad .$$

3.

a) Aplique o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais:

i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx$; ii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$;

iii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2+\cos x}\,dx$; iv) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{-ix}z}{1-e^{-ix}z}\,dx,\ \ |z|<1$;

v) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{-ix}z}{(1-e^{-ix}z)^2}\,dx,\ \ |z|<1$; vi) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}$.

b) Mostre que

i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\alpha+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha > 1$; ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \frac{1+e^{-ix}z}{\left(1-e^{-ix}z\right)^{n+1}}\,dx = 2\pi$, $|z|<1$, $n \in \mathbb{N}_1$.

4.[*Exame 2008-01-17*] Considere a função de variável complexa f, definida no seu domínio por intermédio

$$f(z) = \frac{1-z^2}{\sin(\pi z)} \ .$$

i) Indique e classifique as singularidades da função f .

ii) Calcule os integrais

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(2e^{ix})}\,dx \ ,$$

aonde a curva $\{z : |z| = 3/2\}$ é percorrida no sentido positivo por um caminho de *Jordan* regular.

iii) Indique o interior da região de convergência da série de Laurent que representa a função f num disco pontuado $D(0,\epsilon)\setminus\{0\}$, $\epsilon > 0$.

Resolução: i) Considerem-se as funções $g(z) = 1-z^2$ e $h(z) = \sin(\pi z)$. Então $f(z) = g(z)/h(z)$ e o conjunto das singularidades de f é dado por

$$\{z \in \mathbb{C} : h(z) = 0\} = \mathbb{Z} \ .$$

É evidente que $h'(z) = \pi\cos(\pi z)$. Como $h'(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ então $z = k$, $k \in \mathbb{Z}$ é pólo simples ou singularidade removível respectivamente se $g(k) \neq 0$ ou $g(k) = 0$. Logo $k = \pm 1$ são singularidades removíveis e $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq \pm 1$ são pólos simples de $f(z)$.

ii) A função f é meromorfa e o conjunto das singularidades no interior da curva de Jordan $\{z : |z| = 3/2\}$ é dado por $\{\pm 1, 0\}$. Como as singularidades $z = \pm 1$ são removíveis, então

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f;0) \ .$$

Tendo em linha de conta que $z = 0$ é um pólo simples, obtemos

$$\mathrm{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0} \frac{z\left(1-z^2\right)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi} \quad \text{e logo} \quad \int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz = 2i \ .$$

Para o segundo integral anotamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(2e^{ix})}\,dx = \frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2e^{ix} f(2e^{ix})} \frac{d}{dx}\left[2e^{ix}\right]\,dx = \frac{1}{i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z f(z)}\,dz \ .$$

A função $\varphi(z) = 1/f(z)$ têm eventuais singularidades não removíveis nos pontos $z = \pm 1$. Como $z = \pm 1$ são zeros de ordem 1 das funções g e h então $z = \pm 1$ são singularidades removíveis da função φ. Logo, das fórmulas integrais de Cauchy obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(2e^{ix})}\,dx = \frac{1}{i}\int_{|z|=2} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = 2\pi\varphi(0) = 0 \ .$$

iii) Tendo em consideração que $z = 0$ é singularidade não removível, deduz-se que o interior da região de convergência da série de Laurent é $D(0,r)\setminus\{0\}$, aonde $r > 0$ é a distância do ponto $z = 0$ ao conjunto das singularidades não removíveis de f. Como $z = \pm 1$ são singularidade não removíveis então é óbvio que $r = 2$.

∎

1.12 A Transformada de Laplace.

1. Seja $g \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$, $\alpha > 0$ e considere a função $f(t) = \int_0^t g(x)\, dx$. Verifique as seguintes asserções

$$f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[f](z) = \frac{\mathcal{L}[g](z)}{z}, \ \operatorname{Re} z > \alpha .$$

2. Seja $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ e considere a função $f(t) = g(t)/t$, $t > 0$.

i) Suponha que $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ e justifique que $g \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$ tanto

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f](z) = -\mathcal{L}[g](z), \ \operatorname{Re} z > \alpha .$$

ii) Justifique que se $h \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$, $\alpha > 0$ então

$$\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}[h](x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

iii) Considere as alíneas anteriores para determinar as transformadas de Laplace das seguintes funções

$$\frac{\sin t}{t} \quad \text{e} \quad \frac{e^t - 1}{t} \quad (t \geq 0).$$

3. Suponha que $y(t) \in C^n([0, +\infty[)$ e $y^{(n)}(t) \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$. Verifique por indução matemática que

$$\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right](z) = z^n \mathcal{L}[y](z) - z^{n-1} y(0) - z^{n-2} y'(0) - \cdots - y^{n-1}(0).$$

4. Considere $f \in \mathcal{E}(\alpha; \mathbb{R}^+)$, $\alpha > 0$ e demonstre que:

i) $\mathcal{L}\left[\overline{f}\right](z) = \overline{\mathcal{L}[f]}(\overline{z})$, $\operatorname{Re} z > \alpha$;

ii) $\mathcal{L}[\operatorname{Re} f] = \operatorname{Re} \mathcal{L}[f]$ ou $\mathcal{L}[\operatorname{Im} f] = \operatorname{Im} \mathcal{L}[f]$ sse $\mathcal{L}[f] = 0$.

Resolução: Para a alínea *i)* justifique as computações

$$\overline{\mathcal{L}[f](z)} = \overline{\int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt} = \int_0^\infty \overline{f}(t) e^{-\overline{z}t}\, dt = \mathcal{L}\left[\overline{f}\right](\overline{z}).$$

Para a alínea *ii)* suponha que $\mathcal{L}[\operatorname{Re} f] = \operatorname{Re} \mathcal{L}[f]$. Então da alínea anterior deduz-se $\mathcal{L}[f](\overline{z}) = \mathcal{L}[f](z)$. Assim $\partial_{\overline{z}} \mathcal{L}[f] = \partial_z \mathcal{L}[f] = 0$ e logo $\partial_{\overline{z}} \mathcal{L}[f]$ é constante. Necessariamente $\mathcal{L}[f] = 0$. ∎

5. Verifique que se $p(t)$ é um polinómio então $\mathcal{L}[p]$ é uma função racional.

6. Calcule as transformadas de *Laplace* das seguintes funções:

i) $\cosh t$; ii) $\sinh(2t)$; iii) $t \sin t$; iv) $t\cosh(2t)$;

v) $e^t \cos t$; vi) $\cos^2 t$; vii) $t^2 \cos^2 t$; viii) $t^2 + 1$.

7. Calcule as transformadas de *Laplace* das seguintes funções:

i) $\begin{cases} \sin t & , \quad t \geq \pi \\ 0 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}$; ii) $\begin{cases} \sin(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 & , \quad \pi/2 < t < +\infty \end{cases}$;

iii) $\begin{cases} t \sin t & , \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t & , \quad \pi < t < +\infty \end{cases}$; iv) $\begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ t & , \quad 1 < t \leq 2 \\ 2 & , \quad 2 < t < +\infty \end{cases}$.

8. Determine funções de variável real f tais que $\mathcal{L}[f] = F$, aonde $F(z)$ são as funções meromorfas indicadas em cada uma das seguintes alíneas:

i) $\dfrac{1}{z^2+4}$; ii) $\dfrac{z-1}{z^2-4z+6}$; iii) $\dfrac{1}{(z-1)^4}$; iv) $\dfrac{z}{(z-1)^4}$;

v) $\dfrac{1}{(z^2-1)}$; vi) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$; vii) $\dfrac{z}{(z^2+4)^2}$; viii) $\dfrac{1}{z(z^2+4)}$;

ix) $\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$; x) $\dfrac{1}{1+z+z^2+z^3}$; xi) $\dfrac{e^{-z}}{z^2+4}$; xii) $\dfrac{e^{-2z}}{z^2-5z+6}$;

xiii) $\dfrac{e^{-z}+e^{-2z}}{z-1}$.

