

# Capítulo 7

## Séries de Fourier

### 7.1 Introdução

As séries de Fourier foram introduzidas precisamente a propósito da resolução das equações diferenciais parciais consideradas para propagação de ondas e difusão do calor, e foi com base na resolução da equação das ondas que no capítulo anterior se motivou a consideração e o estudo destas séries que são aplicadas nos três capítulos seguintes para resolução da equação das ondas não amortecida e amortecida, da equação do calor e da equação de Laplace. Contudo, têm aplicações que transcendem muito a simples utilização para resolução de equações diferenciais. Por isso, este capítulo está escrito de forma a poder ser usado independentemente dos outros e a ser, na medida do razoável, auto-suficiente, e considera-se aqui o estudo de séries de Fourier de modo a poder constituir um corpo de conhecimentos útil também noutros contextos além da resolução de equações diferenciais, como teoria de sistemas, análise de sinais, processamento de imagem, óptica, mecânica quântica, ou mesmo de aplicações em outras áreas da matemática como Teoria das Distribuições em Análise Funcional, Geometria e Teoria dos Números, ou ainda como base para o estudo mais avançado de séries de Fourier e da importante área da matemática contemporânea a que deram origem: a Análise Harmónica.

No Apêndice C avança-se um pouco mais no estudo de séries de Fourier, nomeadamente em propriedades de convergência mais dependentes do integral de Lebesgue, cujos aspectos principais para este efeito são resumidos no Apêndice B.

O estudo da Análise de Fourier prossegue nos capítulos X e Y dedicados às transformações de Fourier e de Laplace que, tal como o presente capítulo, estão também escritos de forma a poderem ser usados independentemente dos outros capítulos, com excepção deste dedicado a séries de Fourier, e a serem, tanto quanto razoável, auto-suficientes. tal como para o caso das séries

de Fourier, o Apêndice D avança um pouco mais na transformação de Fourier no que respeita a propriedades mais dependentes do Integral de Lebesgue. Estes três capítulos constituem uma sólida base em Análise de Fourier, que ainda pode ser complementada com os apêndices correspondentes.

Além do interesse das séries de Fourier para áreas de aplicação e para outras áreas da matemática, é importante observar que tiveram um papel central no desenvolvimento da matemática no século XIX, com implicações para o desenvolvimento e a consolidação de conceitos tão básicos como, entre outros, a própria noção actual de função (1829-51), o integral de Riemann (1854), a noção de função lipschitziana (1864), a teoria de conjuntos infinitos de números reais (1872-84), e o integral de Lebesgue<sup>1</sup> (cerca de 1900).

O plano do capítulo consiste em 5 passos dados num igual número de secções do capítulo:

1. parte-se do caso mais fácil de funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue em que a situação é clara geometricamente, em consequência das noções de ortogonalidade e projecção ortogonal que podem ser definidas neste caso com base num produto interno, e em que todas as funções têm série de Fourier convergentes para as respectivas funções em média de quadrado integrável;
2. introduz-se a noção de convolução de funções e obtêm-se propriedades gerais da convolução e dos coeficientes de Fourier que permitem facilitar o cálculo com estas séries;
3. considera-se a convergência uniforme de séries de Fourier que implica a convergência pontual em todos os pontos e é relativamente simples de estabelecer para funções  $C^1$  (e mais geralmente funções com derivada integrável à Riemann), depois de considerar o caso mais simples de funções  $C^k$ , com  $k > 1$ ; também se estabelece o importante resultado da unicidade das séries de Fourier para funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue *i.e.*, que a igualdade de séries de Fourier implica a igualdade das funções.
4. prossegue-se com a convergência pontual de séries de Fourier, mostrando que depende exclusivamente dos valores da função numa vizinhança do ponto considerado, apesar dos coeficientes da série e o limite dependerem da função em todo o domínio, e estabelece-se a convergência em pontos de diferenciabilidade ou em que há derivadas finitas laterais, mesmo que sejam pontos de descontinuidade de salto da função, caso em que a convergência é para a média dos limites laterais da função à esquerda e à direita;
5. estabelece-se a relação entre a ordem de convergência dos coeficientes das séries de Fourier para zero no infinito e a regularidade das respectivas funções (no sentido de ordem de diferenciabilidade contínua), obtendo-se que os coeficientes tendem para zero tanto mais rapidamente quanto mais regular é a função.

---

<sup>1</sup>Lebesgue, Henri (1875-1941).

## 7.2 Séries de Fourier de funções de quadrado integrável

Os problemas básicos das séries de Fourier podem ser mais facilmente descritos num espaço de funções de quadrado integrável, no sentido de Lebesgue. Na verdade, é possível considerar um produto interno nesse espaço, com as noções geométricas correspondentes de ortogonalidade e projecção ortogonal, e obter a convergência das sucessões de Cauchy na norma induzida pelo produto interno. Começa-se por rever alguns aspectos gerais de espaços de funções integráveis à Lebesgue<sup>2</sup>.

Além da simplicidade referida, a consideração de espaços de funções de quadrado integrável à Lebesgue tem muitas vezes um sentido físico especial por corresponder a medir a magnitude das funções e as suas distâncias em termos da energia, que frequentemente é calculada por integrais dos quadrados das magnitudes de dos campos de forças envolvidos.

Seja  $I$  um intervalo de números reais. Designa-se por  $L^1(I) = L(I)$  o conjunto das funções com valores complexos definidas em  $I$  que são integráveis no sentido de Lebesgue, considerando identificadas as funções que são iguais q.t.p.<sup>3</sup> em  $I$ , uma vez que os seus integrais são idênticos. De forma análoga, designa-se por  $L^2(I)$  o conjunto das funções  $f$  com valores complexos que são mensuráveis<sup>4</sup> com  $|f|^2 \in L(I)$ , considerando também identificadas as funções que são iguais q.t.p. em  $I$ .

Com as operações usuais para funções, **tanto  $L^1(I)$  como  $L^2(I)$  são espaços lineares**, pois são subconjuntos dos espaços lineares de todas as funções definidas em  $I$  e os axiomas de fecho da definição de espaço linear verificam-se<sup>5</sup>. Na verdade, se  $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$  são mensuráveis e  $c \in \mathbb{C}$ , também  $cf$  e  $f+g$  são mensuráveis em  $I$  e

$$|cf| = |c| |f|, \quad |f+g| \leq |f|+|g|, \quad |cf|^2 = |c|^2 |f|^2,$$

$$|f+g|^2 = |f|^2 + 2|fg| + |g|^2 \leq |f|^2 + (|f|^2 + |g|^2) + |g|^2 = 2(|f|^2 + |g|^2),$$

<sup>2</sup>Para uma exposição simplificada do integral de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  ver, por exemplo, o livro do autor *Integrais Múltiplos*, Texto Editora 1993.

<sup>3</sup>Lê-se “quase em toda a parte” em  $I$  e significa em todos os pontos deste intervalo excepto possivelmente num conjunto de medida nula.

<sup>4</sup>Diz-se que uma função definida em  $I$  é mensurável se existe uma sucessão de funções em escada em  $I$  que converge q.t.p. em  $I$  para  $f$ .

<sup>5</sup>Os elementos destes espaços são classes de equivalência de funções iguais q.t.p. em  $I$ , mas cada classe pode ser identificada por um dos seus elementos, e tanto a soma de funções como o produto por escalares por funções respeitam as classes de equivalência. Por exemplo, em  $L^1(I)$  a soma de duas classes de equivalência de duas funções dadas é a classe de equivalência da soma destas funções; analogamente, o produto de um escalar por uma classe de equivalência de uma função dada é a classe de equivalência do produto desse escalar pela função dada.

onde na penúltima fórmula foi usada a relação

$$|f|^2 + |g|^2 = (|f| - |g|)^2 + 2|fg| \geq 2|fg|.$$

Recorde-se que  $\int_I |f| = 0$  se e só se  $f = 0$  q.t.p. em  $I$ , o que, com as primeiras duas desigualdades do parágrafo anterior, garante que  $\|f\| = \int_I |f|$  **define uma norma**<sup>6</sup> em  $L^1(I)$ . Por outro lado, de  $|f|^2 + |g|^2 \geq 2|fg| = 2|f\bar{g}|$  resulta que  $f\bar{g}$  é integrável para  $f, g \in L^2(I)$ , pelo que  $\langle f, g \rangle = \int_I f\bar{g}$  define uma função de  $L^2(I) \times L^2(I)$  em  $\mathbb{C}$ . É fácil verificar que  $\langle f, g \rangle$  é um **produto interno** em  $L^2(I)$ . A norma correspondente é  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = (\int_I |f|^2)^{1/2}$ .

O resultado seguinte estabelece que tanto as funções dos espaços  $L^1(I)$  como de  $L^2(I)$  podem ser aproximadas por funções contínuas, por funções  $C^k$  e até  $C^\infty$  de suporte<sup>7</sup> compacto, nas normas dos respectivos espaços.

