INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

2 ^{o} Exame: LEAN, LEBM, LEFT e LMAC
Campus da Alameda, 5 de Julho de 2006

I

[3,0] **1.**

a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$x\sqrt{1-x^2}\,, \quad \frac{e^{3x}}{3+e^{3x}}\,, \quad \frac{x}{4+x^4}\,.$$

b) Desenvolva em série de potências de x uma primitiva da ultima função considerada na alínea anterior, e indique o conjunto dos números reais para os quais a soma da série encontrada representa a respectiva função.

[2,5] **2.** Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}\,dx\,.$$

[1,5] **3.** Determine a área da região plana delimitada pelo gráfico da função $\arccos x$, pela recta tangente ao gráfico da função $\arccos x$ no ponto $(0,\pi/2)$ e pela recta de equação cartesiana $y=0$.

[2,5] **4.** Considere uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{\arctan x} g(t)\,dt}{x^2}\,.$$

II

[3,0] **1.** Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x,y)=f(x^2+y,x\sin y),\ \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}.$$

Mostre que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,\pi/2)-2\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,\pi/2)=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\pi/2,0),$$

onde v designa a segunda variável de f.

[3,0] **2.** Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\phi(a,b) = (0, \pi/2)$ e $\phi'(a,b)$ é a aplicação linear L definida por

$$L(x,y) = (x + 2y, 3x - 4y),\ \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}.$$

a) Determine $\frac{\partial \phi}{\partial w}(a,b)$, onde $w = (1, 1/2)$.

b) Sendo $h = \varphi \circ \phi$ (onde φ é a função definida em **II 1.**), calcule $h'(a,b)$.

III

[2,5] **1.** Considere a função definida por

$$f : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\right\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = x^4 y^7 (1 - x - y),$$

e o conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\right\}$.

a) Prove que a restrição de f ao conjunto A tem máximo e mínimo, respectivamente denotados por M e m. Determine m.

b) Prove que M é máximo de f (e não apenas máximo da restrição de f ao conjunto A).

c) Justifique que o contradomínio de f é o conjunto $]-\infty, M\,]$.

[2,0] **2.** Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{x} = \alpha,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Prove que f tem um ponto de inflexão na origem.

b) Supondo $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que a conclusão da alínea anterior é falsa.