9. Considere a derivada da transformada de *Laplace*, para determinar as transformadas de Laplace inversas das seguintes funções

$$f_1(t) := \ln(t+1) \quad \text{e} \quad f_2(t) := \arctan t \quad (t \geq 0).$$

10. Encontre funções regulares de variável real $y(t)$ que verificam as seguintes condições:

i) $y'(t) - y(t) = \sin t$; $y(0) = 0$;

ii) $y''(t) - y(t) = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

iii) $y''(t) - y(t) = \sin t$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

iv) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{2t} - 1$; $y(0) = 1 = y'(0)$;

v) $y'''(t) - y(t) = e^t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

11. Encontre funções regulares de variável real $y(t)$ que verificam as seguintes condições:

i) $y'(t) + y(t) = (t-1)H_1(t)$; $y(0) = 0$;

ii) $y''(t) - y(t) = tH_1(t)$; $y(0) = 0 = y'(0)$;

iii) $y''(t) + y(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t & , \quad \pi < t < \infty \end{cases}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

iv) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ t & , \quad 1 < t < 2 \\ 0 & , \quad 2 \leq t < \infty \end{cases}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2 Equações diferenciais ordinárias

2.1 Equações escalares lineares, separáveis e exatas

1. Determine soluções das equações diferenciais indicadas nas seguintes alíneas:

i)	$\dot{x}= x+1$;	ii)	$\dot{x}= t-2tx$;
iii)	$\dot{x}= x+t$;	iv)	$\dot{x}= \dfrac{2}{t}\,x-1$;
v)	$\dot{x}= x\,\dfrac{1}{t\ln t}+\dfrac{\ln t}{t}$;	vi)	$\dot{x}\,\ln t-\dfrac{x}{t}=\dfrac{1}{t}$;
vii)	$\dot{x}= x+e^t$;	viii)	$t\,\dot{x}= te^{t^2}-x$;
ix)	$t\,\dot{x}= e^t-x$;	x)	$(1-t^2)\,\dot{x}= x+t-t^3$;
xi)	$(t-1)^2\,\dot{x}= (2t-3)\,x+(t-1)^2$;	xii)	$(t^2+1)\,\dot{x}= t\,x+t^3+t$;
xiii)	$\dot{x}= x\tan t+\sin t$;	xiv)	$\dot{x}= x\sin(2t)+\sin t\cos t$;
xv)	$\dot{x}\,\tan t=1-x$;	xvi)	$\dot{x}= \dfrac{5x}{2t}+\sqrt{t}$;
xvii)	$\dot{x}= \dfrac{x}{2t}+\sin\sqrt{t}$;	xviii)	$\dot{x}= \dfrac{x}{\sqrt{t}}+1$;
xix)	$\dot{x}= 3t^5-3t^2x$;	xx)	$\dot{x}= e^{-t^2}-2t^3e^{t^2}x$;
xxi)	$2t\,\dot{x}= 2\ln t-x$.		

2. Suponha que a função $x(t)=e^{2t}$ é solução da equação diferencial linear escalar com coeficientes $a(t)$ e $b(t)$, dada por

$$\dot{x}= a(t)x+b(t)\,,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Sabendo que $a(t)=2-t$ determine $b(t)$ e a solução de (1) que verifica a condição inicial $x(0)=2$;

ii) Sabendo que $b(t)=-te^{2t}$ determine $a(t)$ e a solução de (1) que verifica a condição inicial $x(0)=2$.

3. Aplique a mudança de variável indicada para encontrar soluções dos seguintes **PVI**'s:

i) $\cos(y)\,\dot{y}= (\sin y+1)\sin t,\quad y(0)=0\qquad (x=\sin y)$;

ii) $\dot{y}= 2-3e^{t+y},\quad y(0)=-\ln 2\qquad (x=e^{-y})$;

iii) $2y\,\dot{y}= e^{-t^2-y^2}-2t,\quad y(0)=1\qquad (x=e^{y^2})$;

iv) $t\,\dot{x}= tx^3-2x,\quad x(1)=\sqrt{2}/2\qquad (y=x^{-2})$.

4. Seja I um intervalo não degenerado de números reais e $a : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Aplique a das constantes para deduzir que as soluções das seguintes quatro equações diferenciais

$$\dot{x} = \pm a(t)x \pm a(t) \quad \text{e} \quad \dot{x} = \pm a(t)x \mp a(t)$$

são respectivamente dadas por

$$x(t) = C \exp\left(\pm \int a(t)\, dt\right) - 1 \quad \text{e por} \quad x(t) = C \exp\left(\pm \int a(t)\, dt\right) + 1,$$

aonde C designa uma qualquer constante real.

5. Suponha que $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ é a função temperatura dum objecto sujeito à temperatura ambiente $k(t)$ e nas condições da *Lei de Arrefecimento de Newton*, i.e.

$$\dot{x} = c(k(t) - x),$$

aonde c é uma constante real. Mostre que se existe o limite da temperatura ambiente em $+\infty$ i.e. se

$$\lim_{t\to+\infty} k(t) = k\,, \qquad \text{para alguma constante real } k,$$

então necessariamente verifica-se que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = k.$$

6.*[Tempo do óbito]* Suponha que $x(t)$ é a função temperatura dum corpo sujeito a ambiente de ar condicionado à temperatura constante k e, nos instantes seguintes a $t = 0$, sujeito às condições da *Lei de Arrefecimento de Newton*. São conhecidas as temperaturas do corpo nos instante t_1 e t_2, aonde $0 < t_1 < t_2$. Mostre que

$$c = \ln\left(\frac{x(t_1) - k}{x(t_2) - k}\right)/(t_2 - t_1) \quad \text{e} \quad t_1 = (t_2 - t_1)\ln\left(\frac{x(0) - k}{x(t_1) - k}\right)/\ln\left(\frac{x(t_1) - k}{x(t_2) - k}\right).$$

7. Mostre que existem únicas funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que respectivamente verificam:

$$\begin{array}{ll} i) & f(x) = x \displaystyle\int_0^x f(s)\, ds \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \\ ii) & f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xs)\, ds \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \end{array}.$$

8. Fixe um intervalo I não degenerado e funções a e b, contínuas em I. Considere a equação diferencial

$$a(t)\,\dot{x} + b(t)x = 0\,. \tag{2}$$

i) Demonstre que o conjunto das soluções de (2) é um subespaço vectorial de $C^1(I)$, i.e. se x_j, $j = 1, 2$ são soluções de (2) então $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ é também solução de (2), aonde $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$;

ii) Verifique que o seguinte problema de valores iniciais admite uma infinidade de soluções

$$t\,\dot{x} - x = 0 \quad , \quad x(0) = 0\,.$$

9. Determine a solução dos seguintes **PVI**'s e indique o seu «intervalo máximo» de definição:

i) $\dot{x}\tan t = x \;,\; x(\pi/4) = 1\;;$ ii) $\dot{x}\,x = e^t\big(1 - \dot{x}\,x\big) \;,\; x(0) = 1\;;$

iii) $\dot{x} = x\ln x \;,\; x(0) = e\;;$ iv) $tx\,\dot{x} = 1 - t^2 \;,\; x(1) = 2\;;$

v) $x - t\,\dot{x} = 1 + t^2\,\dot{x} \;,\; x(1) = 1/2\;;$ vi) $x\,\dot{x} + t^2 x\,\dot{x} = 2t \;,\; x(0) = 1\;.$