(7.1) **Teorema:** *O conjunto das funções  $C^k$  de suporte compacto é denso em  $L^1(I)$  e em  $L^2(I)$ , para  $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ .*

*Dem.* A demonstração começa por estabelecer que o conjunto das funções em escada em  $I$  é denso nos dois espaços considerados, e prossegue aproximando funções em escada por funções contínuas, e estas por funções  $C^\infty$ .

Sabe-se que para quaisquer  $f \in L^1(I)$  e  $\epsilon > 0$  existe uma função em escada  $s$  em  $I$  tal que  $\|f - s\|_{L^1} < \epsilon$ , pelo que o conjunto das funções em escada em  $I$  é denso em  $L^1(I)$ . Por outro lado, como qualquer  $f \in L^2(I)$  é mensurável, para qualquer  $\epsilon > 0$  existe uma função em escada  $s$  em  $I$  tal que  $|f - s| < \epsilon$  q.t.p. em  $I$  e, então,  $\|f - s\|_{L^2}^2 = \int_I |f - s|^2 \leq |I| \epsilon$ , onde  $|I|$  designa o comprimento de  $I$ . No caso de  $I$  ser um intervalo limitado fica garantido que o conjunto das funções em escada em  $I$  é denso em  $L^2(I)$ .

No caso de  $I$  ser ilimitado, decompõe-se  $I$  numa união numerável de subintervalos  $I_n$  com  $|I_n| \leq 1$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Para qualquer  $\epsilon > 0$ , em cada um destes subintervalos limitados  $I_n$  existe uma função em escada  $s_n$  tal que  $\|f - s_n\|_{L^2(I_n)}^2 < \epsilon 2^{-n}$  e  $s_n = 0$  fora de  $I_n$ . Além disso,  $\int_I |f|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f|^2$  e, portanto, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{I_n} |f|^2 < \epsilon$ . Assim, a função em escada  $t_m = \sum_{n=1}^m s_n$  satisfaz

$$\|f - t_m\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{n=1}^m \int_{I_n} |f - s_n|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{I_n} |f|^2 < \epsilon \sum_{n=1}^m 2^{-n} + \epsilon < 2\epsilon.$$

Logo, o conjunto das funções em escada em  $I$  é denso em  $L^2(I)$  também quando  $I$  é ilimitado.

<sup>6</sup>É essencial considerar como idênticas as funções que são iguais q.t.p. em  $I$ , como foi referido anteriormente.

<sup>7</sup>O **suporte** de uma função é o fecho do conjunto onde a função é diferente de zero.

Ficou provado que o conjunto das funções em escada é denso em  $L^p(I)$ , para  $p=1, 2$ .

Qualquer função em escada  $s$  pode ser aproximada por uma função contínua que coincide com  $s$  em todos os pontos, excepto em pequenos intervalos de largura arbitrariamente pequena centrados em cada um dos pontos de descontinuidade de  $s$ , onde assume valores sobre segmentos de recta. Como os pontos de descontinuidade de uma função em escada são em número finito e esta função é limitada, existe uma função  $h$  contínua, de suporte em  $I$  e com derivada contínua, excepto possivelmente num número finito de pontos, tal que  $\|s-h\|_{L^p} < \epsilon$ , para  $p=1, 2$  e, portanto,  $\|f-h\|_{L^p} < 2\epsilon$ . Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, fica assim provado que o conjunto das funções contínuas de suporte compacto com derivada contínua, excepto possivelmente num número finito de pontos, é denso em  $L^p(I)$ , com  $p=1, 2$ .

Sabe-se que as funções contínuas de suporte compacto podem ser arbitrariamente aproximadas por funções  $C^\infty$  de suporte compacto na norma do supremo<sup>8</sup>, e portanto também na norma de  $L^p(I)$ , com  $p=1, 2$ . Como  $C^\infty \subset C^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  também o conjunto das funções  $C^k$  de suporte compacto com  $k \in \mathbb{N}$  é denso em  $L^p(I)$ , com  $p=1, 2$ . Q.E.D.

O Teorema de Riesz<sup>9</sup>-Fischer<sup>10</sup>, que se prova a seguir, estabelece a importante propriedade dos espaços  $L^1(I)$  e  $L^2(I)$  serem completos<sup>11</sup>.

(7.2) **Teorema de Riesz-Fischer:**  $L^1(I)$  e  $L^2(I)$  são espaços completos.

*Dem.* Seja  $\{f_k\}$  uma sucessão de Cauchy em  $L^p(I)$ , com  $p=1$  ou  $p=2$ . Existe uma sucessão crescente de números naturais  $\{N_n\}$  tal que para  $k, j \geq N_n$  é  $\|f_k - f_j\| < 2^{-n-n/p}$ . Designa-se  $h = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} |g_k - g_{k+1}|^p$  e  $g_n = f_{N_n}$ . Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_I 2^{kp} |g_k - g_{k+1}|^p = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} \|g_k - g_{k+1}\|^p < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} 2^{-p(k+k/p)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k},$$

o Teorema de Convergência de Levi<sup>12</sup> para séries garante que a série que define  $h$  é convergente q.t.p. em  $I$  e  $h \in L^1(I)$ . Como a soma de uma série

<sup>8</sup>Embora este facto seja usualmente conhecido, dá-se uma demonstração na secção seguinte como aplicação da convolução que é aí introduzida a propósito de propriedades dos coeficientes de Fourier.

<sup>9</sup>Riesz, Frigyes (1880-1956).

<sup>10</sup>Fischer, Ernst (1875-1954).

<sup>11</sup>Diz-se que um espaço normado é **completo** se todas as sucessões de Cauchy convergem para elementos do espaço, na norma desse espaço.

<sup>12</sup>Levi, Beppo (1875-1961). O Teorema de Convergência de Levi para séries estabelece que se a série dos integrais dos valores absolutos dos termos de uma sucessão de funções integráveis é convergente, então a série da sucessão de funções é convergente q.t.p. para uma função integrável e esta série pode ser integrada termo a termo (ver, por exemplo, o livro do autor *Integrais Múltiplos*, Texto Editora 1993).

convergente de termos maiores ou iguais a zero é necessariamente maior ou igual a cada um dos seus termos, obtém-se  $|g_k - g_{k+1}| \leq 2^{-k} h^{1/p}$  q.t.p. em  $I$ . Portanto,

$$|g_k - g_{k+m}| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |g_{k+j} - g_{k+j+1}| \leq h^{1/p} \sum_{j=0}^{m-1} 2^{-(k+j)} < 2^{1-k} h^{1/p} \text{ q.t.p. em } I.$$

O lado direito converge para zero q.t.p. em  $I$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , pelo que para quase todo  $x \in I$  a sucessão numérica  $\{g_k(x)\}$  é de Cauchy e, portanto, converge para um número que se designa por  $f(x)$ ; nos pontos  $x \in I$  onde a sucessão  $\{g_k(x)\}$  diverge define-se  $f(x) = 0$ . Fazendo  $m \rightarrow +\infty$  nas desigualdades precedentes, obtém-se  $|g_k - f| \leq 2^{1-k} h^{1/p}$  q.t.p. em  $I$ . Logo,  $\int_I |g_k - f|^p \leq 2^{(1-k)p} \int_I h$ . Quando  $k \rightarrow +\infty$  o lado direito converge para zero, pelo que  $\|g_k - f\| \rightarrow 0$ . Da desigualdade triangular obtém-se  $\|f_n - f\| \leq \|f_n - g_k\| + \|g_k - f\|$  e da definição de  $g_k$  resulta, para  $n \geq N_k$ ,  $\|f_n - g_k\| < 2^{-k-k/p}$ , pelo que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Portanto  $f_n \rightarrow f$  na norma considerada. Q.E.D.

Se  $f \in L^2(I)$  e  $I$  é um intervalo limitado de comprimento  $|I|$ , a desigualdade de Cauchy-Schwartz implica  $\int_I |f| = \int_I 1 \cdot |f| \leq \|1\|_{L^2} \|f\|_{L^2} = |I| \|f\|_{L^2}$ , pelo que a função mensurável  $f$  é integrável. Logo  $L^2(I) \subset L^1(I)$  e  $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}$ . É claro que esta inclusão não se verifica em intervalos ilimitados (e.g., com  $f(x) = 1/x$  em  $[1, +\infty[$  é  $f \in L^2([1, +\infty[)$  e  $f \notin L^1([1, +\infty[)$ ), e também é claro que a inclusão é estrita no caso de intervalos limitados pois há funções em  $L^1$  que não pertencem a  $L^2$  (e.g.,  $f(x) = 1/\sqrt{x} \geq 0$  em  $[0, 1]$  tem integral igual a 2 e  $f^2(x) = 1/x$  não é integrável em  $[0, 1]$ ).

