



ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2^o Semestre 05/06

Exercícios Suplementares

(Eng^a Física Tecnológica, Matemática Aplicada e Computação)

Revisões - Teorema de Lagrange e Regra de Cauchy

Observação 1. Os resultados fundamentais do cálculo diferencial a utilizar, intentam-se circunscrever ao teorema de Lagrange e à regra de Cauchy.

1. Dadas duas funções reais de variável real f, g e um ponto $a \in \mathbb{R}$, aderente à intercepção dos domínios de f e g , escreve-se $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$ para significar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Considere $c \in \mathbb{R}$ e demonstre

$$(x+c)^\beta - x^\beta \sim c\beta x^{\beta-1}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Considere a classe de funções

$$C_b^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f^{(n)} \text{ é limitada, } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mostre sucessivamente que:

- i) Se $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x)$ existe, então $f^{(n)}(+\infty) = 0$, $n = 1, \dots$.
- ii) Considere $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que f' tem dois sublimites distintos em $+\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe. Mostre que f'' não é limitada.
- iii) Suponha $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Prove que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0$, $n = 1, \dots$.

Demonstração:

- i) Por absurdo, supomos $f^{(n)}(\infty) \neq 0$, e sem perder generalidade assumamos $f^{(n)}(\infty) > 0$. Então, dado $r > 0$, o teorema de Lagrange permite concluir a existência de $\xi_r \in]r, 2r[$, verificando

$$f^{(n-1)}(2r) - f^{(n-1)}(r) = r f^{(n)}(\xi_r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Como por hipótese $f^{(n-1)}$ é uma função limitada, a conclusão anterior é absurda.

- ii) Sem perder generalidade, suponha-se a existência dum sublimite positivo de f' , no ponto $+\infty$. A continuidade da função f' e o teorema do valor intermédio, permitem supor que f' tem dois sublimites positivos c_1, c_2 tais que $0 < c_1 < c_2$. Considere-se $\epsilon > 0$ verificando

$$0 < c_1 - \epsilon < c_1 + \epsilon < c_2 - \epsilon.$$

Porque c_2 é sublimite de f' , existe $a_k \geq k$ verificando $c_2 - \epsilon < f'(a_k) < c_2 + \epsilon$. Defina-se

$$b_k = \inf \{x : x > a_k, c_1 - \epsilon < f'(x) < c_1 + \epsilon\}.$$

De novo, o teorema de Lagrange permite concluir que existe $\xi_k \in]a_k, b_k[$ verificando

$$f(b_k) - f(a_k) = f'(\xi_k) (b_k - a_k)$$

Note-se a desigualdade $f'(\xi_k) \geq c_1 + \epsilon$. De facto, se $f'(\xi_k) < c_1 + \epsilon$, então o teorema do valor intermédio garantiria a existência de c_k nas condições $a_k < c_k < \xi_k < b_k$, e verificando $c_1 - \epsilon < f'(c_k) < c_1 + \epsilon$, o que contradiz a definição de b_k . Obtêm-se

$$0 < (c_1 + \epsilon) (b_k - a_k) \leq f'(\xi_k) (b_k - a_k) = f(b_k) - f(a_k) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

e em consequência $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0$. Finalmente existe $\theta_k \in]a_k, b_k[$ verificando

$$|f''(\theta_k)| = \left| \frac{f'(b_k) - f'(a_k)}{b_k - a_k} \right| \geq \frac{(c_2 - \epsilon) - (c_1 + \epsilon)}{b_k - a_k} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty,$$

o que termina a demonstração.

- iii) Usaremos indução matemática para provar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$. O caso $n = 1$ é verdadeiro por hipótese. Por hipótese de indução, suponha-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$. Se $f^{(n+1)}$ tem limite em $+\infty$ então da alínea i) e de $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ retira-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(x) = 0$. Consequentemente é suficiente considerar o caso em que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(x)$ não existe. Dado $f^{(n+1)}$ ser uma função limitada, retira-se do teorema de Bolzano-Weierstrass que $f^{(n+1)}$ tem pelo menos dois sublimites no ponto $+\infty$. Por hipótese de indução $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x)$ existe. Logo, da alínea ii), conclui-se que a função $f^{(n+2)}$ não é limitada, contradizendo as condições das hipóteses. Portanto, tem-se necessariamente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(x)$ existe e é nulo. A demonstração termina considerando nos argumentos acima a função $g(x) = f(-x)$.

■

3. Dados $0 < \mu < 1$ e $x, y > 0$, mostre as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |x + y|^\mu &\leq |x^\mu + y^\mu| \leq 2^{1-\mu} |x + y|^\mu \\ |x^\mu - y^\mu| &\leq |x - y|^\mu. \end{aligned} \tag{1}$$

Se $\mu \geq 1$, então

$$\begin{aligned} 2^{1-\mu} |x+y|^\mu &\leq |x^\mu + y^\mu| \leq |x+y|^\mu \\ |x^\mu - y^\mu| &\geq |x-y|^\mu. \end{aligned} \quad (2)$$

Demonstração: Considere-se a função

$$f_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\mu(t) = \frac{(1+t)^\mu}{1+t^\mu},$$

e calcule-se

$$f'_\mu(t) = \frac{\mu(1+t)^{\mu-1}(1+t^\mu) - (1+t)^\mu \mu t^{\mu-1}}{(1+t^\mu)^2} = \mu(1+t)^{\mu-1} \frac{1-t^{\mu-1}}{(1+t^\mu)^2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} f'(t) &< 0, \quad 0 < t < 1, \quad \text{se } 0 < \mu < 1, \\ f'(t) &> 0, \quad 0 < t < 1, \quad \text{se } \mu > 1. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f_\mu(1)(1+t^\mu) &\leq (1+t)^\mu \leq f_\mu(0)(1+t^\mu), \quad \text{se } 0 < \mu < 1, \\ f_\mu(1)(1+t^\mu) &\geq (1+t)^\mu \geq f_\mu(0)(1+t^\mu), \quad \text{se } \mu > 1, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} 2^{\mu-1}(1+t^\mu) &\leq (1+t)^\mu \leq (1+t^\mu), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{se } 0 < \mu < 1, \\ 2^{\mu-1}(1+t^\mu) &\geq (1+t)^\mu \geq (1+t^\mu), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{se } \mu > 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Supondo, sem perda de generalidade, $0 < y < x$, as primeiras linhas de desigualdades respectivamente em (1) e (2), são equivalentes a

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{y}{x}\right|^\mu &\leq \left|1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\mu\right| \leq 2^{1-\mu} \left|1 + \frac{y}{x}\right|^\mu \\ 2^{1-\mu} \left|1 + \frac{y}{x}\right|^\mu &\leq \left|1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\mu\right| \leq \left|1 + \frac{y}{x}\right|^\mu. \end{aligned}$$

Substituindo $t = y/x$, as desigualdades anteriores são precisamente as obtidas em (3).

As segundas linhas de desigualdades, respectivamente em (1) e (2), obtêm-se por métodos análogos e considerando a família de funções de variável real

$$g_\mu : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g_\mu(t) = \frac{(1-t)^\mu}{1-t^\mu}, \quad \mu > 0.$$

■