10. Aplique a mudança de variável indicada para encontrar soluções das equações diferenciais:

i) $\dot{x} = (x+t)^2 \quad (y = x+t)\;;$ ii) $\dot{x} = 4x^2 + 4xt + t^2 \quad (y = 2x+t)\;;$

iii) $\dot{x} = \dfrac{x+t}{x-t} \quad (yt = x)\;;$ iv) $\dot{x} = -\dfrac{2}{t}\,x + x^3 \quad (y = x^{-2})\;;$

v) $t^2\,\dot{x} = (t+x)^2 \quad (ty = x)\;.$

11. Justifique que os problemas de valores iniciais descritos nas seguintes alíneas têm solução única. Se possível determine a solução explicita e indique os intervalos máximos de definição:

i) $e^t x^2 - e^{-t}x + (2e^t x + e^{-t})\,\dot{x} = 0 \;,\; x(0) = 1\;;$

ii) $e^t x + e^{2t}\big(x^2 - 1\big) + \big(e^{2t}x + e^t\big)\,\dot{x} = 0 \;,\; x(\ln\sqrt{2}) = 0\;;$

iii) $2te^x + \big(t^2 e^x + e^{-x}\big)\,\dot{x} = 0 \;,\; x(0) = 0\;;$

iv) $2t + x + (t + 3x)\,\dot{x} = 0 \;,\; x(1) = 0\;;$

v) $3t^2 + x^2 + 2tx\,\dot{x} = 0 \;,\; x(1) = 1\;;$

vi) $\cos x\cosh t - \sin x\sinh t\,\dot{x} = 0 \;,\; x(1) = \pi/2\;;$

vii) $\ln\big(t^2 + x^2\big) + 2\arctan(t/x)\,\dot{x} = 0 \;,\; x(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2\;.$

12. Determine os factores integrantes $\mu(t,x)$ das seguintes equações diferenciais e encontre soluções:

i) $(2 + 3tx)x + (1 + 2tx)t\,\dot{x} = 0 \;,\; \mu \equiv \mu(t)\;;$

ii) $2t + \big(t^2 + e^{-2x}\big)\,\dot{x} = 0 \;,\; \mu \equiv \mu(t)\;;$

iii) $2tx + x\ln x + t\,\dot{x} = 0 \;,\; \mu \equiv \mu(x)\;;$

iv) $x - t\,x^2\ln t + t\,\dot{x} = 0 \;,\; \mu \equiv \mu(tx)\;.$

13. Considere a seguinte equação diferencial escalar

$$(x + x^3 + 3xt^2) + (2t + 4x^2t + 2t^3)\,\dot{x} = 0.$$

Determine um factor integrante $\mu(x)$, a solução explícita do problema de valores iniciais $x(1) = 0$ e o seu intervalo máximo de definição.

Resolução: *[Teste A]* Definem-se as seguintes funções

$$\begin{aligned} M(t,x) &:= x + x^3 + 3xt^2, \\ N(t,x) &:= 2t + 4x^2t + 2t^3. \end{aligned}$$

A função $\mu(x)$ é factor integrante sse é válida a seguinte asserção

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)/M \quad \text{é função de } x.$$

As seguintes computações são imediatas

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)/M = \frac{(2 + 4x^2 + 6t^2) - (1 + 3x^2 + 3t^2)}{x(1 + x^2 + 3t^2)} = \frac{1}{x},$$

de onde segue que

$$\mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x).$$

A função $\mu(x) = x$ é factor integrante. Um potencial $\varphi(t,x)$ verifica o seguinte

$$\begin{aligned} \varphi(t,x) &= \int x^2 + x^4 + 3x^2t^2\, dt = (x^2 + x^4)t + x^2t^3 + \psi(x), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) &= (2x + 4x^3)t + 2xt^3 + \psi'(x) = 2tx + 4x^3t + 2t^3x. \end{aligned}$$

Concluí-se $\psi(x) = C^{te}$ tanto que um potencial é dado por

$$\varphi(t,x) = \int x^2 + x^4 + 3x^2t^2\, dt = (x^2 + x^4)t + x^2t^3.$$

Um solução implicíta do **PVI** indicado, é dada por

$$(x^2 + x^4)t + x^2t^3 = 1.$$

■

14. Determine os factores integrantes $\mu(t,x)$ das seguintes equações diferenciais:

$$\text{i)} \qquad \cos(t^2 - x^2) - \sin\left(t^2 - x^2\right)\dot{x} = 0 \ , \ \ \mu \equiv \mu(tx) \ ;$$

$$\text{ii)} \qquad \cos(2tx) + \sin(2tx)\,\dot{x} = 0 \ , \ \ \mu \equiv \mu(x^2 - t^2) \ .$$

15. Considere os seguintes **PVI**'s

$$M(t,x) + N(t,x)\,\dot{x} = 0, \tag{3}$$

$$N(x,t) + M(x,t)\,\dot{x} = 0. \tag{4}$$

i) Verifique que (3) é exata sse (4) é exacta;

ii) A função $\mu(t,x)$ é factor integrante de (3) sse $\mu(x,t)$ é factor integrante de (4);

iii) A função $\varphi(t,x)$ é potencial de (3) sse $\varphi(x,t)$ é potencial de (4).

2.2 Teorema de Picard-Lindelöf

1. Seja I um intervalo não degenerado. Suponha $g \in C(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$. Considere o **PVI**

$$\dot{x} = g(x) \quad , \quad x(0) = 0 \, . \tag{1}$$

i) Verifique que a função identicamente nula é solução do problema (1).

ii) Demonstre que se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução do problema de valores iniciais (1) então a função

$$x_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x_\tau(t) = \begin{cases} x(t-\tau) & , t \geq \tau \\ 0 & , t < \tau \end{cases} \qquad \text{aonde} \quad \tau > 0$$

também é solução de (1).

iii) Se $g(x) = x^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$ então o problema de valores iniciais (1) admite infinitas soluções.

2.

a) Verifique se no domínio indicado, as seguintes funções $f(t,x)$ são Lipschitzianas na variável x:

i) $f(t,x) = \|x\|$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$;

ii) $f(t,x) = t\|x\|$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$;

iii) $f(t,x) = \dfrac{1}{1+t^2}\|x\|$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$;

iv) $f(t,x) = \sqrt{|x|}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \,]-1,1[$;

v) $f(t,x_1,x_2) = (x_1^2 \cos t \, , \, t + x_1 x_2^2)$, $t \in \mathbb{R}$, $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$;

vi) $f(t,x_1,x_2) = (\cos(tx_1) \, , \, \sin(e^{-t^2}x_2))$, $t \in \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Considere as funções $f(t,x)$ definidas em cada uma das alíneas anteriores. Indique o conjunto de valores iniciais (t_0,x_0) no domínio de $f(t,x)$ e para os quais o teorema de *Picard-Lindelöf* assegure a existência e unicidade de solução do seguinte problema de valores iniciais

$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \, .$$

3. Mostre que $\mathbb{R}$ é o intervalo máximo de definição da solução do problema de valores iniciais

$$\dot{x} = xe^{-1/\left[1+(x+t)^2\right]} \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \, , \;\; (t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2 \, .$$