O conjunto  $\{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(I)$  é ortogonal, pois

$$(7.3) \quad \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} \frac{e^{(n-m)2\pi} - 1}{n-m} = 0, & \text{se } n \neq m \\ 2\pi, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Como os conjuntos ortogonais num espaço linear com produto interno são necessariamente linearmente independentes e  $O$  é um conjunto infinito, conclui-se que  $L^2(I)$  é um espaço linear de dimensão infinita. Sabe-se do estudo elementar de espaços lineares com produto interno que, dado um conjunto ortonormal infinito numerável  $O = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  em  $L^2(I)$  e uma função  $f \in L^2(I)$ , existe uma única função do subespaço gerado por um subconjunto finito  $O_N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  mais próxima de  $f$  do que todas as outras desse subespaço, e esta é a projecção ortogonal de  $f$  sobre o subespaço, nomeadamente  $P_N f = \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n$ , com  $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_I f \overline{\varphi_n}$ . É claro que a sucessão  $\{\|f - P_N f\|\}$  das distâncias de  $f$  às suas projecções ortogonais sobre os espaços  $O_N$  é decrescente (Figura 7.1). A procura de aproximações cada vez melhores para a função  $f$  conduz à série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ , com  $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_I f \overline{\varphi_n}$ . O resultado seguinte estabelece propriedades básicas destas aproximações.

Figura 7.1: Aproximações ortogonais por polinômios trigonométricos em  $L^2([0, 2\pi])$

(7.4) **Teorema:** *Seja  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  em  $L^2(I)$  um conjunto ortonormal infinito numerável em  $L^2(I)$ . Então:*

1. *Se a série  $\sum |c_n|^2$  é convergente com  $c_n \in \mathbb{C}$ , então a série  $\sum c_n \varphi_n$  é convergente na norma de  $L^2(I)$ ;*
2. *Se  $f \in L^2(I)$  e  $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ , então a série  $\sum |c_n|^2$  converge e satisfaz a **desigualdade de Bessel**  $\sum |c_n|^2 \leq \|f\|^2$ ;*
3. *Se  $f \in L^2(I)$  e  $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ , então a série  $\sum c_n \varphi_n$  converge para  $f$  na norma de  $L^2(I)$  se e só se os dois lados da desigualdade de Bessel são iguais, isto é  $\sum |c_n|^2 = \|f\|^2$ .*

*Dem.*

1. Como a série  $\sum |c_n|^2$  é convergente, as suas somas parciais constituem uma sucessão de Cauchy. Portanto, para todo  $\epsilon > 0$  se  $M \in \mathbb{N}$  for suficientemente grande verifica-se para todo  $N \in \mathbb{N}$

$$\|P_{M+N}f - P_Mf\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^{M+N} c_n \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{M+N} |c_n|^2 < \epsilon.$$

Logo,  $\{P_Nf\}$  é uma sucessão de Cauchy em  $L^2(I)$ . Como este espaço é completo, a sucessão, e portanto também a série  $\sum c_n \varphi_n$ , é convergente.

2. Verifica-se

$$\begin{aligned}
\|f - P_N f\|^2 &= \langle f - P_N f, f - P_N f \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \langle f, P_N f \rangle - \langle P_N f, f \rangle + \langle P_N f, P_N f \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N \bar{c}_n \langle f, \varphi_n \rangle - \sum_{n=0}^N c_n \overline{\langle f, \varphi_n \rangle} + \sum_{k,n=0}^N c_k \bar{c}_n \langle \varphi_k, \varphi_n \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2 + \sum_{n=0}^N |c_n|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2.
\end{aligned}$$

Portanto  $\sum_{n=0}^N |c_n|^2 \leq \|f\|^2$ , pelo que a série  $\sum |c_n|^2$  é convergente e satisfaz a desigualdade de Bessel.

3. Na prova de 2. obteve-se a fórmula  $\|f - P_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2$ . Portanto, os dois lados da desigualdade de Bessel são iguais se e só se  $\|f - P_N f\|^2 \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow +\infty$ , isto é, se a série  $\sum c_n \varphi_n$  converge para  $f$  na norma de  $L^2(I)$ . Q.E.D.

Note-se que  $f_n \rightarrow f$  na norma de  $L^2(I)$  significa  $\int_I |f_n - f|^2 \rightarrow 0$ , pelo que a convergência na norma de  $L^2(I)$  é conhecida por **convergência em média quadrática**.

O resultado anterior garante que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$  converge na norma de  $L^2(I)$ , qualquer que seja  $f \in L^2(I)$  e o conjunto ortonormal infinito numerável  $O = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ . Resta esclarecer quando é que o limite da série é a própria função  $f$ . O teorema seguinte esclarece esta situação com base na noção de conjunto ortonormal completo e estabelece a fórmula de Parseval<sup>13</sup>.

Chama-se **conjunto ortonormal completo** em  $L^2(I)$  a um conjunto ortonormal  $O$  tal que o único elemento de  $L^2(I)$  ortogonal a todos os elementos de  $O$  é o zero. É fácil ver que um conjunto ortonormal completo em  $L^2(I)$  tem de ser infinito, pois como o espaço tem dimensão infinita um conjunto ortonormal finito  $Q$  não pode ser uma base do espaço e, portanto, existe um elemento do espaço fora do subespaço gerado por  $Q$  e subtraindo-lhe a sua projecção ortogonal sobre este subespaço de dimensão finita obtém-se um vector diferente de zero ortogonal a  $Q$ <sup>14</sup>.

O resultado seguinte estabelece que os conjuntos ortonormais completos em  $L^2(I)$  são os análogos de bases ortonormais de espaços de dimensão finita com produto interno, no sentido de todos os elementos do espaço poderem ser representados em termos de elementos do conjunto, substituindo combinações lineares finitas por séries cujas somas parciais são combinações lineares finitas de elementos do conjunto. Estabelece também a chamada

<sup>13</sup>Parseval, Marc-Antoine (1755-1836).

<sup>14</sup>Este argumento na verdade estabelece que um espaço linear com produto interno tem um conjunto ortonormal completo finito se e só se o espaço tem dimensão finita.



**fórmula de Parseval**<sup>15</sup> que é análoga, no mesmo sentido, à fórmula que dá o produto interno de dois vectores como soma dos produtos das componentes correspondentes dos vectores numa dada base ortonormal de um espaço de dimensão finita com produto interno.

(7.5) **Teorema:** *Seja  $O = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  um conjunto infinito numerável ortonormal em  $L^2(I)$ . As quatro afirmações seguintes são equivalentes:*

1.  $O$  é um conjunto ortonormal completo;
2.  $f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$  para  $f \in L^2(I)$ , na norma de  $L^2(I)$ ;
3.  $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \|f\|^2$  para  $f \in L^2(I)$  (igualdade de Bessel);
4.  $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_n \rangle}$  para  $f, g \in L^2(I)$  (fórmula de Parseval).

*Dem.* Da afirmação 3. do teorema anterior sabe-se que  $f = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ , com o limite na norma de  $L^2(I)$ , é equivalente a  $\|f\|^2 = \sum |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$ . Logo, a 2ª e a 3ª afirmações são equivalentes e qualquer delas implica que se  $f$  é ortogonal a todos os elementos de  $O$  então  $f = 0$ , e, portanto,  $O$  é um conjunto ortonormal completo, pelo que tanto a 2ª como a 3ª afirmação implica a 1ª.

Da afirmação 2. do teorema anterior,  $\sum |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$  é convergente qualquer que seja  $f \in L^2(I)$ , e da afirmação 1. do mesmo teorema resulta que  $\sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$  é convergente na norma de  $L^2(I)$  para alguma função  $g = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ . Então  $\langle g, \varphi_j \rangle = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle$  e, portanto,  $g - f$  é ortogonal a todos os elementos de  $O$ . Se  $O$  é um conjunto ortonormal completo verifica-se  $f = g$ , logo a 1ª afirmação implica a 2ª.

Está, portanto, estabelecida a equivalência das três primeiras afirmações.

A fórmula de Parseval, com  $f = g$ , dá a igualdade de Bessel, pelo que a 4ª afirmação implica a 3ª e, portanto, também a 2ª. Por outro lado, a 2ª afirmação implica para funções  $f, g \in L^2(I)$  que  $f = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$  e  $g = \sum \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n$ , pelo que

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_n \sum_j \langle \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \langle g, \varphi_j \rangle \varphi_j \rangle \\ &= \sum_n \sum_j \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_j \rangle} \langle \varphi_n, \varphi_j \rangle = \sum_n \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_n \rangle}, \end{aligned}$$

ou seja, a 2ª afirmação implica a 4ª. Conclui-se que a 2ª e a 4ª afirmações são equivalentes. Q.E.D.

Os resultados anteriores não dependem de considerar o caso particular de espaços  $L^2(I)$ , pois as demonstrações são válidas sem alterações para

<sup>15</sup>Parseval, Marc-Antoine (1755-1836).

qualquer espaço linear com produto interno que seja completo na norma associada. Um espaço qualquer com estas propriedades chama-se **espaço de Hilbert**. Assim, a **teoria geral de séries de Fourier em qualquer espaço de Hilbert assume a forma simples exposta acima** e em cada caso concreto precisa da identificação de conjuntos ortonormais completos. Portanto, o interesse das séries de Fourier excede o caso de séries trigonométricas que é considerado no exemplo seguinte. Há situações em que convém considerar séries em espaços de Hilbert e em relação a conjuntos ortonormais completos diferentes dos indicados.

