Capítulo 9

Equação do calor – Separação de variáveis, solução com séries de Fourier e princípios de máximo

9.1 Introdução

Neste capítulo considera-se a resolução de problemas para a **equação do calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

pelo método de separação de variáveis com séries de Fourier.

Já se referiu noutros capítulos que esta equação é um exemplo de equações consideradas na modelação de processos de difusão. Como a equação das ondas, a equação do calor desempenhou um papel especial no desenvolvimento das séries de Fourier, nomeadamente através do trabalho do próprio J. Fourier realizado entre 1804 e 1807 e publicado em 1822 com o título *Théorie Analytique de la Chaleur*.

Na introdução ao capítulo **??** viu-se que esta equação é parabólica e que as equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem em duas variáveis

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots = 0\ ,$$

onde $\cdots$ representa termos de ordem inferior e pelo menos um dos coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ é diferente de zero, são parabólicas se $B^2 - 4AC = 0$. Também se viu que neste caso, se A for diferente de zero a mudança de variáveis $\alpha = \sqrt{A}\,t$, $\beta = 2Ax - Bt$ transforma a equação na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \cdots = 0\ .$$

Se esta equação não tem termos de ordem inferior esta equação tem solução geral $u(\alpha,\beta) = p(\beta) + \alpha\, q(\beta)$, onde p, q são funções C^2 arbitrárias. Nas coordenadas iniciais (t,x) esta solução pode ser vista como a soma de uma onda que se move com velocidade $B/2A$ ao longo do eixo do x com uma outra onda que se move com a mesma velocidade e no mesmo sentido mas com amplitude crescente proporcionalmente ao tempo t. Concluiu-se que, em contraste com as equações hiperbólicas que têm duas famílias de projecções características transversais, as equações parabólicas têm apenas uma família de projecções características com equações cartesianas $\beta = c$, ou seja $2Ax - Bt = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. A mudança para as variáveis (α,β) corresponde a adoptar um sistema de coordenadas ortogonal com o eixo dos β paralelo às projecções características. A existência de apenas uma família de características indica que num problema de valor inicial para uma equação parabólica não podem ser simultaneamente especificados os valores da solução e da sua derivada num instante inicial, em contraste com o que se verificou para as equações hiperbólicas.

9.2 Equação do calor num intervalo

Um modelo simples para a evolução do valor da temperatura $u(t,x)$ no instante de tempo t e na posição x numa barra cilíndrica homogénea alinhada ao longo do eixo dos xx (Figura 9.1) é dado pela equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ ,$$

onde $k > 0$ é a constante de difusão térmica. Supõe-se que a barra tem comprimento L e se dispõe ao longo do intervalo do eixo dos xx com extremos $x = 0$ e $x = L$. Supõe-se também que a temperatura em cada uma destas extremidades da barra é mantida constante com os valores T_0 e T_L, respectivamente, pelo que se exige as condições de Dirichlet na fronteira $u(t,0) = T_0$, $u(t,L) = T_L$ para todos os instantes de tempo $t > 0$. Pode-se, então, tentar determinar a evolução da temperatura ao longo da barra em cada instante $t > 0$ a partir de uma distribuição de temperatura inicial $u(0,x) = u_0(x)$, para $x \in [0,L]$.

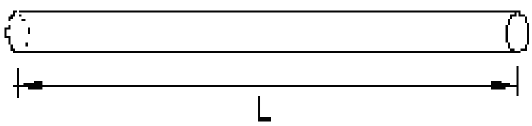

Figura 9.1: Barra cilíndrica homogénea

É fácil observar que $v(t,x) = u(t,x) - (T_0 + x(T_L - T_0)/L)$ satisfaz a mesma equação do calor com condições na fronteira $v(t,0) = v(t,L) = 0$, pelo que basta considerar problemas com estas condições. Tem-se assim um problema de valor inicial com condições de Dirichlet homogéneas na fronteira para a equação do calor na forma

$$
(9.1) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
&u(t,0)=u(t,L)=0 \\
&u(0,x)=u_0(x) \qquad ,
\end{aligned}
$$

para $t \geq 0,\ x \in [0,L]$.

Considera-se **solução** do problema (9.1) qualquer função contínua $u : [0,+\infty[\times[0,L] \to \mathbb{R}$ que é C^2 no interior do domínio, satisfaz as condições na fronteira e a condição inicial dadas, e verifica a equação diferencial considerada em $]0,+\infty[\times]0,L[$. Há situações em que convém considerar outros conceitos de solução do problema, em particular exigindo que a equação seja satisfeita "em média", em torno de cada ponto, em vez de pontualmente em todos os pontos. A consideração de soluções neste sentido mais fraco, se bem que muito importante, sai fora do âmbito deste texto.

A equação diferencial juntamente com as condições na fronteira em (9.1) formam um sistema linear homogéneo no espaço das funções contínuas $u : [0,+\infty[\times[0,L] \to \mathbb{R}$ que são C^2 no interior do domínio. Por isso, é natural procurar obter soluções da equação diferencial que satisfazem as condições na fronteira e, depois, obter a solução do problema de valor inicial por uma sobreposição dessas soluções de forma a satisfazer a condição inicial.

Neste caso, o método de separação de variáveis consiste em procurar soluções para o problema de valor inicial (9.1) da forma $u(t,x)=T(t)X(x)$. Substituindo na equação diferencial dada obtém-se $T'(t)X(x)=kT(t)X''(x)$ e, portanto, em pontos onde $T(t), X(x) \neq 0$ é

$$
\frac{1}{k}\,\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\ .
$$

Nesta equação as variáveis t, x aparecem separadas. O lado esquerdo da equação depende só de t e o direito só de x. Para que a equação se verifique para (t,x) num conjunto aberto conexo e não vazio de $\mathbb{R}^2$ é necessário que ambos os lados da equação sejam iguais a uma mesma constante σ. Assim, o problema de valores na fronteira (9.1) conduz a

$$
(9.2) \qquad \begin{aligned}
&T'(t) - \sigma k\,T(t) = 0 \\
&X''(x) - \sigma X(x) = 0 \\
&T(t)\,X(0)=T(t)\,X(L)=0\ ,
\end{aligned}
$$

para $t \geq 0,\ x \in [0,L]$. As equações diferenciais deste sistema são ordinárias lineares e podem ser resolvidas sem dificuldade. A primeira tem soluções da forma $T(t)=e^{\sigma kt}\,T(0)$. Para obter soluções não nulas é necessário $T(0)\neq 0$. A segunda tem solução geral $X(x) = c_1X_1(x)+c_2X_2(x)$, sendo necessário considerar três casos:

(i) $X_1(x)=1$, $X_2(x)=x$, se $\sigma=0$;

(ii) $X_1(x)=e^{\sqrt{\sigma}\,x}$, $X_2(x)=e^{-\sqrt{\sigma}\,x}$, se $\sigma>0$;

(iii) $X_1(x)=\cos\sqrt{-\sigma}\,x$, $X_2(x)=\sin\sqrt{-\sigma}\,x$, se $\sigma<0$.

Destes três casos apenas o último dá soluções não nulas que satisfazem as condições na fronteira $X(0) = X(L) = 0$. Estas condições exigem $c_1 = 0$ e $c_2 \sin\sqrt{-\sigma}\,L=0$, pelo que só se obtêm soluções não nulas para $\sqrt{-\sigma}\,L=n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$, e estas são da forma $X(x) = c_2\sin(\sqrt{-\sigma}\,x)$. Note-se que $\sqrt{-\sigma} = n\pi$ é equivalente a $\sigma = -n^2\pi^2/L^2$, pelo que se obtêm soluções $u(t,x)=T(t)X(x)$ que são combinações lineares de soluções da forma (Figura 9.2)

$$u_n(t,x) = e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\,, \quad \text{com } n\in\mathbb{N}\,.$$

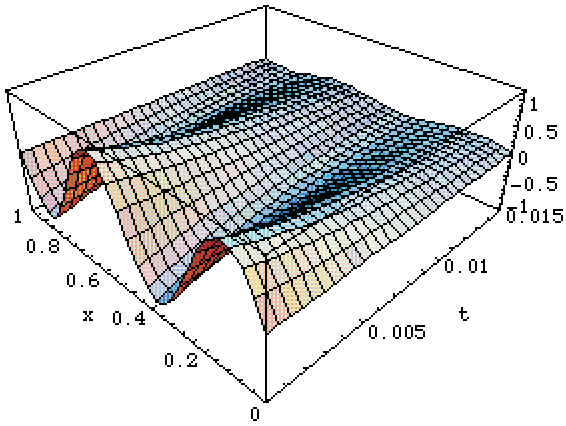

Figura 9.2: Solução u_n da equação do calor em $[0,1]$ com condições nulas na fronteira e condição inicial $u(0,x)=\sin\, n\pi x/L$, $n=4$, $k=L=1$

Para obter soluções deste tipo para o problema (9.1) é preciso que seja satisfeita a condição inicial $u(0,x) = u_0(x)$. No caso em que a condição inicial é uma combinação linear das funções u_n avaliadas em $t=0$, isto é,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{m} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \tag{9.3}$$

com $b_n\in\mathbb{R}$ obtém-se para solução do problema de valor inicial considerado

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{m} b_n\, e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\,. \tag{9.4}$$

No caso em que u_0 não é uma combinação linear finita das funções u_n avaliadas em $t=0$, é natural considerar a possibilidade de representar u_0 como série destas funções e tentar obter soluções do tipo das anteriores, mas dadas por séries em vez de somas finitas. Somos assim conduzidos a considerar séries de Fourier.

