Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exercícios Suplementares 2

(Eng^a e Arquitectura Naval, Eng^a Civil, Eng^a do Território)

Integral de Riemann

1. Calcule

$$\text{a)}\ \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx\,,\quad \text{b)}\ \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx\,,\quad \text{c)}\ \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x\,dx\,,\quad \text{d)}\ \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\,dx\,.$$

2. Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\text{a)}\ \int_1^x \sin(t^2)\,dt\,,\quad \text{b)}\ \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\,dt\,,\quad \text{c)}\ \int_x^{2x} e^{t^2}\,dt\,,$$
$$\text{d)}\ \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt\,,\quad \text{e)}\ \int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t})\,dt\,.$$

3. Sejam $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt\,,$$
$$\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0.$$

a) Mostre que f é uma função par e g é uma função ímpar .
b) Forneça exemplos de funções $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, integráveis em todos os intervalos limitados de $\mathbb{R}$, que verificam as igualdades anteriores e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

4. Calcule as áreas dos seguintes conjuntos:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le |x|\}$,
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge x,\ y \ge x^3,\ y \le 4x\}$.

5. Calcule o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo α.

6. Calcule:

$$\text{a)}\int_0^{\pi} \sin^3 u\,du\,,\quad \text{b)}\int_0^{\pi/3} \frac{8\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx\,,\quad \text{c)}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx\,,$$
$$\text{d)}\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx\,,\quad \text{e)}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\arctan x\,dx\,.$$

7. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2)\,dt\,,$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3}(e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt}\,.$

8. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, mostre que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\int_0^{1/x} f(t)\,dt\right)^x = e^{f(0)}.$$

9. Seja $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ através da expressão $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt$. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e mostre que

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(xF(x)+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ , x>0.$$

(**Sugestão:** considere a mudança de variável $tx=y$.)

10. Relembre que uma função $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T>0$, sse $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T>0$, então

$$F(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

é uma função constante em $\mathbb{R}$.

11. Mostre que, para qualquer $x>0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

12. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $\displaystyle f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt\,,$ b) $\displaystyle g(x)=\int_2^{e^x}\frac{1}{\log t}\,dt\,.$

13. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x} & ,\ \text{se } x\neq 0\\ 0 & ,\ \text{se } x=0\end{cases}\ .$$

a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$,

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\ ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

14. Considere a função de variável real definida por $\psi(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{|t|e^{-t^4}}{1+t^2}\, dt$.

a) Calcule os zeros e o sinal de ψ ;

b) Mostre que $\psi(x) \leq \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} \log\left(\frac{1+t^2}{1+t^4}\right)$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$.

15. Determine a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$,
b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\right\}$,
c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |x| + |y| \geq 1\right\}$,
d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 - 1 \leq y \leq \sinh(x+1)\right\}$,
e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \log x \wedge x \leq a\right\}$, $a > 1$.

Para as três ultimas regiões acima, determine o comprimento da linha que serve de fronteira à região em causa.

Soluções

1.

a) $\log 2$ b) $\log \frac{1}{2}$ c) $\log \sqrt{\frac{2}{e}}$ d) 0

2.

a) $\sin x^2$ b) $-\cos x^2$ c) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$ d) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

e) $4x^3 \sin(x^2) - 2x \sin(|x|)$

4.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{15}{4}$

5.

$r\alpha$

6.

a) $\frac{4}{3}$ b) $\log 49$ c) $\arctan(\frac{3}{4})$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\log 16$

7.

a) $-\frac{\sin \pi^2}{4}$ b) $\frac{2}{3}$

12.

a) o domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R}$; $f(x)$ é crescente em $\mathbb{R}^+$; $f(x)$ é decrescente em $\mathbb{R}^-$; $f(x)$ tem mínimo absoluto em 0 ;

b) o domínio de $g(x)$ é $\mathbb{R}^+$; $g(x)$ é estritamente crescente no seu domínio; $g(x)$ não tem extremos locais .

13.

b) $$\Psi'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

14.

a) Os zeros são 0 e 1. A função ψ é positiva no intervalo $]\,0, 1\,[$ e negativa em $]-\infty, 0\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[$.

15.

As áreas são, respectivamente:

a) 2 b) 4 c) $\pi - 2$ d) $\frac{1}{3} + \cosh(2)$ e) $a\,(\log a - 1) + 1$

Os comprimentos são, respectivamente:

c) $2\pi + 4\sqrt{2}$ d) $3\sinh 2 + \sinh \log(\sqrt{5} - 2)^2 + \log \sqrt{\sqrt{5} - 2}$

e) $\log\left(\frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{a^2+1}-1}\right) + \coth \log\left(\sqrt{2} - 1\right) - \coth \log\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}\right) + (a-1) + \log a.$