(7.6) **Exemplo:** Considera-se em  $L^2([0, 2\pi])$  o conjunto  $O = \{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$ . De 7.3 resulta que  $O$  é um conjunto ortonormal em  $L^2([0, 2\pi])$ . Para  $f \in L^2([0, 2\pi])$  os resultados anteriores podem ser aplicados à série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{int},$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

A esta série chama-se **série de Fourier** de  $f$  e aos coeficientes  $c_n$  chama-se **coeficientes de Fourier** de  $f$ . As funções do tipo  $\sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$  são conhecidas por **polinómios trigonométricos**. Na verdade, a fórmula  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  permite escrever a série de Fourier de  $f$  em termos de senos e cosenos na forma

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

$$A_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt,$$

$$B_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Ao termo  $n$  da última série considerada, igual à soma dos termos  $n$  e  $-n$  da série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ , chama-se **componente fundamental** de  $f$  se  $n=1$ , e **harmónica- $n$**  de  $f$  se  $n=2, 3, \dots$ . **O termo de ordem zero**  $A_0/2 = c_0$  é a **média de  $f$**  em  $[0, 2\pi]$ . Se a função  $f$  tem valores reais, então os coeficientes  $A_n, B_n$  são reais. Se, além disso, a extensão de  $f$  a  $\mathbb{R}$  como função periódica de período  $2\pi$  é uma função par, isto é, se  $f(t) = f(2\pi - t)$  para  $t \in [0, \pi]$ , obtém-se  $B_n = 0$  e a série é uma série de cosenos. Se essa extensão periódica é ímpar, isto é, se  $f(t) = -f(2\pi - t)$  para  $t \in [0, \pi]$ , obtém-se  $A_n = 0$  e a série é uma série de senos.

Em aplicações do âmbito da Física e da Engenharia, à série de Fourier de uma função é usual chamar **decomposição espectral** da função ou decomposição da função em “componentes de frequência”.

Provar-se-á no teorema (7.18) que  $O$  é um conjunto ortonormal completo em  $L^2([0, 2\pi])$ , pelo que o último teorema anterior implica:

- (i) toda a função deste espaço é igual à sua série de Fourier, com o limite na norma de  $L^2([0, 2\pi])$ ;
- (ii) verifica-se a igualdade na Desigualdade de Bessel;
- (iii) é válida a fórmula de Parseval.

Este exemplo pode ser adaptado para  $L^2([a, b])$ , substituindo o intervalo  $[0, 2\pi]$  por  $[a, b]$ . Obtém-se assim o conjunto ortonormal em  $L^2([a, b])$   $\{\psi_n: \psi_n(t) = e^{in2\pi(t-a)/(b-a)}/\sqrt{b-a}, n \in \mathbb{Z}\}$  e, para  $f \in L^2([a, b])$ , a série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in2\pi(t-a)/(b-a)},$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-in2\pi(t-a)/(b-a)} dt.$$

Neste caso, a série de Fourier de  $f$  pode ser escrita em termos de senos e cossenos na forma

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n2\pi(t-a)}{b-a} + B_n \sin \frac{n2\pi(t-a)}{b-a} \right),$$

$$A_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \frac{n2\pi(t-a)}{b-a} dt,$$

$$B_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin \frac{n2\pi(t-a)}{b-a} dt.$$

Como exemplo, os coeficientes da série trigonométrica de Fourier da função real  $f$ , periódica de período  $2\pi$ , tal que  $f(t) = 1$  para  $t \in [3\pi/4, 5\pi/4]$  e  $f(t) = 0$  para  $t \in ]0, 3\pi/4[ \cup ]5\pi/4, 2\pi[$  podem ser facilmente calculados

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} e^{-int} dt = \frac{-1}{2\pi in} [e^{-int}]_{3\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= \frac{i}{2\pi n} (e^{-in5\pi/4} - e^{-in3\pi/4}) = \frac{i}{2\pi n} e^{-in\pi} (e^{-in\pi/4} - e^{+in\pi/4}) \\ &= \frac{1}{4} e^{-in\pi} \frac{\sin n\pi/4}{n\pi/4}, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f = \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} 1 = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}.$$

Na Figura 7.2 mostram-se os valores absolutos dos coeficientes de Fourier e compara-se a função<sup>16</sup> com a soma do seu valor médio com as primeiras

<sup>16</sup>Os coeficientes desta série de Fourier envolvem a função  $\text{sinc } t = (\sin t)/t$ , a que se chama **função sinc** em abreviatura do nome em latim *sinus cardinalis*. Estas designações foram introduzidas em 1952 por Philip Woodward (1919-) no contexto de análise de sinais em telecomunicações e radar, porque, como referiu, esta função aparece tão frequentemente em Análise de Fourier que merece uma notação própria. Com esta notação,  $c_n = e^{-in\pi} \text{sinc } n\pi/4$ .

harmônicas.

Na verdade, neste caso verifica-se  $c_{-n} = c_n$  e a representação de Fourier pode ser expressa como se segue em termos de uma série de Fourier de cossenos, o que acontece sempre que a função seja par.

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-in\pi}}{n} \sin \frac{n\pi}{4} e^{int} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/4}{n\pi/4} \cos n(t-\pi).$$

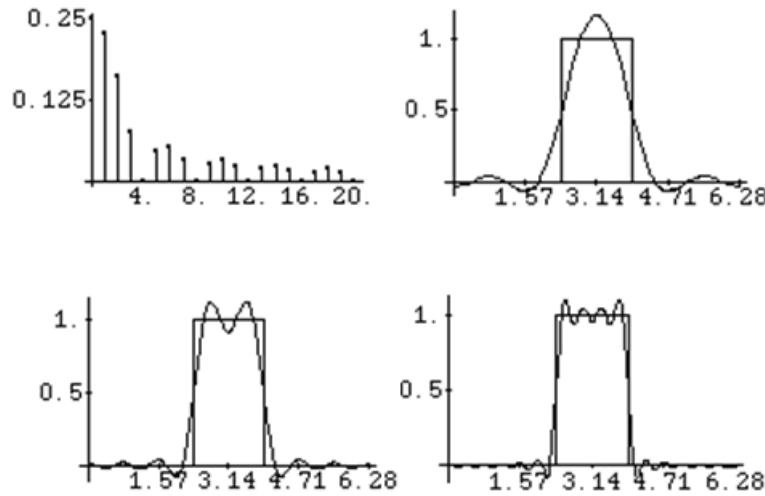


Figura 7.2: Decomposição espectral de um impulso rectangular: (i) valores absolutos dos coeficientes de Fourier, (ii) até à harmónica-4, (iii) até à harmónica-8, (iv) até à harmónica-16

Sabemos que os espaços  $L^2(I)$ , em que  $I$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$ , são espaços de Hilbert de dimensão infinita. Um outro exemplo de espaço de Hilbert de dimensão infinita é o das sucessões dos coeficientes de Fourier de funções em  $L^2(I)$ . Na verdade, resulta dos dois teoremas anteriores (7.5) e (7.18) que as sucessões  $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , dos coeficientes de Fourier de funções em  $L^2(I)$  são as sucessões em  $\mathbb{C}$  cujas séries dos quadrados dos módulos  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2$  são convergentes. Chama-se às sucessões cuja série de quadrados dos módulos é convergente **sucessões de quadrados somáveis**. Prova-se a seguir que o espaço linear  $\ell^2$  destas sucessões com o produto interno  $\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$  é um espaço de Hilbert.

(7.7) **Proposição:** *O espaço das sucessões dos coeficientes de Fourier de funções em  $L^2(I)$  é  $\ell^2$ , e este é um espaço de Hilbert.*

*Dem.* Se  $\{u_n\}, \{v_n\} \in \ell^2$ , então  $\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$  é uma série absolutamente convergente porque as sucessões de somas parciais da série  $\sum |u_n \overline{v_n}|$  são majoradas por  $(\sum |u_n|^2)^{1/2} (\sum |v_n|^2)^{1/2}$  em consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada no espaço das sucessões finitas até cada ordem  $m$ . Considera-se em  $L^2([0, 2\pi])$  o conjunto  $O = \{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$ . Ver-se-à no teorema (7.18) que  $O$  é um conjunto ortonormal completo em  $L^2([0, 2\pi])$ . Do teorema (7.5) com  $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ , é  $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$  para todo  $f \in L^2([0, 2\pi])$  e tal acontece se e só se  $\sum |c_n|^2$  é convergente e  $\sum |c_n|^2 = \|f\|^2$ . Da unicidade das séries de Fourier de funções em  $L^2([0, 2\pi])$  que será estabelecida no teorema (7.19) como consequência directa de  $O$  ser um conjunto ortonormal completo, a transformação linear definida por  $T : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2$  tal que  $T(f) = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}$  é injectiva. Do teorema (7.5) resulta que  $T$  é sobrejectiva e, portanto, é uma bijecção que preserva as operações de espaços lineares, e também preserva o produto interno devido à fórmula de Parseval, de onde resulta que preserva normas. Logo, uma sucessão  $\{f_n\} \subset L^2([0, 2\pi])$  é uma sucessão de Cauchy em  $L^2([0, 2\pi])$  se e só se  $\{T(f_n)\}$  é uma sucessão de Cauchy em  $\ell^2$  e  $\{f_n\}$  converge em  $L^2([0, 2\pi])$  se e só se  $\{T(f_n)\}$  converge em  $\ell^2$ . Como  $L^2([0, 2\pi])$  é completo, conclui-se que  $\ell^2$  também é um completo. Logo  $\ell^2$  é um espaço de Hilbert isomorfo a  $L^2([0, 2\pi])$ . Q.E.D.