9.3 Equação do calor com condições de Dirichlet na fronteira

Na secção 9.2 obteve-se a solução (9.4) problema de valor inicial com valores na fronteira para a equação do calor (9.1) com posição inicial (9.3). Interessa esclarecer se pode haver outras soluções. Uma forma de o fazer baseia-se no **Princípio do Máximo Fraco** estabelecido por E. Levi[1] para a equação do calor em 1907. Este princípio corresponde a observar que a temperatura no interior de uma barra até qualquer instante não pode ultrapassar a temperatura máxima inicial na barra ou na sua fronteira até esse instante.

(9.5) **Princípio do Máximo Fraco:** *Seja* $\varphi:[0,L]\to[0,+\infty[\,$, $S=\{(t,x): t\geq\varphi(x),\ x\in[0,L]\}$ *e* u *uma função contínua em* S *e* C^2 *em* $\operatorname{int} S$, *que satisfaz* $\partial u/\partial t - k\,\partial^2 u/\partial x^2 \leq 0$ *em* $\operatorname{int} S$, *com* $k>0$. *Então, qualquer que seja* $\tau>0$, *para todos os pontos* $(t,x)\in\operatorname{int} S$ *com* $t\leq\tau$ *é* $u(t,x)\leq m\equiv \sup\{u(s,a): (s,a)\in\partial S, s\leq\tau\}$ *(Figura 9.3).*

Dem. Se a conclusão não se verifica, então u assume um valor $M>m$ num ponto $(s,a)\in\operatorname{int} S$ com $s\leq\tau$. Para $\epsilon>0$, define-se $v(t,x)=u(t,x)+\epsilon\,(x-a)^2$. Então, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno verifica-se $\sup\{v(\sigma,y): (\sigma,y)\in\partial S,\ \sigma\leq\tau,\ y\in[0,L]\,\} < m+\epsilon\, L^2 < M$, pelo que $v(s,a)=u(s,a)=M$ implica que v assume um valor máximo $\leftarrow M$ em $\{(t,x)\in\operatorname{int} S: t\leq s\,\}$. Se este máximo é assumido num ponto (t,x) com $t<s$, neste ponto verifica-se $\partial v/\partial t=0$ e $\partial^2 v/\partial x^2\leq 0$, e portanto $\partial v/\partial t - k\partial^2 v/\partial x^2\geq 0$. Se o máximo é assumido em (s,x), neste ponto verifica-se $\partial v/\partial t\geq 0$ e $\partial^2 v/\partial x^2\leq 0$, pelo que $\partial v/\partial t - k\partial^2 v/\partial x^2\geq 0$. Em ambos os casos há uma contradição com $\partial v/\partial t - k\partial^2 v/\partial x^2 = \partial u/\partial t - k\partial^2 u/\partial x^2 - 2k\epsilon \leq -2k\epsilon < 0$. *Q.E.D.*

O Princípio do Máximo Fraco aplicado ao problema (9.1) implica que o valor máximo de uma solução u é atingido em pontos de ∂S. Aplicando o resultado a $-u$ com $m\equiv\inf\{u(t,x):\ (t,x)\in\partial S\}$ obtém-se $-u(t,x)\leq -m$, e é $m\leq u(t,x)$ para $(t,x)\in\operatorname{int} S$. Conclui-se que também o valor mínimo de uma solução da equação do calor é atingido em pontos de ∂S.

[1] Levi, Eugenio (1883-1917).

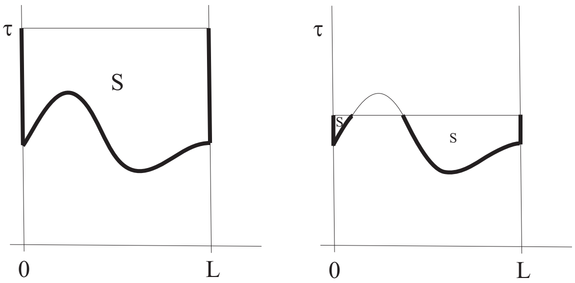

Figura 9.3: Conjunto onde pelo Princípio do Máximo Fraco podem ocorrer máximos de soluções da equação do calor num conjunto $\{(t,x):\ t \geq \varphi(x),\ x \in [0,L]\}$

Aplicando o Princípio do Máximo Fraco obtém-se a unicidade de solução para problemas de valor inicial para a equação do calor não homogénea no intervalo $[0,L]$ com condições que fixam o valor da solução na fronteira, mesmo que não seja zero. Na verdade, se u e v são soluções de

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \\ &u(t,0) = g_0(t),\ \ u(t,L) = g_L(t) \\ &u(0,x) = u_0(x) \end{aligned} \qquad , \tag{9.6}$$

para $t \geq 0$, $x \in [0,L]$, com $k > 0$ e u_0 uma função contínua em $[0,L]$ tal que $u_0(0) = u_0(L)$ então $w = u - v$ é solução do problema homogéneo correspondente, com $w(t,0) = w(t,L) = w(0,x) = 0$ para $t \geq 0$, $x \in [0,L]$, e $f = 0$, pelo que o Princípio do Máximo Fraco implica $|w(t,x)| \leq \max\{|w(t,0)|, |w(t,L)|, |w(0,x)|:\ t \geq 0,\ x \in [0,L]\} = 0$, e consequentemente $u - v = w = 0$, ou seja as soluções u e v são iguais.

Além da unicidade de solução, o Princípio do Máximo Fraco garante a dependência contínua das soluções do problema (9.1) em relação aos dados, ou seja que é um problema bem posto no sentido de Hadamard. Mais precisamente, se $\overline{u}$ é a solução de

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} = 0 \\ &\overline{u}(t,0) = \overline{g}_0(t),\ \ \overline{u}(t,L) = \overline{g}_L(t) \\ &\overline{u}(0,x) = \overline{u}_0(x) \end{aligned} \qquad , \tag{9.7}$$

onde $\overline{u}_0$ é uma função contínua em $[0,L]$ tal que $\overline{u}_0(0) = \overline{u}_0(L)$, então, de forma análoga ao que se fez para estabelecer a unicidade de solução, mas com $w = u - \overline{u}$, obtém-se $|u(t,x) - \overline{u}(t,x)| \leq \max\{|g_0(\tau) - \overline{g}_0(\tau)|, |g_L(\tau) - \overline{g}_L(\tau)|, |u_0(x) - \overline{u}_0(x)|:\ \tau \in [0,t], x \in [0,L]\}$, pelo que $u \to \overline{u}$ uniformemente em $[0,t] \times [0,L]$, quando $g_0 \to \overline{g}_0$, $g_L \to \overline{g}_L$, $u_0 \to \overline{u}_0$ uniformemente em $[0,t]$ e em $[0,L]$, conforme o caso.

A argumentação precedente, juntamente com o que foi estabelecido na secção anterior, garante que o problema de valor inicial com condições na fronteira para a equação do calor (9.1) e condição inicial da forma (9.3), tem solução única dada por (9.4).

Assim, é natural considerar o caso de u_0 não ser uma combinação linear finita das funções $\sin n\pi x/L$ mas ter representação em série de Fourier.

Supõe-se que $u_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua com $u_0(0) = u_0(L) = 0$ e com desenvolvimento em série de Fourier uniformemente convergente

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\pi x/L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\ , \tag{9.8}$$

com $c_n = -c_{-n} = -ib_n/2$, $b_n \in \mathbb{R}$. Qualquer função u_0 definida e contínua em $[0, L]$ com valores nulos nos extremos deste intervalo pode ser definida em $[L, 2L]$ de forma à sua extensão periódica de período $2L$ a todo $\mathbb{R}$ ser ímpar, isto é, $u_0(x) = -u_0(2L - x)$ para $x \in [0, L]$. Resulta do estudo anterior que a série de Fourier de u_0 é da forma (9.8).

