Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exercícios Suplementares 5

(Eng^a e Arquitectura Naval, Eng^a Civil, Eng^a do Território)

Fórmula de Taylor.

1. Demonstre a seguinte desigualdade

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

(**Sugestão :** aplique a fórmula de Taylor de primeira e segunda ordem.)

2. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que existem $n \in \mathbb{N}$ e constantes $M \geq 0$, $\alpha > 1$ verificando

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y) \right| \leq M \left| x - y \right|^{\alpha}, \forall_{x,y \in \mathbb{R}}.$$

Mostre sucessivamente que:

a) $f^{(n)}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f^{(n+1)}(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a n.

3. De seguida pretende-se fornecer uma prova do bem conhecido binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j},\ n, j \in \mathbb{N}, j \leq n,\ a, b \in \mathbb{R}.^{\dagger} \tag{1}$$

Dividimos a prova nas seguintes etapas:

a) usando indução matemática mostre que

$$\frac{d^j}{dx^j} (1+x)^n = \frac{n!}{(n-j)!} (1+x)^{n-j};$$

b) por intermédio da fórmula de Taylor, retire da alínea anterior que

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j,\ x \in \mathbb{R};$$

† No binómio convencionamos $0^0 = 1$.

c) da alínea anterior deduza a fórmula (1).

4. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Suponha que $f^{(n)}(x)$ existe para todo o $x \in \mathbb{R}$, e que $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$.

a) Se n é impar e a função f verifica

$$f^{(n)}(x)(x-a) > 0 \quad (< 0)\,, \qquad \text{se } x \neq a,$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f.

b) Se n é par e a função f verifica

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad (< 0)\,, \qquad \text{se } x \neq a.$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f.

5. Mostre que a função $u(x,y,t) = t^{-1}e^{-\left(x^2+y^2\right)/4\lambda t}$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right],\ t > 0.$$

6. Seja $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ uma função com valores em $\mathbb{R}$, e que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(u,v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$. Mostre que g satisfaz (2).

7. Mostre que não existe nenhuma função real $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, tal que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\sin y, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = e^x.$$

8. Determine a fórmula de MacLaurin de 2^a ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y) = e^x \sin y$,

b) $g(x,y) = \cos x \cos y$,

c) $h(x,y) = \cos(xy)$,

d) $l(x,y) = \sin(x+y)$.

9. Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, relativo ao ponto $(2,1)$, da função $\psi(x,y) = y^x$. Deduza um valor aproximado de $(0,95)^{2,01}$.

10. Escreva a função polinomial $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ em potências de $x-1$, $y-1$ e $z-1$.

11. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificando a equação (2). Suponha que o determinante da matriz hessiana $H_{(x,y)}f$, é não nulo, i.e., $\det H_{(x,y)}f \neq 0$, se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de estacionaridade de f. Prove que f não tem extremos.

12. Sejam $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2. Considere a função composta $f = \psi \circ \varphi$, e mostre sucessivamente que:

a) se $\psi'(\varphi(x,y)) = 0$, então (x,y) é um ponto de estacionaridade para a função f e os critérios de 2^a ordem não são conclusivos para determinar se (x,y) é ponto de extremo da função f;

b) se $\varphi(x,y)$ é ponto de extremo da função ψ então (x,y) é ponto de extremo da função f;

c) verifique que é possivel $\psi'(\varphi(0,0)) = 0$, o ponto $\varphi(0,0)$ não ser ponto de extremo de ψ, e no entanto $(0,0)$ é extremo de f.

(**Sugestão :** considere $\psi(u) = u^3$, e φ verificando $\varphi(x,y) \geq 0$, com $\varphi(0,0) = 0$.)

Soluções

8.

a) $y + yx$ b) $1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ c) 1 d) $x + y$.

9. O polinómio de Taylor de 2^a ordem de ψ é $1+2(y-1)+(x-2)(y-1)+(y-1)^2$. O valor aproximado de $(0,95)^{2,01}$, dado pelo polinómio de Taylor de 2^a ordem é $1,001$.

10. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (z-1)(y-1)$