Nesta última demonstração mostrou-se que  $L^2(I)$  e  $\ell^2$  são essencialmente o mesmo espaço de Hilbert através de um isomorfismo, *i.e.*, uma bijecção de um espaço para o outro que preserva as operações de espaço linear e produto interno, e, em consequência, também preserva normas e distâncias, ou seja, é uma **isometria**. Isto é uma situação geral para espaços de Hilbert de dimensão infinita. Na verdade, **os espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita são espaços lineares com produto interno isomorfos entre si**, *i.e.*, para quaisquer dois espaços de Hilbert de dimensão infinita existe uma bijecção entre eles que preserva as operações de espaço linear e de produto interno (em consequência também preserva ângulos e distâncias, pelo que é uma isometria). Essencialmente, existe um único espaço de Hilbert de dimensão infinita que pode ser representado de formas diferentes, como é o caso dos espaços  $L^2(I)$ , em que  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  qualquer, e de  $\ell^2$ . Uma das consequências deste facto é que qualquer espaço de Hilbert de dimensão infinita tem conjuntos ortonormais completos.

Para  $n \in \mathbb{N}$  também os espaços de Hilbert de dimensão finita  $n$  são isomorfos entre si; mais precisamente, estes são espaços lineares com produto interno isomorfos a  $\mathbb{C}^n$  com isomorfismos que também são isometrias.

Assim, as classes de espaços de Hilbert diferenciados a ponto de não serem isomorfos é numerável, com uma classe para cada dimensão finita do espaço  $n \in \mathbb{N}$  e uma para dimensão infinita.

### 7.3 Propriedades gerais dos coeficientes de Fourier

Uma vez que para calcular os coeficientes de séries de Fourier como indicado na secção anterior basta considerar funções integráveis à Lebesgue, não há razões para nos restringirmos a funções de quadrado integrável. Por outro lado, o exemplo considerado no fim da secção anterior mostra que a situação de funções definidas num intervalo  $I = [a, b]$  pode ser facilmente reduzida à das funções definidas em  $I = [0, 2\pi]$  por uma simples mudança de variáveis, pelo que nos basta considerar este último caso.

Dada uma função  $f \in L^1([0, 2\pi])$ , definem-se os **coeficientes de Fourier** em relação ao conjunto ortonormal  $\{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$  por

$$\widehat{f}(n) = f^\wedge(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad \text{para } n \in \mathbb{Z},$$

e chama-se **série de Fourier** de  $f$  a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

Como as funções  $t \mapsto e^{int}$  são periódicas de período  $2\pi$ , é natural considerar a série de Fourier de uma função  $f \in L^1([0, 2\pi])$  também como sendo a série de Fourier da função definida em  $\mathbb{R}$  que coincide com a função dada no intervalo  $[0, 2\pi]$  e é periódica de período  $2\pi$ . Assim, no estudo de séries de Fourier não há inconveniente em identificar cada função  $f \in L^1([0, 2\pi])$  com a sua extensão periódica de período  $2\pi$  a  $\mathbb{R}$ , convenção que adoptamos.

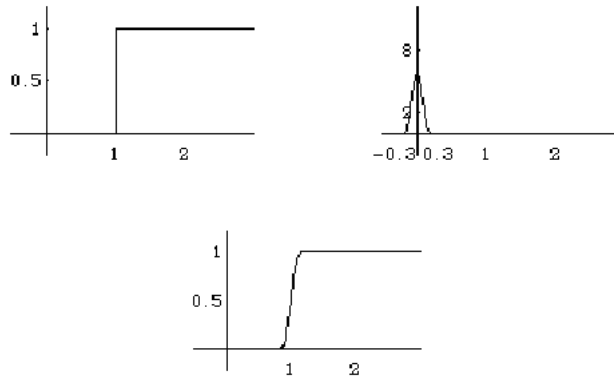


Figura 7.3: Convolução de funções: a função em baixo é a convolução das funções em cima

Define-se a **convolução** de funções  $f, g \in L^1([0, 2\pi])$  por (Figura 7.3)

$$(f * g)(t) = \int_0^{2\pi} f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O resultado seguinte mostra que a convolução tem propriedades semelhantes a um produto em  $L^1([0, 2\pi])$ .

(7.8) **Teorema:** Se  $f, g, h \in L^1([0, 2\pi])$ , então  $f * g$  é periódica de período  $2\pi$ ,  $f * g \in L^1([0, 2\pi])$ ,  $f * g = g * f$ ,  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ,  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$  e  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ .

*Dem.* As funções  $(t, \tau) \mapsto f(t - \tau)$  e  $(t, \tau) \mapsto g(\tau)$  são mensuráveis, pelo que a função  $(t, \tau) \mapsto F(t, \tau) = f(t - \tau)g(\tau)$  também é mensurável. Como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |F(t, \tau)| dt \right) d\tau &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |f(t - \tau)| dt \right) |g(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \|f\|_{L^1} |g(\tau)| d\tau = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}, \end{aligned}$$

o Teorema de Tonelli<sup>17</sup> garante que  $F \in L^1([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$  e, portanto, pode-se aplicar o Teorema de Fubini<sup>18</sup> para obter

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_0^{2\pi} |(f * g)(t)| dt = \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} F(t, \tau) d\tau \right| dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |F(t, \tau)| d\tau \right) dt = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |F(t, \tau)| dt \right) d\tau = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

O facto de  $f * g$  ter período  $2\pi$  é imediato de  $f, g$  terem esse período. A comutatividade e a associatividade da convolução, e a distributividade da convolução em relação à adição são de verificação imediata. *Q.E.D.*

Uma outra importante propriedade é o resultado da convolução de duas funções ter a ordem de diferenciabilidade da função de maior ordem de diferenciabilidade, pelo que também pode ser usada para regularizar funções dando funções próximas com uma ordem de diferenciabilidade tão grande quanto se queira ou mesmo infinita. Embora esta propriedade não seja necessária para o que se segue, inclui-se aqui pela sua importância geral.

(7.9) **Proposição:** Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$ ,  $K \in C^n([0, 2\pi])$  e  $K(0) = K(2\pi)$ , então  $K * f \in C^n([0, 2\pi])$ , para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ . Se, além disso,  $K \geq 0$ ,  $\int_0^{2\pi} K = 1$ ,  $K = 0$  em pontos distantes mais de  $\epsilon > 0$  de 0 e  $2\pi$ , e  $f$

<sup>17</sup>Tonelli, Leonida (1885-1946). O Teorema de Tonelli garante a integrabilidade de uma função mensurável num produto cartesiano de dois intervalos sob a hipótese de existência de um dos integrais sucessivos correspondentes do módulo da função (ver, por exemplo, o livro do autor *Integrais Múltiplos*, Texto Editora 1993).

<sup>18</sup>Fubini, Guido (1879-1943). O Teorema de Fubini garante a possibilidade de cálculo do integral de uma função integrável num produto cartesiano de dois intervalos por integrais sucessivos em cada um dos intervalos (ver, por exemplo, o livro referido na nota anterior).

é limitada, então  $|f(t) - (K * f)(t)| \leq 2\epsilon \sup_{|t-\tau| < \epsilon} \{|f(t) - f(\tau)|\}$  para  $t \in [0, 2\pi]$ ; em particular, se  $|f| \leq M$  então  $|f - (K * f)| \leq 4\epsilon M$ .

*Dem.* As condições de troca da derivada com o integral que define  $K * f$  são satisfeitas, pelo que a derivada de ordem  $n$  é  $(K * f)^{(n)} = K^{(n)} * f$ , o que garante a validade da primeira afirmação.

nas condições da segunda afirmação é

$$\begin{aligned} |f(t) - (K * f)(t)| &= \left| \int_0^{2\pi} K(t-\tau) (f(t) - f(\tau)) d\tau \right| \leq \int_0^{2\pi} K(t-\tau) |f(t) - f(\tau)| d\tau \\ &= \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} K(t-\tau) |f(t) - f(\tau)| d\tau = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} |f(t) - f(\tau)| d\tau \\ &\leq 2\epsilon \sup_{|t-\tau| < \epsilon} \{|f(t) - f(\tau)|\}. \end{aligned}$$

Se, nestas condições,  $|f| \leq M$ , então  $\sup_{|t-\tau| < \epsilon} \{|f(t) - f(\tau)|\} \leq 2M$  para  $t, \tau \in [0, 2\pi]$ , concluindo a demonstração. *Q.E.D.*

O resultado anterior é útil em muitos contextos e pode ser aplicado com grande generalidade porque para qualquer  $\epsilon > 0$  existem funções  $K$  que são  $C^\infty$  e satisfazem as outras condições no enunciado da proposição anterior<sup>19</sup>.