A propriedade (**??**.**??**) pode ser usada para obter majorações dos coeficientes de Fourier. Nomeadamente, se $M = (2/L)\, \|u_0\|_{L^1([0,L])}$, então $|b_n| = 2|c_n| \leq M$. Logo, a série

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}\ , \tag{9.9}$$

é dominada em valor absoluto pela série $\sum M\, e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$. Esta série converge uniformemente em $[t_0, +\infty[$, com $t_0 > 0$, pelo que a série em (9.9) também é uniformemente convergente em $[t_0, +\infty[\times[0, L]$. Como os termos da série são funções contínuas e a série converge uniformemente, conclui-se que a função u é contínua em $]0, +\infty[\times[0, L]$. Por outro lado, a série que se obtém desta derivando-a termo a termo em relação a t é dominada em valor absoluto pela série $\sum M(n\pi/L)^2 k\, e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$ que também é uniformemente convergente em $[t_0, +\infty[$, com $t_0 > 0$, pelo que a derivada parcial de u em relação a t existe em $]0, +\infty[\times[0, L]$ e é igual à soma da série obtida derivando (9.9) termo a termo em relação a t. De modo semelhante, conclui-se que as séries obtidas de (9.9) derivando a série termo a termo uma e duas vezes em relação a x são dominadas em valor absoluto pela série $\sum M(n^2\pi/L)\, e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$ e, consequentemente, convergem uniformemente em $[t_0, +\infty[\times]0, L[$, com $t_0 > 0$, pelo que as derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem de u em relação a x existem em $]0, +\infty[\times]0, L[$ e são iguais às somas das séries que se obtêm derivando (9.9) termo a termo em relação a x uma e duas vezes, respectivamente. Em consequência, para $t > 0$, $x \in]0, L[$, é

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2} + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] = 0\ ,$$

pelo que a função u definida em (9.9) satisfaz a equação do calor considerada em $]0,+\infty[\times]0,L[$ (Figura 9.4).

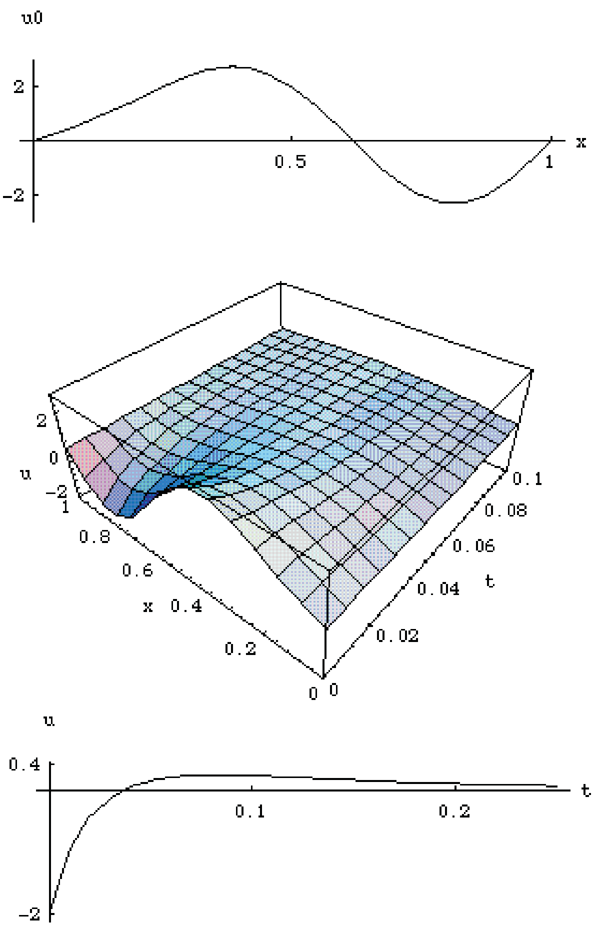

Figura 9.4: Solução da equação do calor com valor zero na fronteira para $k=1$ e a condição inicial no topo; em baixo vê-se a solução ao longo do tempo no ponto $x=3/4$

É óbvio que as condições na fronteira também são satisfeitas porque todos os termos da série em (9.9) se anulam para $x=0$ e $x=L$. Por outro lado, fazendo $t=0$ na série, obtém-se a série que converge para u_0 em (9.8). Para concluir a verificação de que a função u definida em (9.9) é solução do problema de valor inicial com valores na fronteira (9.6) e condição inicial u_0 dada por (9.8), resta provar que u também é contínua nos pontos do segmento onde se definem as condições iniciais $\{0\}\times[0,L]$. Como, por hipótese, a série de u_0 é uniformemente convergente em $[0,L]$, qualquer que seja $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que a sucessão de somas parciais dessa série $\{S_n(x,u_0)\}$ satisfaz $|S_m(x,u_0)-u_0(x)|<\epsilon$ para $x\in[0,L]$, $m\geq N$ e, portanto, $|S_m(x,u_0)-S_n(x,u_0)|<2\epsilon$ para $x\in[0,L]$, $m,n\geq N$. Por outro lado, a sucessão de somas parciais $\{S_n(t,x,u)\}$ da série que define u em (9.9) é tal que a função $(t,x) \mapsto S_m(t,x,u) - S_n(t,x,u)$ satisfaz a equação do calor em $]0,+\infty\times]0,L[$ e as condições na fronteira, e tem condição inicial em $t=0$ tal que $|S_m(0,x,u)-S_n(0,x,u)| = |S_m(x,u_0) - S_n(x,u_0)| \leq 2\epsilon$ para $x \in [0,L]$. Do Princípio do Máximo Fraco resulta $|S_m(t,x,u)-S_n(t,x,u)| \leq 2\epsilon$ para $t \geq 0$, $x \in [0,L]$, $m,n \geq N$ e, portanto, a sucessão $\{S_n(t,x,u)\}$ converge uniformemente em $[0,+\infty[\times[0,L]$, pelo que $u(t,x) \to u_0(x_0)$ quando $(t,x) \to (0,x_0)$ para todo $x_0 \in [0,L]$.

Prosseguindo com derivações sucessivas da série em (9.9) que dá a solução u, de forma semelhante ao que foi feito acima para $\partial u/\partial t$ e $\partial^2 u/\partial x^2$, pode-se concluir que a solução é de classe C^∞ em $]0,+\infty[\times]0,L[$, mesmo que a condição inicial u_0 não tenha derivadas para além da primeira. Portanto, a equação do calor tem um efeito regularizador drástico, pois irregularidades iniciais são instantaneamente suavizadas, o que é uma característica dos processos de difusão.

Uma outra observação interessante é que qualquer que seja a condição inicial do tipo considerado, a solução satisfaz $|u(t,x)| \leq \sum M e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$, para $t>0$, $x \in [0,L]$, pelo que os seus valores máximo e mínimo convergem exponencialmente para zero quando $t \to +\infty$, o que está de acordo com a expectativa da temperatura tender para um equilíbrio em que toda a barra tem a temperatura das extremidades. As componentes de Fourier que compõem a solução convergem para zero tanto mais rapidamente quanto maior for n, ou seja quanto mais oscilações tiverem.

Ficou estabelecido o resultado seguinte.

(9.10) **Teorema:** *Se u_0 tem série de Fourier da forma em (9.8) uniformemente convergente em $[0,L]$ e $u_0(0) = u_0(L) = 0$, em particular se u_0 é contínua e tem derivada integrável à Riemann em $[0,L]$, então o problema de valor inicial para a equação do calor com condições de Dirichlet na fronteira (9.1) tem solução única u dada pela série em (9.9) para $(t,x) \in [0,+\infty[\times[0,L]$, com a série uniformemente convergente neste conjunto. O problema é bem posto no sentido de Hadamard, mais precisamente, se u é solução do problema de valor inicial e $\overline{u}$ é solução do mesmo problema com dados $\overline{u}_0$ em vez de u_0, então $u \to \overline{u}$ uniformemente em $[0,+\infty[\times[0,L]$, quando $u_0 \to \overline{u}_0$ uniformemente em $[0,L]$. Além disso, a solução é C^∞ em $]0,+\infty[\times[0,L]$ e converge para zero uniforme e exponencialmente quando $t \to +\infty$.*

9.4 Equação do calor com condições de Neumann na fronteira

Por vezes é preciso resolver a equação do calor com condições na fronteira diferentes das consideradas nas secções anteriores. Na secção 9.2 viu-se como se pode reduzir a situação em que as extremidades da barra são mantidas a temperaturas fixas diferentes de zero à situação de condições na fronteira nulas. Em certos casos pretende-se considerar uma ou ambas extremidades da barra isoladas termicamente, de modo a não haver fluxo de calor, o que corresponde a exigir a condição na fronteira $\partial u/\partial x = 0$. Há muitas outras situações de interesse que podem ser analisadas com os métodos anteriores, baseados em separação de variáveis e séries de Fourier.

Para dispor de mais um exemplo para a equação do calor considera-se aqui também a situação de uma barra isolada termicamente em ambas as extremidades, o que corresponde ao problema de valor inicial com valores na fronteira

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 \qquad\qquad (9.11)\\
&u(0,x) = u_0(x) \qquad\qquad ,
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$, $x \in [0,L]$, com $k > 0$. A este tipo de condições na fronteira chama-se **condições de Neuman**[2].

