Capítulo 8

Equação das ondas – Separação de variáveis com séries de Fourier

8.1 Introdução

No capítulo **??** aplicou-se o método de separação de variáveis para resolver problemas de valores iniciais para a equação das ondas unidimensional sem e com amortecimento, quando as condições iniciais são dadas por combinações lineares finitas de funções trigonométricas. Neste capítulo estende-se a aplicabilidade do método de separação de variáveis permitindo condições iniciais muito gerais, através da utilização das séries de Fourier introduzidas no capítulo anterior.

8.2 Resolução da equação das ondas com séries de Fourier

No capítulo **??** aplicou-se o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial para a equação das ondas com condições de Dirichlet homogéneas na fronteira

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
&u(t,0) = u(t,L) = 0 \\
&u(0,x) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x)\ ,
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

para $(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,L]$, onde $c > 0$ é constante e

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{m} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^{m} b_n^* \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{8.2}$$

com $b_n, b_n^* \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e obteve-se uma solução da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{m} \left(b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{8.3}$$

Já se sabia do capítulo precedente que o problema considerado tem solução única. Assim, é natural considerar o caso de u_0 e v_0 não serem combinações lineares finitas das funções $x \mapsto \sin(n\pi x/L)$ mas terem representações em série de Fourier

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ v_0(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \frac{n\pi c}{L} e^{in\pi x/L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

com $c_n = -c_{-n} = -ib_n/2$, $c_n^* = -c_{-n}^* = -ib_n^*/2$ e $b_n, b_n^* \in \mathbb{R}$, e esperar obter soluções para estas condições iniciais representadas por séries de Fourier na forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{8.5}$$

Como a solução do problema (8.1) tem de ser uma função contínua que se anula nos pontos da forma $(t,0)$ e (t,L) para $t \in \mathbb{R}$ e tem segundas derivadas em relação a x e a t, tem de ser $u_0 \in C^2([0,L])$, $u_0(0) = u_0(L) = 0$ e $v_0 \in C^1([0,L])$, $v_0(0) = v_0(L) = 0$. As funções u_0 e v_0 são estendidas a $\mathbb{R}$ de forma a serem ímpares e periódicas de período $2L$, para que as suas séries de Fourier sejas dos tipos considerados. O corolário (**??**) garante que as séries de Fourier de u_0 e v_0, e a série obtida derivando a série de Fourier de u_0 termo a termo são uniformemente convergentes para, respectivamente, u_0, v_0 e u_0'. Interessa agora provar que a série (8.5) dá efectivamente uma solução[1] do problema (8.1).

[1]Note-se que para qualquer solução u e para $t \in \mathbb{R}$ fixo a função $x \mapsto u(t,x)$ é contínua em $[0,L]$, C^2 no interior deste intervalo e nula nos seus extremos, pelo que se as derivadas laterais direita e esquerda respectivamente em 0 e L existirem tem representação em série de Fourier da forma $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(t) \sin(n\pi x/L)$. Cada termo desta série é necessariamente um produto de uma função de t por uma função de x, que é a separação da dependência das duas variáveis considerada no método de separação de variáveis. **Portanto, a forma particular de separação de variáveis considerada é, em geral, a única possível.**

Analisando directamente a série que define u na fórmula (8.5) podemos ver que as séries obtidas derivando-a termo a termo duas vezes em ordem a t e a x têm termos cujos valores absolutos são majoradas pelo produto de uma constante pelas somas dos módulos dos termos das séries de Fourier de u_0 e v_0 multiplicados por n^2. Com base no corolário (**??**) pode-se garantir a convergência uniforme destas séries se, adicionalmente às hipóteses anteriores, u_0 e v_0 tiverem respectivamente 3ª e 2ª derivadas integráveis à Riemann em $[0, L]$. Nestas condições, conclui-se que a função u definida pela série em (8.5) é C^2, as suas derivadas de 2ª ordem relativamente a t e a x são as somas das correspondentes séries obtidas por derivação termo a termo da série que define u, as condições de fronteira e iniciais são satisfeitas e a equação das ondas é verificada por u porque cada um dos termos da série que define esta função a verifica. Em conclusão, prova-se nestas condições que a série que define u em (**??**) é uniformemente convergente e u é a solução do problema.