Os coeficientes de Fourier satisfazem as propriedades seguintes.

(7.10) **Proposição:** *Seja  $f, g \in L^1([0, 2\pi])$ . Então, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ :*

1.  $(f + g)^\wedge(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$  ;
2.  $(af)^\wedge(n) = a\hat{f}(n)$ ,  $a \in \mathbb{C}$  ;
3.  $\hat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$  ;
4.  $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1}$  ;
5.  $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n) e^{-in\tau}$ , onde  $f_\tau(t) = f(t-\tau)$  para  $\tau \in [0, 2\pi]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ;
6.  $(f * g)^\wedge(n) = 2\pi \hat{f}(n) \hat{g}(n)$  ;
7.  $\hat{f}(n) e^{int} = (f * \varphi)(t)$ , onde  $\varphi(t) = e^{int} / (2\pi)$  ;
8. Se  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$  e  $\hat{f}(0) = 0$ , então a função contínua  $F$  é periódica de período  $2\pi$  e tem coeficientes de Fourier  $\hat{F}(n) = \hat{f}(n) / (in)$ .

<sup>19</sup> A funções  $K$  que satisfazem as condições indicadas chama-se **núcleos de regularização**, **núcleos de molificação** ou **molificadores** (do inglês *mollifying* e *mollifiers*). É fácil verificar que um exemplo concreto é obtido a partir da função  $C^\infty$  com suporte  $[-1, 1]$  definida por  $\psi(x) = e^{-1/(1-x^2)}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , definindo  $K_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \psi(x/\epsilon) / \int_{-1}^1 \psi$ .



*Dem.* As primeiras cinco propriedades são consequências imediatas das definições. Prova-se aqui explicitamente apenas as três restantes.

6. Com o teorema de Fubini e mudança de variáveis de integração

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f * g)(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)} dt \right) g(\tau) e^{-in\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) \left( \int_0^{2\pi} g(\tau) e^{-in\tau} d\tau \right) = 2\pi \hat{f}(n) \hat{g}(n). \end{aligned}$$

7. Com mudança de variáveis de integração obtém-se

$$\begin{aligned} (f * \varphi)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{in\tau} d\tau \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)} d\tau \right) e^{int} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-in\tau} d\tau \right) e^{int} = \hat{f}(n) e^{int}. \end{aligned}$$

8. No apêndice B estabelece-se que  $F$  é contínua e  $F' = f$  q.t.p. em  $[0, 2\pi]$ . Verifica-se  $F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(s) ds = 2\pi \hat{f}(0) = 0 = F(0)$ . Integrando por partes,

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(t) \frac{1}{in} e^{-int} dt = \frac{1}{in} \hat{f}(n).$$

*Q.E.D.*

Estas propriedades facilitam o cálculo com séries de Fourier. Em particular, os coeficientes de Fourier da convolução de funções são iguais a  $2\pi$  vezes o produto dos correspondentes coeficientes das parcelas, o termo  $n$  da série de Fourier de uma função  $f$  é dado pela convolução de  $f$  com a função  $e^{int}/2\pi$ , e os coeficientes de Fourier do integral indefinido  $F$  de qualquer função  $f \in L^1([0, 2\pi])$  com média nula obtêm-se dividindo os correspondentes coeficientes da série de Fourier de  $f$  por  $in$ , para  $n \neq 0$ .

A 4ª propriedade da proposição anterior estabelece que as sucessões dos coeficientes de Fourier de funções em  $L^1([0, 2\pi])$  são limitadas. Pode-se provar facilmente o resultado mais forte de que necessariamente convergem para zero no infinito. Podia ser dada uma demonstração directa baseada numa argumentação aplicável no quadro dos integrais de Riemann, mas usa-se aqui uma demonstração mais simples baseada nos resultados da secção anterior para séries de Fourier de funções de quadrado integrável. Na verdade, este último resultado ficou dependente de provar que o conjunto ortonormal

$O = \{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$  é completo o que só se faz na secção seguinte, sem usar a propriedade aqui considerada. Opta-se por antecipar esta propriedade, ficando a demonstração apenas pendente da prova de  $O$  ser um conjunto ortonormal completo, para que esta importante propriedade dos coeficientes de Fourier fique na secção onde as outras propriedades básicas são consideradas.

(7.11) **Lema de Riemann-Lebesgue:**  $f \in L^1([0, 2\pi])$  implica  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  para  $|n| \rightarrow \infty$ .

*Dem.* A soma parcial de ordem  $m$  da série de Fourier é o polinómio trigonométrico  $p_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$ . Devido à ortogonalidade dos elementos de  $O$  em  $L^2([0, 2\pi])$ , para  $|n| > m$  é  $\int_0^{2\pi} p_m(t) e^{-int} dt = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} 2\pi |\widehat{f}(n)| &= \left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} [f(t) - p_m(t)] e^{-int} dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(t) - p_m(t)| dt = \|f - p_m\|_{L^1}. \end{aligned}$$

O resultado é agora directo para funções  $g \in L^2([0, 2\pi])$  devido à convergência da série de Fourier de  $g$  para esta própria função na norma de  $L^2$  estabelecida na secção anterior, embora dependente de  $O$  ser um conjunto ortonormal completo, pois  $\|g - p_m\|_{L^1} \leq \|g - p_m\|_{L^2}$  e esta norma converge para zero quando  $m \rightarrow \infty$ , o que implica que  $\widehat{g}(n) \rightarrow 0$  para  $|n| \rightarrow \infty$ .

A densidade de  $C^k([0, 2\pi]) \subset L^2([0, 2\pi]) \subset L^1([0, 2\pi])$  em  $L^1([0, 2\pi])$  implica a densidade de  $L^2([0, 2\pi])$  em  $L^1([0, 2\pi])$ . Logo, qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existe  $g \in L^2([0, 2\pi])$  tal que  $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$ . Do resultado anterior, para  $m$  suficientemente grande  $\|g - p_m\|_{L^2} < \epsilon$ . Em consequência,

$$2\pi |\widehat{f}(n)| \leq \|f - p_m\|_{L^1} \leq \|f - g\|_{L^1} + \|g - p_m\|_{L^1} \leq \epsilon + \|g - p_m\|_{L^2} < 2\epsilon,$$

o que prova  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  para  $|n| \rightarrow \infty$ .

*Q.E.D.*

Como

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (\cos nt + i \sin nt) dt,$$

o Lema de Riemann-Lebesgue equivale a afirmar que  $f \in L^1([0, 2\pi])$  implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = 0.$$

É fácil mostrar com relações trigonométricas que estas duas propriedades são equivalentes pelo que o Lema de Riemann-Lebesgue é equivalente a qualquer uma delas. Também se pode verificar, usando relações trigonométricas e a multiplicação de funções em  $L^1([0, 2\pi])$  pela função igual a 1 num intervalo arbitrário  $I \subset [0, 2\pi]$  e a 0 fora do intervalo, a equivalência com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(\omega_n t + \sigma_n) dt = 0,$$

para quaisquer sucessões  $\{\omega_n\}, \{\sigma_n\} \subset \mathbb{R}$ , com  $|\omega_n| \rightarrow \infty$  e  $f \in L^1(I)$ , que também é uma formulação comum do Lema de Riemann-Lebesgue.

## (7.12) Exemplos:

1. A função  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(t) = t/\pi$ , para  $0 \leq t \leq \pi$  e com  $f(t) = 0$  para  $\pi < t \leq 2\pi$ , é obviamente uma função integrável que, portanto, tem série de Fourier

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

com

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} dt = \frac{1}{2},$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos nt dt = \begin{cases} -2/(\pi^2 n^2) & , \text{ se } n \text{ ímpar} \\ 0 & , \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt dt = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

A Figura 7.4 mostra o gráfico da função  $f$  sozinho e sobreposto aos termos da série de Fourier até à harmónica-14. A Figura 7.5 mostra os coeficientes de Fourier  $\hat{f}(\pm n) = (A_n - iB_n)/2$ , para  $n \in \mathbb{N}$  e  $\hat{f}(0) = A_0/2$ , em função de  $n$ , através de gráficos do módulo e do argumento.