Considera-se **solução** do problema (9.11) num conjunto $[0,T]\times[0,L]$ qualquer função contínua $u:[0,T]\times[0,L]\to\mathbb{R}$ que é C^2 e satisfaz a equação diferencial no interior do domínio, tal que $u(t,x)$ tem primeira derivada em relação a x contínua também nos pontos da fronteira de $[0,T]\times\{0\}$ e $[0,T]\times\{L\}$, e satisfaz as condições na fronteira e a condição inicial dadas.

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções para o problema de valor inicial dado da forma $u(t,x)=T(t)X(x)$. Substituindo na equação diferencial obtêm-se as mesmas equações diferenciais para as funções T e X que foram obtidas para o problema com condições de Dirichlet, mas a última função passa a ter de satisfazer a condição na fronteira $X'(0) = X'(L) = 0$ em vez de $X(0) = X(L) = 0$. Assim, para $u(t,x) = T(t)X(x)$ ser solução do problema (9.11) tem de existir uma constante σ tal que

$$\begin{aligned}
&T'(t) - \sigma k\, T(t) = 0\\
&X''(x) - \sigma X(x) = 0 \qquad\qquad (9.12)\\
&T(t)\, X'(0) = T(t)\, X'(L) = 0\ ,
\end{aligned}$$

para $t > 0$, $x \in [0,L]$. Resolvendo estas equações obtêm-se soluções

[2]Neumann, Karl Gottfried (1832-1925).

$u(t,x)=T(t)X(x)$ que são combinações lineares das soluções

$$u_n(t,x)=e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\,,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,.$$

No caso em que a condição inicial não é combinação linear das funções u_n avaliadas em $t=0$ é natural tentar representar u_0 por uma série de Fourier uniformemente convergente em $[0,L]$ da forma

$$u_0(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,e^{in\pi x/L}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,, \tag{9.13}$$

com $c_n=c_{-n}=a_n/2,\ a_n\in\mathbb{R}$. Qualquer função contínua $u_0:[0,L]\to\mathbb{R}$ com valores iguais nos extremos do intervalo pode ser definida no intervalo $[L,2L]$ de forma a que a sua extensão periódica de período $2L$ a todo $\mathbb{R}$ seja par, isto é, $u_0(x)=u_0(2L-x)$ para $x\in[0,L]$. Resulta do estudo anterior que a série de Fourier da função u_0 é da forma (9.13). Sabe-se do teorema (**??**) que a série de Fourier converge uniformemente para u_0 se esta função é contínua em $[0,L]$ e tem derivada integrável à Riemann neste intervalo.

Como anteriormente para o caso de condições de Dirichlet na fronteira, procura-se provar que uma solução do problema de valor inicial (9.11) é dada por séries de Fourier na forma (Figura 9.5)

$$u(t,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,. \tag{9.14}$$

A confirmação que esta função é solução do problema (9.11) pode ser feita de forma semelhante à usada para justificar a solução obtida por séries de Fourier para o problema com condições de Dirichlet na fronteira. Na verdade, tal como anteriormente, da propriedade (**??.??**) sabe-se que $|a_n|=2|c_n|\le M$, com $M=(2/L)\,\|u_0\|_{L^1([0,L])}$. Portanto, a série em (9.14), assim como as séries obtidas derivando-a termo a termo uma vez em relação a t e uma e duas vezes em relação a x são dominadas em valor absoluto por um múltiplo da série $\sum n^2e^{-n^2\pi^2kt/L^2}$. De forma análoga ao que se fez para condições de Dirichlet, prova-se que a função u definida em (9.14) satisfaz a equação diferencial em $]0,+\infty[\times]0,L[$ e é contínua em $]0,+\infty[\times[0,L]$. A verificação das condições na fronteira é imediata, uma vez que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\frac{n\pi}{L}\,e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,.$$

e esta série é uniformemente convergente em $[t_0,+\infty[\times[0,L]$, para $t_0>0$, pelo que a sua soma é contínua neste conjunto. Avaliando a expressão anterior em $x=0$ e em $x=L$ obtém-se $\partial u/\partial x(t,0)=\partial u/\partial x(t,L)=0$.

Resta provar que a função u também é contínua nos pontos em que $t=0$, ou seja, que $u(t,x)\to u_0(x)$ quando $t\to 0+$. A verificação desta propriedade

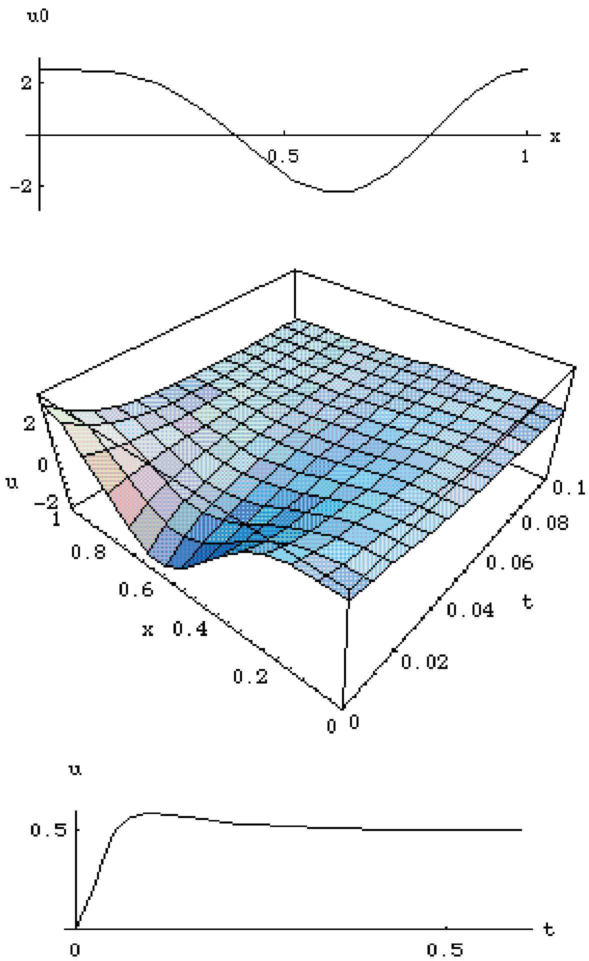

Figura 9.5: Solução da equação do calor com condições de Neumann nulas para $k = 1$ e a condição inicial no topo; em baixo vê-se a solução ao longo do tempo no ponto $x = 3/4$

no caso anterior baseou-se no Princípio do Máximo Fraco (9.5), mas neste caso este resultado não pode ser directamente aplicado porque os valores de uma solução u na fronteira do intervalo $[0, L]$ não são conhecidos *a priori*. Pela mesma razão, a unicidade de solução do problema com condições de Neumann também não pode ser obtida directamente a partir do Princípio do Máximo Fraco. Estas questões podem ser resolvidas com base no Princípio do Máximo Forte para a equação do calor, estabelecido por L. Nirenberg[3] em 1953, segundo o qual o valor máximo não pode ocorrer no interior do domínio da solução, e num resultado obtido com base no Princípio do Máximo Forte em 1958 por A. Friedman[4], segundo o qual o valor máximo das soluções só

[3] Nirenberg, Louis (1925-).
[4] Friedman, Avner (1932-).

pode ocorrer no instante inicial ou em pontos da fronteira com derivada para o exterior positiva. Estes resultados, bem como dois resultados auxiliares usados para os demonstrar são aqui formulados de modo a aplicarem-se também para mínimos de soluções da equação do calor, por consideração de máximos de funções simétricas de soluções da equação do calor.

(9.15) **Proposição:** *Seja* $(t, x) \mapsto u(t, x)$ *uma função* C^2 *num conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$*, onde satisfaz* $\partial u/\partial t - k\,\partial^2 u/\partial x^2 \leq 0$*, com* $k > 0$*, e seja* C *um círculo fechado contido em* U *de raio* $R > 0$ *e centro no ponto* (s, a)*. Se o máximo valor de* u *em* C *só é assumido em pontos da fronteira, então só pode ser ocorrer nos pontos* $(s+R, a)$ *ou* $(s-R, a)$*.*

Dem. Supõe-se $u < m$ no interior de C e $p = (t_0, x_0) \in \partial C$ tal que $u(p) = m$. Sem perda de generalidade, pode-se supor que p é o único ponto na circunferência ∂C onde $u = m$; caso contrário toma-se para C um círculo de raio inferior contido no círculo inicialmente considerado e com as circunferências que os delimitam tendo em comum apenas o ponto p.

Suponha-se que $x_0 \neq a$. Considera-se um círculo fechado $C_1 \subset U$ de centro p e raio $R_1 < R$. Seja A' o arco da circunferência que delimita C_1 contido em C e seja A'' o arco complementar nessa circunferência (Figura 9.6). Como A' é um conjunto compacto onde a função u é contínua e $u < m$, esta função assume em A' um valor máximo menor do que m. Considera-se a função

$$v(t, x) = e^{-\alpha[(t-s)^2 + (x-a)^2]} - e^{-\alpha R^2} .$$

Para $\alpha > 0$ a função v é positiva, nula e negativa, respectivamente no interior, na fronteira e no exterior de C. Além disso, tomando $\alpha > 0$ suficientemente grande verifica-se para $(t, x) \in C_1$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - k\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = -2\alpha\, e^{-\alpha[(t-s)^2 + (x-a)^2]} \big[t - s + 2\alpha k (x-a)^2 - k\big] < 0 .$$

Define-se a função $w = u + \epsilon v$ com $\epsilon > 0$ tão pequeno que $w < m$ em A', e observa-se que $\partial w/\partial t - k\,\partial^2 w/\partial x^2 < 0$ em C_1. Como v é negativa no exterior de C, é $w < m$ em A'', pelo que $w < m$ em toda a fronteira de C_1. Além disso, $w(p) = u(p) + \epsilon\, v(p) = u(p) = m$. Assim, w assume um valor máximo num ponto interior a C_1. Neste ponto verifica-se $\partial w/\partial t = 0$, $\partial^2 w/\partial x^2 \leq 0$, pelo que $\partial w/\partial t - k\,\partial^2 w/\partial x^2 \geq 0$, em contradição com o que tinha sido observado. Portanto tem de ser $x_0 = a$ e, então, $p = (s+R, a)$ ou $p = (s-R, a)$. *Q.E.D.*

O resultado seguinte corresponde a observar que a temperatura no interior de uma barra só pode ter um máximo local num ponto e num certo instante se esse valor máximo for assumido em todos os pontos de uma vizinhança do ponto considerado.

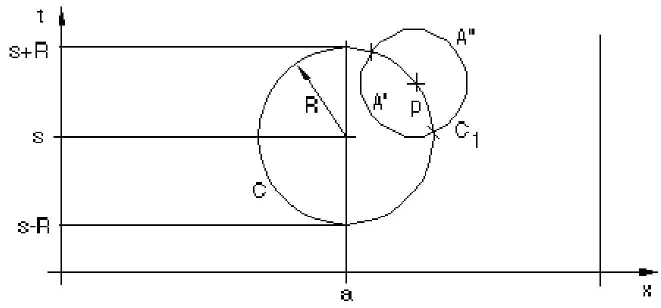

Figura 9.6: Ilustração para apoio à demonstração da proposição (9.15)

(9.16) **Proposição:** *Seja* $(t,x) \mapsto u(t,x)$ *uma função* C^2 *num aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$ *onde satisfaz* $\partial u/\partial t - k\,\partial^2 u/\partial x^2 \le 0$, *com* $k > 0$. *Se* u *tem um máximo* m *em* U, *então em cada segmento de recta com* t *constante contido em* U *é* $u = m$ *em todo o segmento ou* $u < m$ *em todo o segmento.*

Dem. Seja $(\sigma_0, y_0) \in U$ tal que $u(\sigma_0, y_0) = m$. Suponha-se que existe y_1 tal que $u(\sigma_0, y_1) < m$ e o segmento de recta que une (σ_0, y_0) a (σ_1, y_1) está contido em U. Pode-se admitir sem perda de generalidade que entre os dois pontos considerados é $u < m$; caso contrário é possível tomar para (σ_0, y_0) o ponto mais próximo de (σ_0, y_1) entre os dois pontos anteriores onde $u = m$. Para ser específico considera-se $y_0 < y_1$, sendo o caso da desigualdade inversa tratado de forma idêntica. Define-se para cada y entre y_0 e y_1 uma função d por $d(y) = \min\{|(\sigma_0, y) - (t,x)| : (t,x) \in U, u(t,x) = m\}$. É claro que $d(y) \le y - y_0$. Sejam $0 < \delta < \min\{d(y), y_1\}$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para $\{(t,x) : |t - \sigma_0| \le \delta/n$ e $y \le x \le y + \delta\} \subset U$. Subdivide-se o intervalo entre y e $y+\delta$ em n partes iguais, separadas pelos pontos $y_j = y + j\delta/n$, com $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Da proposição (9.15), para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ é $u(\sigma_0 + d(y_j), y_j) = m$ ou $u(\sigma_0 - d(y_j), y_j) = m$. Como o quadrado da distância entre os pontos (σ_0, y_{j+1}) e $(\sigma_0 \pm d(y_j), y_j)$ é $d(y_j)^2 + (\delta/n)^2$, verifica-se

$$d(y_{j+1})^2 \le d(y_j)^2 + (\delta/n)^2 < d(y_j)^2 + (\delta/n)^2 + \frac{(\delta/n)^4}{4\,d(y_j)^2} = \left[d(y_j) + \frac{(\delta/n)^2}{2\,d(y_j)} \right]^2 .$$

Por outro lado, como o quadrado da distância do ponto (σ_0, y_j) aos pontos $(\sigma_0 \pm d(y_{j+1}), y_{j+1})$ é $d(y_{j+1})^2 + (\delta/n)^2$, obtém-se $d(y_j)^2 \le d(y_{j+1})^2 + (\delta/n)^2$. Tirando raízes quadradas nas desigualdades anteriores obtém-se

$$d(y_{j+1}) - d(y_j) \le \frac{(\delta/n)^2}{2\,d(y_j)}, \qquad d(y_{j+1}) \ge \sqrt{d(y_j)^2 - (\delta/n)^2}\,.$$

Portanto

$$d(y_{j+1}) - d(y_j) \le \frac{\delta^2}{2\,n^2 d(y_j)} \le \frac{\delta^2}{2\,n^2 \sqrt{d(y)^2 - \delta^2}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

Adicionando os termos no lado direito da desigualdade anterior de $j=0$ a $j=n-1$ obtém-se

$$d(y+\delta)-d(y) \leq \frac{\delta^2}{2\,n\sqrt{d(y)^2-\delta^2}}\,.$$

Fazendo $n \to +\infty$ obtém-se $d(y+\delta) \leq d(y)$, pelo que d é uma função decrescente. Como $d(y) \leq y-y_0$ pode ser tornado arbitrariamente pequeno à custa de tomar y suficientemente próximo de y_0, segue-se que $d(y)=0$ para y entre y_0 e y_1. Logo, $u(\sigma_0,y)=m$ para y neste intervalo, o que contradiz $u(\sigma_0,y)<m$ para y entre y_0 e y_1. Conclui-se que se $(\sigma_0,y_0)\in U$ e $u(\sigma_0,y_0)=m$ então $u=m$ em todo o segmento da recta $y=y_0$ contido em U que passa no ponto (σ_0,y_0), e também que $(\sigma_0,y_0)\in U$ e $u(\sigma_0,y_0)<m$ implica $u(\sigma_0,y)<m$ em todo o segmento de recta. *Q.E.D.*

Estamos agora em condições de provar o Princípio de Máximo Forte para a equação do calor estabelecido por L. Nirenberg em 1953. Este princípio corresponde a observar que a temperatura no interior de uma barra até qualquer instante tem de ser estritamente inferior à temperatura máxima inicial na barra ou nas suas extremidades até esse instante, a não ser que a temperatura em toda a barra seja constante até ao instante considerado, caso em que a barra está inicialmente a uma temperatura constante e a temperatura nas suas extremidades é mantida igual a essa temperatura até ao instante considerado.

(9.17) **Princípio do Máximo Forte:** *Seja* $\varphi:[0,L]\to[0,+\infty[$, $S=\{(t,x)\colon\, t\geq\varphi(x),\ x\in[0,L]\,\}$ *e* u *uma função contínua em* S *e* C^2 *no seu interior que satisfaz* $\partial u/\partial t-k\,\partial^2u/\partial x^2\leq 0$ *no interior de* S*, com* $k>0$*. Então, qualquer que seja* $\tau>0$*, verifica-se a alternativa seguinte:*

(i) para todos os pontos (t,x) *no interior de* S *com* $t\leq\tau$ *é* $u(t,x)<m\equiv\sup\{u(s,a)\colon\,(s,a)\in\partial S,\, s\leq\tau\,\}$*, ou*

(ii) existe $(t_0,x)\in \operatorname{int} S$ *com* $t_0\leq\tau$ *e* $u(t_0,x)=m$*, e neste caso verifica-se* $u=m$ *em todo* $\{(s,a)\colon\,(s,a)\in S,\ s\leq t_0\,\}$*.*

Dem. Do Princípio do Máximo Fraco (9.5) sabe-se que $u(t,x)\leq m$ para todos os pontos $(t,x)\in\operatorname{int} S$ com $t\leq\tau$. Supõe-se que u assume o valor máximo m num ponto (t_0,x_0) interior a S com $t_0\leq\tau$ e que existe pelo menos um ponto (t_1,x_1) interior a S com $t_1\leq t_0$ tal que $u(t_1,x_1)<m$. Seja $t_2=\sup\{t:\,u(t,x_1)<m,\ t<t_0\}$. Dado que u é contínua, $u(t_2,x_1)=m$ e existe $t_3<t_2$ tal que $u(t,x_1)<m$ para $t\in[t_3,t_2[$. A proposição anterior implica $u<m$ em $[t_3,t_2[\times[0,L]$ e $u(t_2,x)=m$ para $x\in[0,L]$. Define-se a função

$$f(t,x)=e^{-[\beta(t-t_2)+(x-x_1)^2]}-1$$

e toma-se $\beta > 0$ suficientemente grande para ser

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) - k\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -e^{-[\beta(t-t_2)+(x-x_1)^2]}\left[\beta - 4k(x-x_1)^2 + 2k\right] < 0\ ,$$

para todo $(t,x) \in [t_3, t_2[\times [0,L]$. O máximo da função u no conjunto compacto $\{t_3\} \times [0,L]$ é inferior a m. Define-se $g = u + \epsilon f$ com $\epsilon > 0$ tão pequeno que $g = u < m$ em $\{t_3\} \times [0,L]$. No arco da parábola $\beta(t-t_2)+(x-x_1)^2 = 0$ (Figura 9.7) contido na faixa $[t_3, t_2[\times [0,L]$ é $u < m$ e $f = 0$, logo $g < m$. Como em $]t_3, t_2[\times]0,L[$ se obtém $\partial g/\partial t - k^2\,\partial g/\partial x^2 < 0$, a função g não pode ter máximos neste conjunto, pelo que o máximo de g no fecho da região da faixa considerada compreendida entre a parábola e o segmentos de recta $t = t_3$ é m e é assumido apenas no ponto $q = (t_2, x_1)$. Segue-se que $\partial g/\partial t\,(q) \geq 0$ e, uma vez que $\partial f/\partial t\,(q) = -\beta < 0$, é $\partial u/\partial t\,(q) > 0$. Por outro lado, como $u = m$ em $\{t_2\} \times [0,L]$, é $\partial^2 u/\partial x^2\,(q) = 0$, logo $\partial u/\partial t\,(q) - k\,\partial^2 u/\partial x^2\,(q) > 0$ em contradição com a hipótese do teorema. Conclui-se que se $u = m$ num ponto $(t_0, x_0) \in \operatorname{int} S$ com $t_0 \leq \tau$, então $u = m$ em $\{(t,x) \in S,\ t \leq t_0\}$. *Q.E.D.*

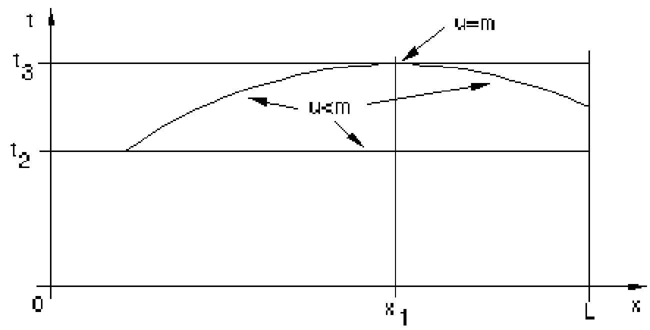

Figura 9.7: Ilustração para apoio à demonstração do Princípio do Máximo Forte (9.17)

O Princípio do Máximo Forte permite observar mais uma importante propriedade geral da equação do calor. Para a ilustrar numa situação simples consideramos o problema de Dirichlet homogéneo para a equação do calor (9.1) com condição inicial dada por uma função u_0 que é C^2 em $[0,L]$ e é nula em todos os pontos deste intervalo excepto num pequeno intervalo de largura $\epsilon > 0$, $I =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset [0,L]$, onde é positiva (Figura 9.8) e tem um valor máximo $M > 0$. O Princípio do Máximo Fraco implica que a solução assume valores entre zero e M. O Princípio do Máximo Forte implica que tanto o valor zero como o valor M só podem ser assumidos num ponto (t_0, x) com $t_0 > 0$, $x \in]0,L[$ se for assumido em todos os pontos (t,x) com $0 \leq t \leq t_0$, $x \in [0,L]$. Portanto, os efeitos dos valores da condição inicial num subintervalo arbitrariamente pequeno de $[0,L]$ propagam-se instantaneamente a todo o intervalo $[0,L]$, logo com velocidade infinita, o que é uma característica dos modelos simplificados de processos de difusão (Figura 9.8). Assim, não só uma condição inicial com descontinuidades nas derivadas é instantaneamente regularizada pela equação do calor dando uma solução C^∞, como se viu na secção anterior, como a velocidade de propagação dos efeitos das condições iniciais é infinita fazendo-se instantaneamente sentir a sua influência em todo o intervalo.

Figura 9.8: Propagação instantânea do efeito de um impulso inicial de largura arbitrariamente pequena a todo o intervalo, com velocidade infinita

Com base no princípio de Máximo Forte pode-se mostrar que o máximo de uma solução da equação do calor não pode ocorrer em pontos da fronteira onde a derivada direccional para o exterior da fronteira é menor ou igual a zero, o que foi estabelecido por A. Friedman em 1958.

(9.18) **Teorema:** *Seja* $S=[0,+\infty[\times[0,L]$*, u uma função contínua em S e C^2 em* $\operatorname{int} S$ *que satisfaz* $\partial u/\partial t-k\partial^2u/\partial x^2\leq 0$ *em* $\operatorname{int} S$*, com* $k>0$*, D o conjunto dos pontos* $p\in\{(\sigma,0),(\sigma,L):\ \sigma>0\}$ *onde a derivada direccional de u na direcção da normal exterior a ∂S no ponto p existe e não é positiva. Se u não é constante, então qualquer que seja* $\tau>0$*, para todo* $(t,x)\in\operatorname{int} S$ *com* $t\leq\tau$ *verifica-se* $u(t,x)<m\equiv\sup\{u(s,a):(s,a)\in\partial S\backslash D,\ s\leq\tau\}$*.*

Dem. Se $M\equiv\sup\{u(s,a):(s,a)\in\partial S, s\leq\tau\}$, o Princípio do Máximo Forte (9.17) garante $u(t,x)<M$ para $(t,x)\in\operatorname{int} S$ com $t\leq\tau$ ou existe $t_0\in]0,\tau]$ tal que $u=M$ para todos os pontos de $\{(s,a)\in S: s\leq t_0\}$. Se $p=(s,y)\in D$ é um ponto onde $u(p)=M>m$, então a segunda possibilidade anterior não se pode verificar. Seja C um círculo contido em S e tangente a ∂S no ponto p. Designa-se o raio e o centro do círculo respectivamente por $R>0$ e (s,a). Considera-se a função definida por

$$v(t,x)=e^{-\alpha[(t-s)^2+(x-a)^2]}-e^{-\alpha R^2}\ .$$

Seja $K=\{(t,x)\in C: t\leq s, |x-y|\leq R/2\}$ (ver Figura 9.9 para o caso $y=L$). Temos $u<M$ em $\partial K\backslash\{p\}$ e $v=0$ em ∂C. Para $\alpha>0$ suficientemente grande verifica-se no conjunto K

$$\frac{\partial v}{\partial t}-k\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-2\alpha e^{-\alpha[(t-s)^2+(x-a)^2]}\left[(t-s)-k+2k\alpha(x-a)^2\right]<0\ .$$

Portanto, para $\epsilon>0$ a função $w=u+\epsilon v$ satisfaz $\partial w/\partial t-k\,\partial^2 w/\partial x^2<0$ em $K\backslash\{p\}$. A fronteira de K consiste na união de: *(i)* um segmento de recta de pontos (t,x) com x constante, *(ii)* um segmento de recta de pontos (t,x) com $t=s$ constante, e *(iii)* um arco da circunferência que limita C. Temos $w=u<M$ no arco de circunferência. também $u<M$ no primeiro segmento de recta e, como este segmento é um conjunto compacto e u é contínua, nesse segmento de recta u assume um máximo menor do que M, pelo que, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno $w<M$ neste segmento de recta. Aplicando novamente o Princípio de Máximo Forte (9.17) conclui-se que $w<M$ em $K\backslash\{p\}$, enquanto $w(p)=M$. Portanto, a derivada direccional de w na direcção da normal exterior a D no ponto p satisfaz $\partial w/\partial\nu\geq 0$. Por outro lado, calculando a derivada de v no ponto p directamente a partir da fórmula que define esta função, obtém-se $\partial v/\partial\nu=-2\,\alpha Re^{-\alpha R^2}<0$. Logo, nesse ponto $\partial\nu=\partial w/\partial\nu-\epsilon\,\partial v/\partial\nu>0$, o que contradiz $p\in D$. Assim, tem de ser $u<M$ em D. Conclui-se que $M\equiv\sup\{u(s,a): (s,a)\in\partial S, s\leq\tau\}=\sup\{u(s,a): (s,a)\in\partial S\backslash D, s\leq\tau\}$. *Q.E.D.*

Figura 9.9: Ilustração para apoio à demonstração do teorema (9.18)

Este resultado aplicado ao problema de valor inicial para a equação do calor com condições de Neumann na fronteira (9.11), para o qual $D=\{(t,0),(t,L):\ t>0\}$, garante que toda a solução u satisfaz

$$\inf\{u_0(x):\ x\in[0,L]\,\}\leq\ u(t,x)\ \leq\sup\{u_0(x):\ x\in[0,L]\,\}\,,$$

para $(t,x)\in[0,+\infty[\,\times[0,L]$. Ou seja, se a barra está isolada termicamente na fronteira, a temperatura no seu interior não pode ultrapassar as temperaturas máxima e mínima da barra no instante inicial. Tal como anteriormente para o problema com condições de Dirichlet, resulta que a função u definida pela série em (9.14) converge para u_0 quando $t \to 0+$. Fica assim provado que u é uma solução do problema de valor inicial para a equação do calor com condições de Neumann na fronteira (9.11).

A unicidade de solução, mesmo para problemas não homogéneos tanto nas condições na fronteira como na própria equação diferencial, resulta de observar que se u e v fossem soluções de tais equações, então $w = u - v$ seria solução do problema homogéneo correspondente com condição inicial nula em $t = 0$. O último teorema anterior implicaria então $w \leq 0$, e o mesmo argumento aplicado a $-w$ daria $w \geq 0$, pelo que $u - v = w = 0$ em $[0, +\infty[\times [0, L]$. O teorema anterior também garante que o problema (9.11) é bem posto no sentido de Hadamard, pois a solução depende continuamente da condição inicial na norma do supremo.

Tal como no caso anterior do problema de Dirichlet para a equação do calor, derivando sucessivamente a série que em (9.14) dá a solução u do problema de Neumann para a equação do calor pode-se concluir que a solução é C^∞ em $]0, +\infty[\times]0, L[$, mesmo que a condição inicial u_0 não tenha derivadas para além da primeira, obtendo-se mais uma vez o drástico efeito regularizador que já tinha sido observado para a equação do calor com condições de Dirichlet na fronteira.

Por outro lado, qualquer que seja a condição inicial do tipo considerado, a solução satisfaz $|u(t,x) - a_0/2| \leq \sum M e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$, para $t > 0$, $x \in [0, L]$, pelo que u converge exponencialmente para a função constante com valor $a_0/2$ em $[0, L]$, quando $t \to +\infty$, o que está de acordo com a expectativa da temperatura convergir para uma situação de equilíbrio com temperatura constante quando a barra está isolada termicamente nas extremidades. Como $u_0(x) = u_0(2L - x)$ para $x \in [0, L]$, é

$$a_0 = 2(u_0)\widehat{\ }(0) = \frac{1}{L} \int_0^{2L} u_0 = \frac{2}{L} \int_0^L u_0 \ ,$$

pelo que $a_0/2$ é a média de u_0 em $[0, L]$ e, portanto, quando $t \to +\infty$ a temperatura converge para a média da temperatura na barra no instante inicial. Tal como anteriormente, os termos que compõem a solução em (9.14) convergem para zero tanto mais rapidamente quanto maior for n, o que mostra que quanto mais oscilações tiver uma componente da série de Fourier da solução mais rapidamente converge para zero.

Ficou estabelecido o resultado seguinte.

(9.19) **Teorema:** *Se u_0 tem o desenvolvimento em série de Fourier (9.13), com a série uniformemente convergente em $[0,L]$, em particular se $u_0(0)=u_0(L)$, e u_0 é contínua e tem derivada integrável à Riemann em $[0,L]$, então o problema de valor inicial para a equação do calor com condições de Neumann homogéneas na fronteira (9.11) tem solução única u dada pela série em (9.14) para $(t,x)\in[0,+\infty[\times[0,L]$ e a série é uniformemente convergente neste conjunto.*

O problema (9.11) é bem posto no sentido de Hadamard, mais precisamente, se u é solução do problema e $\overline{u}$ é solução do mesmo problema com dados $\overline{u}_0$ em vez de u_0, então $u\to\overline{u}$ uniformemente em $[0,+\infty[\times[0,L]$, quando $u_0\to\overline{u}_0$ uniformemente em $[0,L]$. Além disso, a solução é C^∞ em $]0,+\infty[\times]0,L[$ e converge para o valor médio de u_0 em $[0,L]$ uniforme e exponencialmente quando $t\to+\infty$.

9.5 Equações lineares parabólicas de 2ª ordem com coeficientes constantes

Como se viu na introdução do penúltimo capítulo, uma equação diferencial parcial linear parabólica de 2ª ordem com coeficientes constantes e duas variáveis geral

$$A\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+B\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+C\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D\,\frac{\partial u}{\partial t}+F\,\frac{\partial u}{\partial x}+G\,u=H(t,x)\;.$$

pode ser transformada por mudanças de variáveis numa equação da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d\,\frac{\partial u}{\partial t}+f\,\frac{\partial u}{\partial x}+g\,u=h(t,x)\;.$$

Com a mudança de variáveis $u(t,x)=e^{\mu t+\lambda x}v(t,x)$, esta equação é transformada em

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+d\,\frac{\partial u}{\partial t}+(2\lambda+f)\,\frac{\partial u}{\partial x}+\big(\lambda^2+d\mu+f\lambda+g\big)\;v=e^{-(\mu t+\lambda x)}h(t,x)\;.$$

Designa-se $p(t,x)=e^{-(\mu t+\lambda x)}h(t,x)$. Se $d<0$, com $\lambda=-f/2$ e $\mu=-\big(\lambda^2+f\lambda+g\big)/d=\big(4g-f^2\big)/(4d)$, a equação é transformada em

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+d\,\frac{\partial u}{\partial t}=p(t,x)\,,$$

que é a equação do calor não homogénea cuja equação homogénea foi considerada nas secções precedentes. Se $d=0$, com $\lambda=-f/2$, obtém-se a equação

$\partial^2 v/\partial x^2 + \bigl(g - f^2/4\bigr)\, v = 0$ cuja resolução é imediata. Se $d > 0$ obtém-se a equação do calor não homogénea habitual com o sentido do tempo invertido.

Consideramos agora o problema de valor inicial para a equação do calor não homogénea com condições de Dirichlet homogéneas na fronteira

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(t,x) \\ &u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ &u(0,x) = u_0(x) \qquad , \end{aligned} \tag{9.20}$$

para $t \geq 0,\ x \in [0,L]$. Uma equação deste tipo corresponde à condução do calor numa barra na presença de fontes de calor de intensidade $p(t,x)$ no instante t em cada ponto x da barra.

Ficou estabelecido no teorema (9.10) que o problema homogéneo correspondente tem solução única dada pela série em (9.9)

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}\ ,$$

Podemos procurar soluções para a equação não homogénea por uma fórmula de variação das constantes. Para isso, supomos que p é uma função contínua em $[0,+\infty[\times[0,L]$ que para cada $t > 0$ pode ser representada por uma série de Fourier de senos $p(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) \sin\, n\pi x/L$ e consideramos a fórmula de variação das constantes

$$u(t,x) = v(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-n^2\pi^2 k(t-s)/L^2} p_n(s)\, ds\right) \sin\frac{n\pi x}{L}\ . \tag{9.21}$$

Os coeficientes da série de Fourier considerada são

$$p_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L p(t,x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx\ ,$$

pelo que as funções p_n são contínuas em $[0,+\infty[$. Para cada $\tau > 0$, seja $t_\tau \in [0,\tau]$ um ponto onde é assumido o máximo da função contínua p_n no intervalo compacto $[0,\tau]$. A série dos valores absolutos dos termos da série na fórmula de variação das constantes (9.21) é dominada pela série numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} |p_n(t_\tau)| L^2/(\pi^2 k\, n^2)$. Portanto, a série na fórmula de variação das constantes é uniformemente convergente em $K_\tau = [0,\tau]\times[0,L]$. Logo, a soma desta série define uma função contínua em $[0,+\infty[\times[0,L]$. É fácil ver que a soma da série é zero na fronteira deste conjunto, e como v satisfaz as condições iniciais e as condições de fronteira do problema, também u as satisfaz.