4. Considere o problema de valores iniciais

$$\dot{x} = \frac{e^{-|t|}}{1+(x+t)^2} \quad ; \quad x(0) = 0 \, . \tag{2}$$

i) Verifique que o intervalo máximo de definição da solução de (2) é $\mathbb{R}$;

ii) Mostre que se $x(t)\,,\, t\in\mathbb{R}$ é a solução de (2) então $x(t)\leq 1\,,\, t\geq 0\,.$

5. Considere $x(t)$ e $y(t)$ respetivamente as soluções dos problemas dos seguintes **PVI**'s o

$$\dot{x}= x\cos(x+t)\ ;\ \ x(0)=1 \quad \text{e} \quad \dot{y}= 3t^2\cos(t+y^2)\ ;\ \ y(0)=0. \tag{3}$$

i) Verifique que as funções $x(t)$ e $y(t)$, estão definidas em $\mathbb{R}$;

ii) Verifique as seguintes desigualdades

$$e^{-|t|}\leq x(t)\leq e^{|t|}\ ,\ \ t\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad -t^3\leq y(t)\leq t^3\ ,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

6. Considere a seguinte equação diferencial escalar

$$(2x+4t^2x+2x^3)+(t+t^3+3tx^2)\,\dot{x}= 0.$$

Determine um factor integrante $\mu(t)$, a solução implícita do problema de valores iniciais $x(1)=0$. Determine o seu intervalo máximo de definição.

Sugestão: Para facilitar a resolução, pode consulte os problemas [15 sec. 2.1] e [13 sec. 2.1].

2.3 Sistemas de equações diferenciais lineares

1. Considere as funções contínuas $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ respectivamente definidas por

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^{-2} & t^{-3} \\ 0 & t^{-1} - t^{-2} \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} t^{-2} \\ t^{-1} \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}^+ .$$

Determine a solução do problema de valores iniciais $\dot{x} = A(t)x + b(t)\,,\ x(1) = (0,1)\,.$

2. Considere as funções contínuas $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ respectivamente definidas por

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} .$$

i) Determine uma matriz fundamental para o sistema de equações diferenciais lineares $\dot{x} = A(t)x\,;$

ii) Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais lineares $\dot{x} = A(t)x + b(t)\,;$

iii) Determine a solução do problema de valores iniciais $\dot{x} = A(t)x + b(t)\,,\ x(0) = (0,0)\,.$

3. Calcule e^{At} respectivamente nos casos em que A é a matriz:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; vi) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; vii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; viii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

ix) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; x) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; xi) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; xii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Encontre a solução geral dos seguintes sistemas de equações diferenciais

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 + 2x_3 \end{cases} \ ; \quad \text{ii)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 + 3x_3 \end{cases} .$$

5. Encontre a solução dos seguintes **PVI**'s

$$\text{i)}\quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + x_3 \quad ; & x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_3 &= 3x_3 & x_3(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{ii)}\quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= 3x_1 - x_3 & x_1(1) = 1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \quad ; & x_2(1) = 0 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - 1 & x_3(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{iii)}\quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 - x_3 + 2e^t & x_1(1) = 1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \quad ; & x_2(1) = 0 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_3 + e^t & x_3(1) = 1 \end{cases} \qquad \text{iv)}\quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + 2e^{2t} & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \quad ; & x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + 2x_3 & x_3(0) = 0 \end{cases}$$

6. Decida se cada uma das funções matriciais indicadas nas seguintes alíneas coincide com alguma matriz exponencial e^{At}. Caso se decida afirmativamente, então determine a matriz A.

$$\text{i)}\quad \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}; \qquad \text{ii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix};$$

$$\text{iii)}\quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{4t} & 1-e^{4t} \\ 1-e^{4t} & 1+e^{4t} \end{bmatrix}; \quad \text{iv)}\quad \begin{bmatrix} e^{2t} & 1-e^{2t} \\ 1-e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

7. Determine a solução do problema de valores iniciais $\dot{x} = Ax + b(t)\,,\ x(0) = (1,0,0)\,,$ aonde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

8. Determine a solução do problema de valores iniciais $\dot{x} = Ax + b(t)\,,$ aonde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

- Encontre uma solução particular (constante) e a solução geral **fazer caso geral em que admite soluções constantes e concretizar num exemplo concreto**
- Encontre a solução do **PVI** $x(0) = (1,1,1)$,
- Encontre a solução do **PVI** $x(0) = (0,2,2)$,

9. Determine a solução do problema de valores iniciais $\dot{x}= Ax + b(t)$, aonde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

- Encontre uma solução particular e a solução geral **toeplitz matrices for dimension 3**
- Encontre a solução do **PVI** $x(0) = (1, 1, 1)$,
- Encontre a solução do **PVI** $x(0) = (0, 2, 2)$,

10.

i) Determine a matriz exponencial e^{At}, aonde A é a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

ii) Resolva o problema de valores iniciais $\dot{x}= B(t)x + b(t)$, $x(0) = [0, 1, -1]^T$, aonde

$$B(t) = \begin{bmatrix} 3 & e^t & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11. [*Exame 2010-06-21*] Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x' &= Ax + b(t) \\ x(0) &= [0\,,0\,,0]^T \end{cases}, \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Resolução: A solução $x(t)$ do **PVI** acima denota-se por $[x_1(t)\,, x_2(t)\,, x_3(t)]^T$. Então

$$x_1'(t) = 2x_1 + e^{2t}. \tag{1}$$

Multiplicando (1) por o respectivo factor integrante obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[e^{-2t}x_1\right] = 1, \quad \text{logo} \quad \int_0^t e^{-2s}x_1(s)\,ds = \int_0^t 1\,ds, \quad \text{i.e.} \quad e^{-2t}x_1(t) = t \quad \text{e} \quad x_1(t) = te^{2t}.$$

Argumentos semelhantes estabelecem sucessivamente que

$$x_2' = te^{2t} + 2x_2, \quad \text{logo} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[e^{-2t}x_2\right] = t, \quad \text{i.e.} \quad e^{-2t}x_2(t) = \frac{t^2}{2} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t}$$

tanto que

$$x_3' = 4x_3 + e^{4t} \quad \text{logo} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[e^{-4t}x_3\right] = 1, \quad \text{i.e.} \quad e^{-4t}x_3(t) = t \quad \text{e} \quad x_3(t) = te^{4t}.$$

■

2.4 Equações diferenciais lineares de ordem superior

1. [*Exame 2008-01-17*]

i) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e determine $e^{At}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$

ii) Considere o vector coluna $b(t) = \left[0, e^{2t}, 0\right]^T\ ,\ t \in \mathbb{R}$ e encontre a solução do problema de *Cauchy*

$$\dot{x} = Ax + b(t)\,,\ x(0) = [1,0,1]^T\ .$$

Resolução: i) Considerem-se as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É evidente que $A = B + N$ e verifica-se sem dificuldades que $BN = NB$. Logo $e^{At} = e^{(B+N)t} = e^{Nt}e^{Bt}$. Determinamos de seguida as exponenciais das matrizes B e N.

Se $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$ é solução de $\dot{x} = Nx$ então $x_2(t) = C^{\text{te}}$ e

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{aonde} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz C é a matriz companheira da equação diferencial $y'' - y = 0$. Logo

$$[x_1(t), x_3(t)]^T = \left[C_1e^t + C_2e^{-t}\,,\ C_1e^t - C_2e^{-t}\right]^T\ .$$

Como e^{Nt} é uma matriz principal em $t = 0$ obtemos sem dificuldade que

$$e^{Nt} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & 0 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 2 & 0 \\ e^t - e^{-t} & 0 & e^t + e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & 0 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 2 & 0 \\ e^t - e^{-t} & 0 & e^t + e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+1 & 0 & e^{2t}-1 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ e^{2t}-1 & 0 & e^{2t}+1 \end{bmatrix}.$$

ii) É suficiente resolver os seguintes problemas de valores iniciais

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \widetilde{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = 2x_2 + e^{2t} \, , \; x_2(0) = 0 \, ,$$

aonde

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{B} = I + C \, .$$

Da alínea anterior é evidente que

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^t e^{Ct} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} .$$

Finalmente, a equação diferencial $\dot{x}_2 = 2x_2 + e^{2t}$ equivale a

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}x_2(t)\right] = 1 \quad \text{e logo} \quad x_2(t) = te^{2t} + Ce^{2t} \, .$$

Da condição inicial $x_2(0) = 0$ obtém-se $x_2(t) = te^{2t}$. ∎

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valores iniciais

i) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2t}}{1 - e^t}$; $y'(1) = y(1) = 0$;

ii) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{t(t+1)}$; $y'(2) = y(2) = 0$;

iii) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin t}$; $y'(\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3. Determine a solução geral das equações diferenciais indicadas nas seguintes alíneas:

i) $y'' - 2y' + y = 0$; ii) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

iii) $y'' - \mu^2 y = 0 \;\; (0 \neq \mu \in \mathbb{R})$; iv) $y'' + \mu^2 y = 0 \;\; (0 \neq \mu \in \mathbb{R})$;

v) $y''' + y = 0$; vi) $y''' + y'' + y' + y = 0$;

vii) $y^{(4)} - y = 0$; viii) $y^{(4)} - 3y'' + 2y = 0$;

ix) $y^{(4)} - 3y'' + 2 = 0$; x) $y^{(5)} - y^{(4)} + y''' - y'' + 2 = 0$.

4. Resolva os problemas de valores iniciais indicados nas seguintes alíneas:

i)	$y'' - y = e^t$	;	$y'(0) = 0\ ,\ y(0) = 1\ ;$
ii)	$y'' - y' = te^t$	;	$y'(0) = y(0) = 1\ ;$
iii)	$y'' - y' = 1$	;	$y'(0) = 1\ ,\ y(0) = 0\ ;$
iv)	$y'' - y' = 1 + \cos t$	;	$y'(0) = y(0) = 1\ ;$
v)	$y''' - 4y' = t + \cos t$	;	$y''(0) = 1\ ,\ y'(0) = y(0) = 0\ ;$
vi)	$y'' - 4y' + 3y = e^t + te^{2t}$	;	$y'(0) = 0\ ,\ y(0) = 1\ ;$
vii)	$y'' - 2y' = t\cos t$	;	$y'(0) = 3\ ,\ y(0) = 1\ ;$
viii)	$y'' + 2y' + y = e^{-t} + e^t$	;	$y'(0) = y(0) = 1\ ;$
ix)	$y''' + 3y'' + 7y' + 5y = t$	;	$y''(0) = y'(0) = y(0) = 0\,.$

5. [*Exame 2008-01-03*]

i) Determine a solução geral da equação linear homogénea de segunda ordem

$$y'' - 2y' + y = 0\,. \tag{1}$$

ii) Justifique que a matriz companheira da equação (1) é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e determine $e^{At}\ ,\ t \in \mathbb{R}\,.$

iii) Considere o vector coluna $b = [0,1]^T$ e o problema de valores iniciais

$$\dot{x} = Ax + b\,,\ x(0) = [1,1]^T\ . \tag{2}$$

Determine a solução $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T\ ,\ t \in \mathbb{R}$ do problema (2).

Resolução: i) O polinómio característico da equação diferencial (1) é $D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$. Deduz-se que a solução geral da equação (1) é dada por

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 te^t\ ,\ t \in \mathbb{R}\ , \quad \text{aonde} \quad C_1, C_2 \quad \text{são constantes reais.}$$

ii) De acordo com a mudança de variável $x_1 = y\,,\ x_2 = \dot{y}$ a equação diferencial (1) escreve-se na forma

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Logo A é a matriz companheira de (1). As soluções dos problemas de valores iniciais

$$\begin{array}{lcl} y''-2y'+y=0 & ; & y(0)=1\,,\, y'(0)=0 \\ y''-2y'+y=0 & ; & y(0)=0\,,\, y'(0)=1 \end{array} \quad \text{são respectivamente} \quad \begin{array}{lcl} y_1(t) & = & e^t-te^t \\ y_2(t) & = & te^t \end{array} .$$

Conclui-se que

$$e^{At}=\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t-te^t & te^t \\ -te^t & e^t+te^t \end{bmatrix}\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

iii) É suficiente encontrar a solução do problema

$$y''-2y'+y=1 \quad ; \quad y(0)=1\,,\, y'(0)=1\,. \tag{4}$$

Anotamos que $D1=0$. Como os polinómios de derivação D^2-2D+1 e D não tem zeros comuns, então existe uma solução particular constante $y_p(t)=C$. Computando

$$\big(D^2-2D+1\big)C=C=1 \quad \text{obtemos que} \quad y_p(t)=1\,,\ t\in\mathbb{R} \quad \text{é solução particular.}$$

Logo

$$y_g(t)=C_1e^t+C_2te^t+1 \quad \text{é a solução geral de} \quad y''-2y'+y=1\,.$$

As condições iniciais são equivalentes a $C_1+1=1\,,\ C_1+C_2=1$ de onde infere-se que

$$y(t)=te^t+1\,,\ t\in\mathbb{R}\,,$$

é a solução do problema de valores iniciais (4). Consequentemente, a solução de (2) é dada por

$$x(t)=\big[y(t),y'(t)\big]^T=\big[te^t+1,e^t+te^t\big]^T\ ,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

■

6. [*Exame 2008-01-17*] Considere o seguinte problema de valores iniciais

$$t^2x''-2x=0 \quad ; \quad x(1)=0\,,\, x'(1)=1\,. \tag{5}$$

i) Verifique que se $x(t)$ é solução de (5) então $y(t):=x(e^t)$ é solução do problema

$$y''-y'-2y=0 \quad ; \quad y(0)=0\,,\, y'(0)=1\,. \tag{6}$$

ii) Determine a solução do problema de valores iniciais (6).

iii) Tenha em consideração as alíneas anteriores e determine a solução do problema (5).