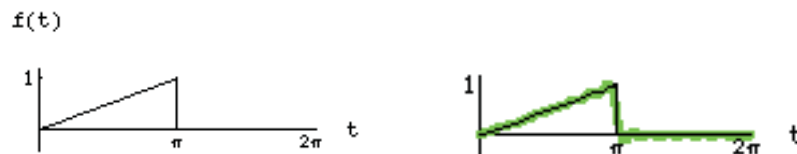


Figura 7.4: Função e aproximação pelos primeiros 14 termos da série de Fourier

2. A função  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(t) = \cos^2 t$  é obviamente uma função integrável que, portanto, tem série de Fourier. A extensão de período  $2\pi$  de  $f$  a  $\mathbb{R}$  é uma função par, pelo que a sua série de Fourier é uma série de cosenos

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt.$$

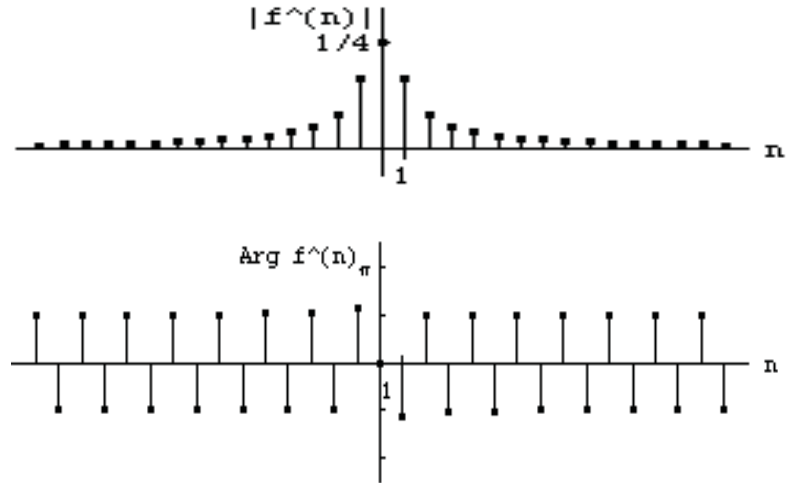


Figura 7.5: Decomposição espectral do impulso em rampa da figura anterior

Como o conjunto de funções  $S = \{\varphi_n : \varphi_n(t) = \cos nt, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  é ortogonal em relação ao produto interno de  $L^2([0, 2\pi])$ , os termos da série de Fourier ordem  $n = N$  são a projecção de  $f$  sobre o espaço linear gerado por  $S$  em relação ao mesmo produto interno e  $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$ , conclui-se que

$$A_0 = 1, \quad A_2 = 1/2, \quad A_n = 0 \text{ para } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}.$$

A Figura 7.6 mostra o gráfico da função  $f$  sozinho e sobreposto aos termos da série de Fourier até à harmónica-14. A Figura 7.7 mostra os coeficientes de Fourier  $\hat{f}(\pm n) = A_n/2$ , para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , em função de  $n$ , através de gráficos do módulo e do argumento.

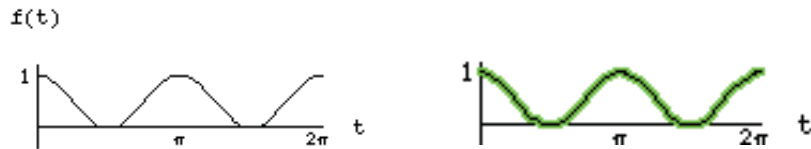


Figura 7.6: Função e aproximação pelos primeiros 14 termos da série de Fourier

3. Seja  $0 < \Delta < \pi$  e  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(t) = 1$  para  $0 \leq t \leq \Delta$  e para  $2\pi - \Delta \leq t \leq 2\pi$ , e com  $f(t) = 0$  para  $\Delta < t < 2\pi - \Delta$ . É obviamente uma função integrável que, portanto, tem série de Fourier. A extensão de

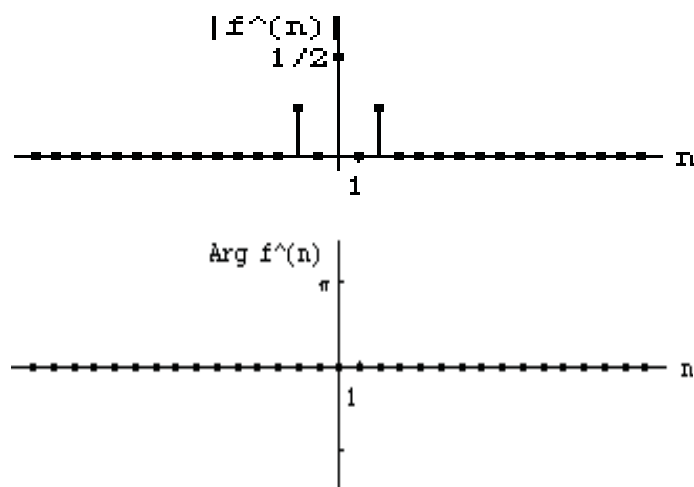


Figura 7.7: Decomposição espectral do quadrado do cosseno da figura anterior

período  $2\pi$  de  $f$  a  $\mathbb{R}$  é uma função par, pelo que a sua série de Fourier é uma série de cossenos

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt,$$

onde, considerando  $f$  estendida a  $\mathbb{R}$  como referido,

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} 1 dt = \frac{2\Delta}{\pi},$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos nt dt = \frac{2 \sin n\Delta}{n\pi}, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A 7.8 mostra o gráfico da função  $f$  sozinho e sobreposto aos termos da série de Fourier até à harmónica-14. A Figura 7.9 mostra os coeficientes de Fourier  $f^{\sim}(\pm n) = A_n/2$ , para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , em função de  $n$ , através de gráficos do módulo e do argumento<sup>20</sup>.

- No exemplo anterior obteve-se uma série de cossenos para a função dada pois a sua extensão de período  $2\pi$  a  $\mathbb{R}$  é par. É fácil obter uma série de senos para a mesma função dada no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Na verdade, basta começar por estender  $f$  ao intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  de forma ser uma

<sup>20</sup>Em termos da função sinc referida a propósito do exemplo (7.6),  $A_n = (2\Delta/\pi)\text{sinc } n\Delta$ .

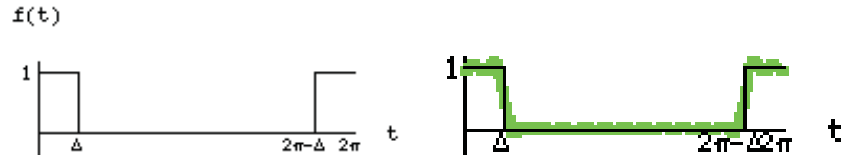


Figura 7.8: Função e aproximação pelos primeiros 14 termos da série de Fourier de senos

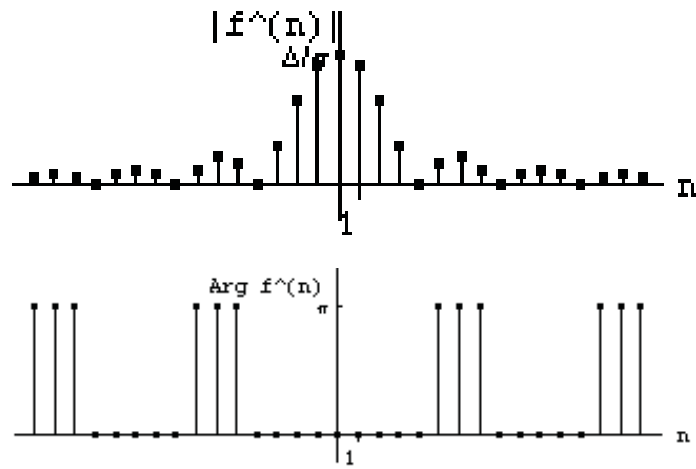


Figura 7.9: Decomposição espectral dos impulsos rectangulares da figura anterior em série de senos

função ímpar neste intervalo e, depois, estender a função obtida a  $\mathbb{R}$  de modo a ser periódica de período  $4\pi$ . Calculando a série de Fourier desta última função definida no intervalo  $[0, 4\pi]$ , obtém-se a série de senos seguinte

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{nt}{2},$$

onde, considerando  $f$  estendida a  $\mathbb{R}$  como referido,

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(t) \sin \frac{nt}{2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(t) \sin \frac{nt}{2} dt.$$

Como  $f(t) \sin(nt/2)$  é uma função par,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \frac{nt}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta} \sin \frac{nt}{2} dt + \int_{2\pi-\Delta}^{2\pi} \sin \frac{nt}{2} dt \\ &= \frac{2[1 - (-1)^n][1 - \cos(n\Delta/2)]}{n\pi} = \frac{2[1 - (-1)^n][1 - \cos(n\Delta/2)]}{n\pi}. \end{aligned}$$

A Figura 7.10 mostra o gráfico da função  $f$  sozinho e sobreposto aos termos da série de Fourier até à harmónica-14. A Figura 7.11 mostra coeficientes de Fourier  $\hat{f}(\pm n) = -iB_n/2$ , para  $n \in \mathbb{N}$  e  $\hat{f}(0) = 0$ , em função de  $n$ , através de gráficos do módulo e do argumento.