Resta identificar condições em que a função definida pela série na fórmula (9.21) é C^1 em t para x fixo, C^2 em x para t fixo e é solução da equação diferencial não homogénea em cada intervalo $]0,\tau[\times]0,L[$. Designando o termo de ordem n da série por u_n verifica-se

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(t,x)$$
$$= \left[p_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} - \frac{n^2\pi^2 k}{L^2}u_n(t,x)\right] + k\frac{n^2\pi^2}{L^2}u_n(t,x) = p_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Considerando as séries com estes termos obtém-se a validade da equação diferencial no problema (9.20), desde que as derivadas possam ser calculadas derivando a série na fórmula de variação das constantes termo a termo uma vez em ordem a t e duas vezes em ordem a x. Estas séries são respectivamente

$$\frac{\pi^2 k}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\int_0^t e^{-n^2\pi^2 k(t-s)/L^2} p_n(s)\,ds\right)\sin\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

$$-\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\int_0^t e^{-n^2\pi^2 k(t-s)/L^2} p_n(s)\,ds\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Basta mostrar que estas séries são uniformemente convergentes em $[0,\tau]\times[0,L]$ para assegurar que as suas somas dão as correspondentes derivadas da função u definida pela fórmula de variação das constantes (9.21) e que estas derivadas são contínuas. Não estamos aqui interessados em identificar hipóteses mínimas para tal se verificar. Para simplificar, supomos que p é C^2 em $[0,\tau]\times[0,L]$. Nestas condições, a proposição (**??**) implica que os coeficientes da série de Fourier $p(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t)\sin n\pi x/L$ satisfazem $|p_n(t)|\le M/n^2$, onde M é o máximo da função contínua $\partial^2 p/\partial x^2$ em $[0,\tau]\times[0,L]$ dividido por $2L$. Logo esta série de Fourier é uniformemente convergente em $[0,\tau]\times[0,L]$. Resta provar a convergência uniforme da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t n^2 e^{-n^2\pi^2 k(t-s)/L^2} p_n(s)\sin\frac{n\pi x}{L}\,ds$$

em $[0,\tau]\times[0,L]$. como

$$\left|\int_0^t n^2 e^{-n^2\pi^2 k(t-s)/L^2} p_n(s)\sin\frac{n\pi x}{L}\,ds\right| \le n^2\frac{L^2}{n^2\pi^2 k}\frac{M}{n^2} = \frac{ML^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2},$$

a série dos valores absolutos dos termos da série considerada é dominada por um múltiplo da série numérica convergente $\sum n^{-2}$, pelo que é uniformemente convergente em $[0,\tau]\times[0,L]$.

Em resumo, provou-se que o problema (9.20) tem uma solução única dada pela fórmula de variação das constantes (9.21) sob a hipótese (excessiva) de p

ser C^2 em $[0,\tau]\times[0,L]$, e u_0 ser contínua com derivada integrável à Riemann em $[0,L]$ e satisfazer $u_0(0)=u_0(L)=0$.

Referiu-se acima a equação do calor com o sentido do tempo invertido[5]. É de notar que esta equação tem um caracter marcadamente diferente da equação do calor. Na verdade, já foi observada a acção fortemente regularizadora da equação do calor. Em particular, condições iniciais C^1 mas sem derivadas contínuas de ordem superior dão origem a soluções definidas para todo $t>0$ que são C^∞ por menor que seja o tempo que decorre desde o instante inicial. Assim, a equação do calor com o sentido do tempo invertido $\partial v/\partial t + k\,\partial^2 v/\partial x^2 = 0$ não tem solução para qualquer condição inicial que não seja C^∞. Se um problema para a equação do calor no intervalo $[0,L]$ tem solução u para uma condição inicial u_0 que não é C^∞, então o correspondente problema para a equação do calor com o sentido do tempo invertido e condição inicial $v(0,x)=u(T,x)$, para qualquer $T>0$, tem solução $v(t,x)=u(T-t,x)$ para $(t,x)\in[0,T[\,\times[0,L]$, mas esta solução não pode ser prolongada para além do instante $t=T$, por mais pequeno que seja $T>0$. Por outro lado, se u_0 é C^∞ e $u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x/L$, a função $v(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{n^2\pi^2 kt} \sin n\pi x/L$ é solução da equação do calor com o sentido do tempo invertido no intervalo $[0,+\infty[\,\times[0,L]$. Estas observações mostram que problemas de valores iniciais para esta equação não são bem postos e que há uma clara irreversibilidade nos processos descritos pela equação do calor.

9.6 Condições de fronteira não homogéneas

Interessa também ver o que acontece com condições na fronteira não homogéneas. Em primeiro lugar, como sempre para equações lineares não homogéneas as soluções de um problema com condições na fronteira não homogéneas podem ser obtidas pela soma de uma solução particular do problema com as soluções da equação homogénea correspondente, incluindo as condições na fronteira. No início deste capítulo já se tinha observado que um problema para a equação do calor $\partial u/\partial t - k\,\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ com condições de Dirichlet na fronteira não homogéneas $u(t,0)=T_0$, $u(t,L)=T_L$ pode ser transformado num com condições de Dirichlet homogéneas simplesmente pondo o problema para a função $v(t,x)=u(t,x)-h(x)$, onde $h(x)=T_0+x\,(T_L-T_0)/L$, ou seja subtraindo à função incógnita uma função C^2 que verifica as condições na fronteira.

A situação que se acabou de rever é mais geral. Mais especificamente, considera-se o problema para a equação do calor homogénea ou não com

[5] Em inglês diz-se *backwards heat equation*.

condições de Dirichlet na fronteira não homogéneas

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \\ &u(t,0)=h_0(t),\ u(t,L)=h_L(t) \\ &u(0,x)=u_0(x) \end{aligned} \quad ,$$

para $t \geq 0$, $x \in [0,L]$, com $k>0$ e h_0, $h_L : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ contínuas. Se existe uma função v contínua em $[0,+\infty[\,\times[0,L]$ e C^2 no interior deste conjunto tal que $v(t,0) = h_0(t)$, $v(t,L) = h_L(t)$ para $t \geq 0$, então u é solução do problema se e só se $w = u - v$ é solução do problema com condições de Dirichlet homogéneas

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g(t,x) \\ &u(t,0)=u(t,L)=0 \\ &u(0,x)=u_0(x)-v(0,x) \ , \end{aligned}$$

para $t \geq 0$, $x \in [0,L]$, onde

$$g(t,x) = f(t,x) + k\,\partial^2 v/\partial x^2 - \partial v/\partial t \ .$$

Em particular, se a equação considerada é homogénea e tem condições na fronteira não homogéneas do tipo indicado obtém-se uma equação não homogénea sempre que não for encontrada uma solução v da própria equação do calor homogénea que satisfaz as condições de fronteira não homogéneas. É claro que pode acontecer que não seja necessário passar a uma equação não homogénea quando se passa de condições na fronteira não homogéneas para condições homogéneas, mesmo quando não se trata de condições de Dirichlet constantes acima referido. Por exemplo, para o problema com $f=0$, $h_0(t) = A+B\,t$, $h_L(t) = C+D\,t$, onde A, B, C, D são constantes, obtém-se uma solução v da equação do calor homogénea que satisfaz as condições na fronteira dadas, da forma $v(t,x) = h_0(t) + x\,[h_L(t) - h_0(t)]/L + \varphi(t,x)$. Na verdade, v satisfaz a equação do calor homogénea e as condições na fronteira dadas se e só se $\varphi(t,0)=\varphi(t,L)=0$ e φ satisfaz a equação diferencial

$$B + \frac{C-A}{L}\,x + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \ .$$

Procurando uma solução φ independente de t chega-se à equação diferencial ordinária $\varphi''(x) = (C-A)x/(kL) + B/k$ que tem solução geral $\varphi(x) = (C-A)x^3/(6kL) + Bx^2/2 + c_1 x + c_2$, onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias cujo valor é determinado de forma a satisfazer $\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = 0$, obtendo-se $\varphi(x) = x\,(x-L)\,[(C-A)x/(6kL) + B/(2k)]$.

A situação para condições de Neumann não homogéneas na fronteira é semelhante.

9.7 Notas históricas

J. Fourier resolveu a equação do calor com as séries que vieram a receber o seu nome num trabalho realizado entre 1804 e 1807, contudo a ideia que funções muito gerais podiam ser representadas por séries trigonométricas levantou controvérsia sobre o rigor dos resultados apresentados que só foram publicados em 1822 sob o título *La Théorie Analytique de la Chaleur*. No capítulo anterior dedicado a séries de Fourier são dadas extensas notas históricas relativas a séries de Fourier.

Entre 1829 e 1837 Sturm[6] e J. Liouville estenderam a representação de soluções por séries trigonométricas de Fourier para problemas para equações do calor mais gerais dos deste capítulo, considerando sistemas ortogonais de funções próprias do operador diferencial associado à equação e obtendo a chamada **Teoria de Sturm-Liouville**.

O Princípio do Máximo Fraco para a equação do calor foi estabelecido por E. Levi em 1907 e o Princípio de Máximo Forte para a equação do calor por L. Nirenberg em 1953. A propriedade do valor máximo das soluções só poder ocorrer no instante inicial ou em pontos da fronteira com derivada para o exterior positiva foi estabelecida por A. Friedman em 1958.

[6] Sturm, Jacques Charles François (1803-1855).