É claro que as hipóteses que acabámos de referir para trabalhar directamente com o desenvolvimento em série de u com base no corolário geral (**??**) são excessivas[2]. Em alternativa, podemos ver que a série na fórmula (8.5) para u se pode escrever na forma

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cos\frac{n\pi c\,t}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L} + b_n^* \sin\frac{n\pi ct}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi(x+ct)}{L} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi(x-ct)}{L}\\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^*\left(-\cos\frac{n\pi(x+ct)}{L} + \cos\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right),
\end{aligned}$$

desde que cada uma das séries no último termo seja convergente. As duas primeiras séries são iguais à série de Fourier de $u_0/2$ calculada, respectivamente, nos pontos $x+ct$ e $x-ct$ em vez de x e, como essa série converge uniformemente para $u_0/2$ e para a sua extensão como função ímpar e periódica com período $2L$, conclui-se que estas séries convergem uniformemente para $u_0(x+ct)/2$ e $u_0(x-ct)/2$, respectivamente. A última série é igual à série obtida integrando termo a termo a série de Fourier de $v_0/(2c)$ de $x-ct$ a $x+ct$ e, como essa série converge uniformemente para $v_0/(2c)$ e para a sua extensão como função ímpar e periódica com período $2L$ também a série obtida integrando-a termo a termo converge uniformemente para $\int_{x-ct}^{x+ct} v_0/(2c)$. Conclui-se que a função u definida pela fórmula (8.5) satisfaz

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct)+u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\,ds\ ,$$

[2] Os resultados no apêndice C permitem enfraquecê-las para $u_0''', v_0'' \in L^2([0,L])$ em vez de exigir estas derivadas integráveis à Riemann em $[0,L]$, o que ainda é excessivo.

Assim, fica provado que a função u definida pela série (8.5) satisfaz a Fórmula de d'Alembert. Sabendo-se que a solução do problema considerado é dada por esta fórmula fica-se a saber que a função u definida em (8.5) é a solução do problema.

Se não se conhecesse a Fórmula de d'Alembert para a solução do problema, era fácil verificar directamente apenas com as hipóteses de u_0 ser C^2 e v_0 ser C^1, que são necessárias para existir solução problema no sentido que adoptámos, que u é C^2, satisfaz $u(t,0)=u(t,L)=0$, $u(0,x)=u_0(x)$, $(\partial u/\partial t)\,(0,x)=v_0(x)$ e as suas derivadas parciais satisfazem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(t,x) &= \frac{c^2}{2}\left[u_0''(x+ct)+u_0''(x-ct)\right]+\frac{c}{2}\left[v_0'(x+ct)-v_0'(x-ct)\right]\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t,x) &= \frac{1}{2}\left[u_0''(x+ct)+u_0''(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\left[v_0'(x+ct)-v_0'(x-ct)\right]\ ,\end{aligned}$$

pelo que $(\partial^2 u/\partial t^2)\,(t,x)-c^2\,(\partial^2 u/\partial x^2)\,(t,x)=0$. Com este processo provámos que a função u definida pela série em (8.5) é a solução do problema com as hipóteses mínimas nas condições iniciais u_0 e v_0 de serem, respectivamente, C^2 e C^1 em $[0,L]$ e satisfazerem $u_0=u_0(L)=0$ e $v_0=v_0(L)=0$.

8.3 Notas históricas

Como se observou nos dois capítulos anteriores, a resolução de equações diferenciais parciais, designadamente da equação das ondas e da equação do calor, a qual será considerada no capítulo seguinte, foram determinantes para a descoberta das séries de Fourier, cujo estudo teve um impacto impressionante no desenvolvimento da análise Análise Matemática, tendo mesmo dado origem à Análise Harmónica e à Análise Funcional, mas também de vários outros domínios da matemática. teve também enormes consequências devido a aplicações em variadíssimas áreas. As notas históricas dos dois capítulos precedentes dão extensa informação sobre estes desenvolvimentos.