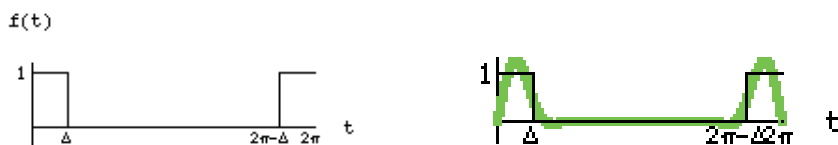


Figura 7.10: Função e aproximação pelos primeiros

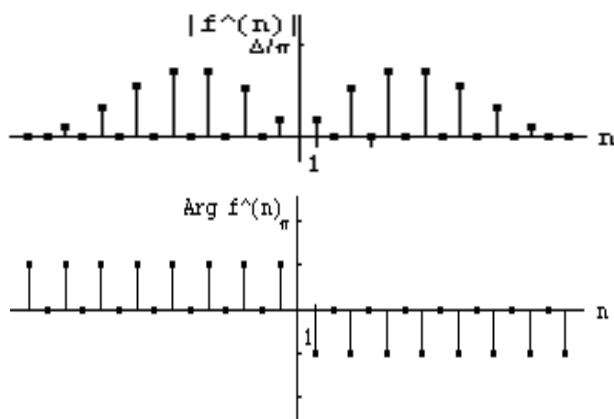


Figura 7.11: Decomposição espectral dos impulsos rectangulares da figura anterior em série de senos

## 7.4 Convergência uniforme de séries de Fourier de funções $C^2$ e $C^1$

Na secção 7.2 considerou-se a convergência em média quadrática de séries de Fourier em  $L^2(I)$ . Nesta secção inicia-se o estudo da **convergência pontual**, isto é, da convergência numérica da série de Fourier em cada ponto do intervalo  $I$ , primeiro no caso mais simples de todos, de funções  $C^2$  num intervalo compacto  $I$  com valores iguais nos extremos deste intervalo, e depois para funções  $C^1$ . Nestes casos, até se prova convergência uniforme da série de Fourier de uma função para essa função em  $I$ , o que é mais forte do que convergência pontual em todos os pontos de  $I$ .

Como na secção anterior, consideramos  $I = [0, 2\pi]$  sabendo que o que ficar estabelecido pode ser aplicado por uma simples mudança de variáveis quando  $I$  for um outro intervalo compacto.

A argumentação baseia-se em três ideias básicas:

1. as funções contínuas em  $[0, 2\pi]$  com valores iguais nos extremos deste intervalo podem ser uniformemente aproximadas por polinómios trigonométricos,
2. se uma função  $f$  contínua em  $[0, 2\pi]$  com valores iguais nos extremos deste intervalo tem série de Fourier uniformemente convergente em  $[0, 2\pi]$ , então esta série converge para  $f$ ,
3. os coeficientes de Fourier  $\widehat{f}(n)$  de uma função  $f \in C^k([0, 2\pi])$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tendem para zero mais rapidamente do que  $|n|^{-k}$  quando  $n \rightarrow \pm\infty$ .

A 1ª afirmação é um caso particular do chamado Teorema de Aproximação de Weierstrass. Para provar este teorema é útil considerar o **núcleo de Fejér**<sup>21</sup> (Figura 7.12)

$$(7.13) \quad K_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t}\right)^2,$$

pois da 1ª fórmula para  $K_n$  e da propriedade (7.10.7), tendo em conta as propriedades gerais da convolução, obtém-se

$$(K_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{ijt},$$

que é um polinómio trigonométrico, pelo que para provar a 1ª afirmação acima basta provar  $K_n * f \rightarrow f$  uniformemente em  $[0, 2\pi]$  para  $n \rightarrow +\infty$ . Obviamente a 2ª fórmula não está definida em pontos onde  $\sin(t/2) = 0$  (*i.e.*,  $t = 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ ), mas pode ser estendida por continuidade a esses pontos com o valor  $(n+1)/(2\pi)$  uma vez que a regra de l'Hôpital ou relações trigonométricas mostram que a função definida pela 2ª fórmula tem limite nesses pontos igual a este valor; assim, considera-se a 2ª fórmula prolongada por continuidade aos pontos indicados. A igualdade das duas fórmulas dadas acima para  $K_n$  obtém-se provando por indução finita a igualdade

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{it}}{4} - \frac{e^{-it}}{4}\right) \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{i(n+1)t}}{4} - \frac{e^{-i(n+1)t}}{4}\right).$$

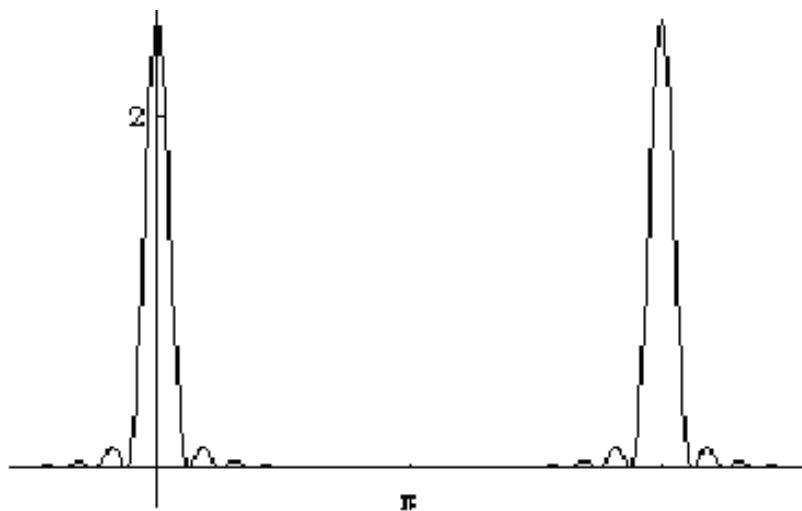
e utilizando  $1/2 - e^{it}/4 - e^{-it}/4 = (1 - \cos t)/2 = \sin^2(t/2)$ .

O núcleo de Fejér tem as propriedades seguintes.

---

<sup>21</sup>Fejér, Lipót (1880-1959).



Figura 7.12: Núcleo de Fejér, com  $n=9$ 

(7.13) **Proposição:** O núcleo de Fejér  $K_n$  definido por (7.13) é uma função par definida e contínua em  $\mathbb{R}$ , periódica de período  $2\pi$ , com  $K_n \geq 0$  e  $K_n(0) = (n+1)/(2\pi)$ , que satisfaz as propriedades seguintes:

1.  $\int_0^{2\pi} K_n = 1$ ;
2.  $\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow +\infty$  qualquer que seja  $\delta \in ]0, \pi[$ ;
3.  $K_n * f$ , para todo  $f \in L^1([0, 2\pi])$  é o polinómio trigonométrico

$$(K_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{ijt}.$$

*Dem.* As primeiras afirmações são consequências óbvias da 2ª fórmula para  $K_n$  em (7.13) e do prolongamento por continuidade a pontos  $t = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , como indicado acima.

1. resulta de observar que a 1ª fórmula para  $K_n$  em (7.13) é um polinómio trigonométrico, pelo que a média de  $K_n$  em  $[0, 2\pi]$  é o termo de ordem zero, que é  $1/2\pi$ .

2. resulta da 2ª fórmula para  $K_n$  em (7.13) implicar para  $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$  que  $K_n(t) \leq 1/[2\pi(n+1)\sin^2(\delta/2)] \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow +\infty$ .

3. já foi provada logo a seguir à definição de  $K_n$  em (7.13). Q.E.D.

(7.14) **Teorema de Aproximação de Weierstrass com polinómios trigonométricos:** Qualquer  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e periódica de período  $2\pi$  pode ser uniformemente aproximada por polinómios trigonométricos.

*Dem.* Se  $f$  satisfaz as condições enunciadas e  $K_n$  é o núcleo de Fejér, então

$$\begin{aligned} |f(t) - (K_n * f)(t)| &= \left| \int_0^{2\pi} K_n(\tau) [f(t) - f(t-\tau)] d\tau \right| \\ &\leq \int_0^\delta K_n(\tau) |f(t) - f(t-\tau)| d\tau + \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(\tau) |f(t) - f(t-\tau)| d\tau \\ &\quad + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} K_n(\tau) |f(t) - f(t-\tau)| d\tau \\ &\leq \max_{\tau \in [0, \delta]} |f(t) - f(t-\tau)| + 2 \max_{\tau \in [0, 2\pi]} |f(\tau)| \int_\delta^{2\pi-\delta} K_n \\ &\quad + \max_{\tau \in [2\pi-\delta, 2\pi]} |f(t) - f(t-\tau)|. \end{aligned}$$

O Teorema de Heine<sup>22</sup>-Cantor<sup>23</sup> garante que uma função  $f$  contínua no intervalo compacto  $[0, 2\pi]$  é uniformemente contínua neste intervalo e, portanto, qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para  $|x - y| < \delta$ . Escolhendo  $\delta > 0$  deste modo e tomando  $n$  suficientemente grande obtém-se  $|f(t) - (K_n * f)(t)| \leq 2\epsilon (1 + \max_{\tau \in [0, 2\pi]} |f(\tau)|)$  para  $t \in [0, 2\pi]$ . Logo,  $K_n * f \rightarrow f$  uniformemente em  $[0, 2\pi]$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Sabe-se de 3. na proposição anterior que  $K_n * f$  é um polinómio trigonométrico. *Q.E.D.*

O resultado seguinte estabelece que séries de Fourier de funções contínuas periódicas que convergem uniformemente convergem necessariamente para a respectiva função.

(7.15) **Teorema:** Se  $f \in C([0, 2\pi])$ ,  $f(0) = f(2\pi)$  e a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $g$  em  $[0, 2\pi]$ , então  $g = f$ .

*Dem.* