



ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2^o Semestre 05/06

Exercícios Suplementares

(Eng^a Física Tecnológica, Matemática Aplicada e Computação)

Convergência uniforme

1. [Teste de Weierstrass] Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona decrescente, e a sucessão de funções

$$f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \chi_{[n, n+1[} f(x),$$

designando $\chi_{[n, n+1[}$ a função característica do intervalo $[n, n+1[$. Demonstre sucessivamente que:

- a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x)$, $x \geq 1$, e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então a convergência é uniforme;
- se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é divergente, então não existe uma sucessão de termo geral $a_n \geq 0$, verificando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ e tal que $|f_n(x)| \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}, x \geq 1$;
- com $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$ retire das alíneas anteriores um exemplo duma série absoluta e uniformemente convergente que não verifica as condições do teste de Weierstrass [1, pag.336].

2. Considere uma sucessão de funções diferenciáveis $a_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $a_n(0) = 0, n \in \mathbb{N}$ e

$$|a_n(x) - a_n(y)| \leq b_n |x - y|, \sum b_n < \infty.$$

Prove que a série $\sum a_n(x)$ converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

3. [Critério de Abel] Seja $X \subset \mathbb{R}$, e $f_n : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \in C(\overline{X})$ uma sucessão de funções uniformemente convergente em X . Demonstre sucessivamente que:

- a sucessão f_n converge uniformemente em $\overline{X}$;
- retire da alínea anterior que se a série de potências

$$\sum a_n (x - a)^n \tag{1}$$

diverge em $a + r$ ou em $a - r$ então não converge uniformemente em $]a - r, a + r[$, e do critério de Abel [1, pag.337], conclua que a série de potências (1) converge uniformemente em $[a - r, a + r]$ sse converge uniformemente em $]a - r, a + r[$ sse converge no conjunto $\{a - r, a + r\}$.

iii) considere o caso $X =]0, 1[$, e mostre que a hipótese $f_n \in C([0, 1])$ não pode ser substituída por $f_n \in C(]0, 1[)$, i.e., forneça um exemplo duma sucessão de funções contínuas no intervalo $]0, 1[$, uniformemente convergentes em $]0, 1[$ mas não uniformemente convergentes em $[0, 1]$.

4. Seja $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ e $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ sucessões de funções uniformemente convergentes em X . Designe por $B(X)$ o conjunto das funções limitadas em X , e mostre que:

- i) se $f_n, g_n \in B(X)$ então $f_n g_n$ converge uniformemente em X ;
- ii) forneça exemplos de sucessões de funções f_n, g_n , e $X \subset \mathbb{R}$, tais que $f_n g_n$ não converge uniformemente em X .

5. Considere a sucessão de funções $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$, e mostre que a sucessão f_n não converge uniformemente em qualquer intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

6. Considere as sucessões de funções $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $g_n(x) = x^n(1-x^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Demonstre que a sucessão f_n converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$, e que a sucessão g_n não converge uniformemente no mesmo intervalo.

7. Considere a sucessão de funções

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-n/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Demonstre que a sucessão f_n converge uniformemente em qualquer intervalo limitado e fechado, e que a convergência não é uniforme em $\mathbb{R}$.

References

- [1] J. Campos Ferreira, *Introdução à análise matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 3ª Edição.