Resolução: i) É evidente que $y'(t)=e^tx'(e^t)$. Logo, sem dificuldades obtemos

$$y''(t)=e^tx'(e^t)+e^{2t}x''(e^t)=e^tx'(e^t)+2x(e^t)=y'(t)+2y(t) \quad \text{i.e.} \quad y''(t)-y'(t)-2y(t)=0\,.$$

Das condições iniciais $x(1)=0\,,\, x'(1)=1$ infere-se

$$y(0)=x(1)=0 \quad ; \quad y'(0)=x'(1)=1\,.$$

ii) O polinómio característico da equação $y'' - y' - 2y = 0$ é dado por $D^2 - D - 2 = (D+1)(D-2)$. Logo, a solução geral da equação diferencial linear homogénea $y'' - y' - 2y = 0$ é da forma

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Das condições iniciais $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$ deduz-se $C_1 + C_2 = 0$ e $2C_2 - C_1 = 1$. Logo,

$$y(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}\,,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{é a solução de (5)} \quad .$$

iii) Das alíneas anteriores, é evidente que

$$x(t) = y(\ln t) = \frac{e^{2\ln t} - e^{-\ln t}}{3} = \frac{t^3 - 1}{3t}\,,\ t > 0\,.$$

■

7. [*Teste 2011-05-28*] Determine a única função diferenciável $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$t^2 f'(t) - 3t f(t) + 4\int_1^t f(s)\, ds = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 3.$$

Resolução: Considere a mudança de variável

$$y(t) = \int_1^t f(s)\, ds$$

Então $y(t)$ verifica o seguinte **PVI**, relativa a uma equação de *Euler*

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0 \quad ; \quad y(1) = 0 \quad \text{e} \quad y'(1) = 3.$$

É bem conhecido, que a mudança de variável $x(t) := y(e^t)$ conduz à equação com coeficientes constantes

$$x'' - 4x' + 4x = 0 \quad ; \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 3.$$

O polinómio característico é dado por $(D-2)^2$ e logo

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}\,; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Os valores iniciais são verificados sse

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 = 3/2.$$

Concluí-se que

$$y(t) = x(\ln t) = \frac{3t^2 \ln t}{2} \quad \text{e logo} \quad f(t) = y'(t) = 3t(2\ln t + 1)/2.$$

■

8. [*Exame 2008-07-26*]

i) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial linear de ordem superior

$$y'' - 2y' - 8y = 0\,;$$

ii) Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais

$$y'' - 2y' - 8y = 8 \quad ; \quad y(0) = 0\,,\, y'(0) = 4\,;$$

iii) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares

$$\dot{\varphi} = C\varphi \quad \text{aonde} \quad C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Suponha fornecida uma solução de (7)

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,,\ t \in \mathbb{R}$$

e com brevidade justifique que $\varphi_1'(t) = \varphi_2(t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,;$

iv) Determine a exponencial da seguinte matriz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix};$$

v) Considere o vector coluna $b(t) = [e^t, 0, 8]^T\,,\ t \in \mathbb{R}$ e determine a solução do seguinte PVI

$$\dot{x} = Ax + b(t)\,,\ x(0) = [1, 0, 4]^T\,.$$

Resolução: 1. i) O polinómio caracteristico da equação diferencial de ordem superior com coeficientes constante é $D^2 - 2D - 8 = (D+2)(D-4)$. Logo a solução geral da equação homogénea é

$$y_{gh}(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

1. ii) Como $D8 = 0$ então as soluções de $y'' - 2y' - 8y = 8$ são soluções da equação homogénea $D(D+2)(D-4) = 0$. Deduz-se que existe uma solução particular constante $y_p(t) = C$. Se y_p é solução então $(D^2 - 2D - 8)y_p = -8C = 8$ e logo $C = -1$. Logo a solução geral da equação não homogénea é

$$y_g(t) = y_{gh}(t) - 1 = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} - 1\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

As condições iniciais são equivalentes ao seguinte sistema de equações

$$\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 1 \\ 4C_1 - 2C_2 & = & 4 \end{array} \quad \text{e logo} \quad \begin{array}{rcl} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 0 \end{array}.$$

A solução do problema de valores iniciais é dada por $y(t) = e^{4t} - 1\,.$

1. iii) A matriz C é a matriz companheira da equação diferencial

$$y'' - 2y' - 8y = 0\,, \tag{8}$$

i.e. após mudança de variável $x_1 = y\,,\, x_2 = \dot{y}\,,$ a equação diferencial (8) equivale a (7). Em particular, se (φ_1, φ_2) é solução de (7) então φ_1 é uma solução de (8) e $\varphi_1' = \varphi_2\,.$

1. iv) Como $A = \operatorname{diag}\{1, C\}$ então é suficiente calcular a exponencial da matriz C. Tendo em conta que C é a matriz companheira de (8) e a alínea **1.i)**, deduz-se que a solução geral de (7) é

$$x(t) = [C_1e^{4t} + C_2e^{-2t}, 4C_1e^{4t} - 2C_2e^{-2t}]^T\,, \ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

Como e^{Ct} é matriz principal em $t = 0$, para determinar respectivamente a 1.ª e 2.ª coluna de e^{Ct} é suficiente resolver os seguintes sistemas de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 1 \\ 4C_1 - 2C_2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} C_1 & = & 1/3 \\ C_2 & = & 2/3 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 0 \\ 4C_1 - 2C_2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} C_1 & = & 1/6 \\ C_2 & = & -1/6 \end{array}\right. .$$

Em consequência obtemos que

$$e^{Ct} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2e^{4t} + 4e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 8e^{4t} - 8e^{-2t} & 4e^{4t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{e logo} \quad e^{At} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{4t} + 4e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 0 & 8e^{4t} - 8e^{-2t} & 4e^{4t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

1. v) Se $[x_1, x_2, x_3]^T$ é solução do problema de valores iniciais enunciado então

$$[\dot{x}_2, \dot{x}_3]^T = C[x_2, x_3]^T + [0, 8]^T \quad \text{e} \quad x_2(0) = 0\,,\ x_3(0) = 4\,.$$

Logo, após mudança de variável $x_2 = y$, $x_3 = \dot{y}$ temos que $[x_2, x_3]^T$ é a solução da alínea **1.ii)**, i.e.

$$x_2(t) = e^{4t} - 1 \quad \text{e} \quad x_3(t) = x_2'(t) = 4e^{4t}\,.$$

Para determinar $x_1(t)$ considerem-se as seguintes computações

$$x_1'(t) = x_1(t) + e^t \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(x_1e^{-t}\big) = 1 \Leftrightarrow x_1(t) = e^t(t + C)\,.$$

Como $x_1(0) = 1$ então $x_1(t) = e^t(t + 1)$. ∎

9. [*Exame 2010-07-07*]

i) Dado um número real a, considere a equação linear homogénea

$$y'' - ay' + 8y = 0.$$

Determine a, sabendo que a função $y(t) := e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial anterior.

ii) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{1}{1 + e^{-4t}} \qquad (t < 0).$$

Resolução: *i)* O polinómio característico $D^2 - aD + 8$ factoriza-se da seguinte forma $(D-2)(D-\lambda)$. Logo $2\lambda = 8$, donde deduz-se $\lambda = 4$ e $a = 2 + \lambda = 6$.

ii) Da alínea anterior deduz-se que a solução geral da equação homogénea

$$y'' - 6y' + 8y = 0 \qquad (t < 0).$$

é dada por $y_{gh}(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{4t}$, aonde c_1 e c_2 são constantes reais. Para terminar é suficiente encontrar uma solução particular da equação não homogénea. Uma matriz Wronskiana é dada por

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 2e^{2t} & 4e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Uma solução particular

$$\begin{aligned} y_p(t) &= [e^{2t}\ e^{4t}] \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+e^{-4t}} \end{bmatrix} dt = \tfrac{1}{2}[e^{2t}\ e^{4t}] \int \begin{bmatrix} * & -e^{-2t} \\ * & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+e^{-4t}} \end{bmatrix} dt \\ &= \tfrac{1}{2}[e^{2t}\ e^{4t}] \int \begin{bmatrix} \dfrac{-e^{-2t}}{1+e^{-4t}} \\ \dfrac{e^{-4t}}{1+e^{-4t}} \end{bmatrix} dt = \frac{e^{2t}}{8} \arctan(e^{-2t}) - \frac{e^{4t}}{16} \ln(1+e^{-4t}). \end{aligned}$$

3 Equações diferenciais parciais

3.1 Separação de variáveis e séries de Fourier

1. Considere funções não negativas $a(x)$ e $b(x)$. Mostre que o seguinte problema de valores na fronteira

$$a'(x)y' + a(x)y'' - b(x)y = 0 \quad , \quad y(a) = y(b) = 0$$

admite a solução única.

2. Considere uma função não negativa $a(x)$. Mostre que o seguinte problema de valores na fronteira

$$a'(x)y' + a(x)y'' + y' - y = 0 \quad , \quad y(a) = y(b) = 0$$

admite a solução única.

3. [*Teste 2011-05-28*] Mostre que a função nula $y(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$ é a única solução do seguinte problema de valores na fronteira

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2 y'\right) + 2y' - t^3 y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Sugestão: Poder-lhe-á ser útil multiplicar por y e, em seguida integre no intervalo $[0, 1]$.

Resolução: Considerando a sugestão e integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 y(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^2 y'(s)\right) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} y^2(s)\, ds - \int_0^1 s^3 y^2(s)\, ds \\
&= s^2 y(s) y'(s)\Big]_0^1 - \int_0^1 s^2 (y'(s))^2\, ds + y^2(s)\Big]_0^1 - \int_0^1 s^3 y^2(s)\, ds \\
&= -\int_0^1 s^2 (y'(s))^2 + s^3 y^2(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Porque a função $s \to s^2(y'(s))^2 + s^3 y^2(s)$ é positiva, contínua no intervalo $[0, 1]$ e com integral nulo então é necessariamente a função nula, i.e. $y(s) = 0$, $0 \leq s \leq 1$. ■

4. [*Exame 2008-07-26*] Aplique o método de separação de variáveis e determine uma solução da seguinte equação às derivadas parciais

$$\begin{array}{lll}
(1) \quad u(t,x) = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} & ; & t > 0\,,\, x \in \mathbb{R} \\
(2) \quad u(t,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t,\pi) = 0 & ; & t \geq 0 \\
(3) \quad u(0,x) = \sin x & ; & x \in \mathbb{R}
\end{array} .$$

Resolução: Suponha-se que $u(t,x) = T(t)X(x)$. Então

$$T(t)X(x) = T'(t)X''(x) \quad \text{e logo existe uma constante } \sigma \text{ tal que} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X''(x) & = & \sigma X(x) \\ T'(t) & = & \sigma^{-1} T(t) \end{array} \right.$$

Das condições de fronteira $X(0) = X(\pi) = 0$ sabemos que existem soluções $X(x)$ não nulas sse $\sigma < 0$. Se $\sigma < 0$ então a solução geral da equação $X''(x) = \sigma X(x)$ é dada por

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{|\sigma|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\sigma|}x)\,, \quad C_1\,,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Das condições de fronteira deduz-se que $C_1 = 0$ e $\sigma = -n^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Sem dificuldades conclui-se que $u(t,x) = e^{-t} \sin x$ é solução do problema. ■

5. Considere o rectângulo $\mathcal{R} = [\,0, +\infty\,[\, \times [0,\pi]$ e o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & ; \quad (t,x) \in \operatorname{ins} \mathcal{R} \\ (2) & \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0 & ; \quad t \geq 0 \\ (3) & u(0,x) = 2\sin^2 x & ; \quad x \in [0,\pi] \end{array} \,.$$

Resolva o problema anterior por intermédio do método de separação de variáveis.

6. Seja U a coroa circular $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\big\}$ e Δ o operador Laplaciano $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Tenha em linha de conta que Δ é dado em coordenadas polares por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\,,$$

e aplique o método de separação de variáveis para encontrar uma função $u \in C^2(U)$ tal que:

$$\begin{array}{lll} (1) & \Delta u(x,y) = 0 & ; \quad (x,y) \in \operatorname{ins} U \\ (2) & u(x,y) = 1 & ; \quad x^2 + y^2 = 1 \\ (3) & u(x,y) = 2 & ; \quad x^2 + y^2 = 2\,. \end{array}$$

7. Considere o rectângulo $\mathcal{R} = [0,\pi] \times [0,1]$ e o seguinte problema de valores na fronteira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & ; \quad (x,y) \in \operatorname{ins} \mathcal{R} \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & ; \quad y \in \,]\,0,1\,[\end{array} \right. . \tag{1}$$

Mostre que do método de separação de variáveis obtém-se que quaisquer combinações lineares (finitas) das funções $\sin(nx)\sinh(ny)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\sin(nx)\cosh(ny)$, $n \in \mathbb{N}$ são soluções do problema (1).

8. Encontre os desenvolvimentos em série de Fourier (no intervalo $]-\pi,\pi\,]$) das seguintes funções:

i) $f(x)=\sin^2 x\ ,\ x\in\ ]-\pi,\pi\,]$;

ii) $f(x)=\cos^4 x\ ,\ x\in\ ]-\pi,\pi\,]$;

iii) $f(x)=e^x\ ,\ x\in\ ]-\pi,\pi\,]$;

iv) $f(x)=x\ ,\ x\in\ ]-\pi,\pi\,]$;

v) $f(x)=e^x x\ ,\ x\in\ ]-\pi,\pi\,]$;

vi) $f(x)=e^x\cos x\ ,\ x\in\ ]-\pi,\pi\,]$;

vii) $f_a(x)=\begin{cases}1 & , \quad -a\le x\le a\\ 0 & , \quad a<|x|\le\pi\end{cases}$ $(0<a<\pi)$;

viii) $f(x)=\begin{cases}\sin x & , \quad 0\le x\le\pi\\ 0 & , \quad -\pi\le x<0\end{cases}$.

9. [*Exame 2008-01-17*] Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π e integrável em $]-\pi,\pi\,]$. Defina a função

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad , \quad g(x)=f(2x)\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Suponha que a função f é ímpar e justifique sucessivamente que:

i) as séries de Fourier (em $]-\pi,\pi\,]$) das funções f e g são séries de senos, i.e. existem sucessões de termos reais $b_n,\widetilde{b}_n\,,\ n\in\mathbb{N}_1$ tais que as séries de Fourier de f e g são respectivamente dadas por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{b}_n\sin(nx)\,.$$

ii) para $n\in\mathbb{N}_1$ verifica-se que

$$\begin{cases}\widetilde{b}_{2n} &= b_n\\ \widetilde{b}_{2n-1} &= 0\end{cases}.$$

Resolução: 1.i) Suponha-se que as séries de Fourier das funções f e g são respectivamente dados por

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{a}_n\cos(nx)+\widetilde{b}_n\sin(nx)\,.$$

Se f é uma função ímpar então g também é uma função ímpar. As funções $x\to\cos(nx)\,,\ n\in\mathbb{N}$ são funções pares. Logo $x\to f(x)\cos(nx)$ e $x\to g(x)\cos(nx)$ são funções ímpares. Tendo em conta que integrais de funções ímpares, em intervalos simétricos centrados na origem, igualam zero, então

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=0 \quad \text{e} \quad \widetilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(nx)\,dx=0\,,$$

como se pretendia.

ii) Simples cálculos estabelecem

$$\widetilde{b}_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(2x)\sin(2nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt=b_n\,.$$

Tendo em consideração as igualdades

$$\begin{aligned} g(\pi-x) &= f(2\pi-2x)=f(-2x)=-f(2x)=-g(x)\,,\\ \sin[(2n-1)(\pi-x)] &= \sin[(2n-1)\pi-(2n-1)x]=\sin[(2n-1)x]\ ;\ x\in\mathbb{R}\,,n\in\mathbb{N}_1\,,\end{aligned}$$

deduz-se que a função $x \to g(x)\sin[(2n-1)x]$ é ímpar relativamente à recta vertical $x = \pi/2$. Logo

$$\widetilde{b}_{2n-1} \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin[(2n-1)x] \; dx = 0 \; , \;\; n \in \mathbb{N}_1 \; .$$

■

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2\pi/m$, $m \in \mathbb{N}_1$ e integrável em $]-\pi,\pi\,]$. Defina a função

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = f(x/m)\, , \; x \in \mathbb{R}\, .$$

Suponha que as funções f e g têm respectivamente séries de Fourier dadas por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n \cos nx + \widetilde{b}_n \sin(nx)\ ,$$

e demonstre que a série de Fourier da função f verifica as seguintes propriedades:

i) $a_j = b_j = 0$ se $j = km + n\,,\;\; k, m, n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0\,;$

ii) $a_{jm} = \widetilde{a}_m$ e $b_{jm} = \widetilde{b}_m$, se $j, m \in \mathbb{N}$.

11. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com período 2π e integrável em $]-\pi,\pi]$. Se τ é uma constante, considere a transladada

$$f_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_\tau(x) = f(x-\tau),\; x \in \mathbb{R}.$$

Suponha que f é par e, no intervalo $]-\pi,\pi]$, a série de *Fourier* de f é dada por

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx).$$

Justifique o seguinte

$$\begin{aligned} a_n(f_\tau) &= \cos(n\tau)a_n(f) \quad ; \quad n = 0, 1, \ldots \\ b_n(f_\tau) &= \qquad 0 \qquad\quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

.

Resolução: Considerando a periodicidade das funções $f(t)$ e $\cos(nt)$, da definição de coeficientes de *Fourier* e da mudança de variável na integração, deduz-se o seguinte

$$\begin{aligned} a_n(f_\tau) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\tau(t)\cos(nt)\; dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)\cos(nt)\; dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(y)\cos(nt+n\tau)\; dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(nt+n\tau)\; dt = \cos(n\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(nt)\; dt = \cos(n\tau)a_n(f). \end{aligned}$$

■

3.2 Convergência de séries de Fourier e equações diferenciais parciais

1. [*Exame 2008-01-03*] Considere uma função f, real de variável real, integrável no intervalo $]-\pi,\pi\,]$ e com período 2π. Suponha adicionalmente que f é uma função **par** e verifica

$$f(\pi - x) = -f(x)\,,\ x \in [0,\pi]\ .$$

i) Justifique que se o desenvolvimento em série de Fourier de f no intervalo $]-\pi,\pi\,]$ é dado por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\ ,$$

então verifica-se que $b_n = 0\,,\ n \in \mathbb{N}_1$ e $a_{2n} = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$.

ii) Tendo em conta a alínea anterior, mostre que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left[(2n+1)x\right] \quad \text{para} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

Resolução: 1. i) Se a função $f :]-\pi,\pi\,] \to \mathbb{R}$ é integrável e par, então a função $]-\pi,\pi\,] \ni x \to f(x)\sin(nx)$ é integrável e ímpar. Consequentemente

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0\ ,\ \ n \in \mathbb{N}_1\,.$$

Os coeficientes $a_n\,,\ n \in \mathbb{N}$ são dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,.$$

A condição $f(\pi - x) = -f(x)\,,\ x \in [0,\pi]$ significa que a restrição da função f ao intervalo $[0,\pi]$, é ímpar relativamente à recta vertical $x = \pi/2$. Como

$$\cos\left[n(x-\pi)\right] = (-1)^n \cos(nx)\,,\ x \in \mathbb{R}$$

então a função $x \to \cos(nx)$ é par, respectivamente ímpar, relativamente à recta vertical $x = \pi/2$ sse n é par ou ímpar. Logo

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(nx)\,dx & ,\ \text{se } n \text{ é ímpar} \\ a_n = 0 & ,\ \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

1. ii) Tendo em conta a alínea anterior, o desenvolvimento em série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & ,\ \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases} \quad \text{é dado por} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cos\left[(2n+1)x\right].$$

Compute-se

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\left[(2n+1)x\right]\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[(2n+1)x\right]\,dx = \frac{4}{\pi}\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

Tendo em conta o critério de convergência pontual, obtemos

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left[(2n+1)x\right]\ ,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{i.e.} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left[(2n+1)x\right]\ ,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

■

2.

a) Desenvolva em série de Fourier as funções adequadas em intervalos adequados, para obter as igualdades indicadas nas seguintes alíneas:

i) $1 = \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sin\left[\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x\right]$ aonde $0 < x < 2\pi$;

ii) $1 = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} \cos(nx)$ aonde $-1 < x < 1$;

iii) $\cos \dfrac{x}{2} = -\dfrac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos(nx)$ aonde $-\pi < x < \pi$;

iv) $x = \dfrac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left[\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x\right]$ aonde $-\pi < x < \pi$.

Sugestão: Para a alínea ii) considere a função característica do intervalo $[-1, 1]$.

b) Considere em números reais adequados a convergência das séries nas alíneas anteriores e obtenha as seguintes igualdades:

i) $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$; ii) $\dfrac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$;

iii) $\dfrac{\pi - 4}{4} = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$; iv) $\dfrac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

3. Seja $\mathcal{R} = [\,0, +\infty\,[\, \times [0, \pi]$ e K uma constante real positiva. Encontre a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & ; \quad (t,x) \in \operatorname{ins} \mathcal{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,\pi) = 0 & ; \quad t \geq 0 \\ u(0,x) = \sin x & ; \quad x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

4. Seja $\mathcal{R} = [\,0, +\infty\,[\, \times [0, \pi]$ e considere o seguinte problema

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & ; & (t,x) \in \operatorname{ins} \mathcal{R} \\ (2) \quad u(t,0) = \pi \quad \text{e} \quad u(t,\pi) = 2\pi & ; & t \geq 0 \\ (3) \quad u(0,x) = x + x^2 + \pi(1-x) & ; & x \in [0, \pi] \end{array} .$$

i) Verifique que a função $v(x) = \pi + x$ verifica as condições (1) e (2).

ii) Proceda à mudança de variável $w = u - v$ e encontre a solução das condições $(1), (2)$ e (3).

5. Considere o rectângulo $\mathcal{R} = [\,0, +\infty\,[\, \times [0, \pi]$ e o seguinte problema de equações diferenciais parciais

$$\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - u(t,x) & ; \quad (t,x) \in \operatorname{ins}\mathcal{R} \\ (2) & u(t,0) = 1 \quad \text{e} \quad u(t,\pi) = e^{\pi} & ; \quad t \geq 0 \\ (3) & u(0,x) = e^x + x\cos\dfrac{x}{2} & ; \quad x \in [0,\pi] \end{array} .$$

i) Encontre uma solução $v(x)$, $x \in [0, \pi]$ das condições (1) e (2).

ii) Proceda à mudança de variável $w = u - v$ e encontre a solução de (1), (2) e (3).

6. Considere $\mathcal{R} = [0, \pi] \times [0, 1]$ e encontre a solução do seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & ; \quad (x,y) \in \operatorname{ins}\mathcal{R} \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & ; \quad y \in [0,1] \\ u(x,0) = -u(x,1) = \sin^2 x & ; \quad x \in [0,\pi] \end{cases} .$$

Referências

[1] Luís V. Pessoa, *Introdução à Análise Complexa*, 2009.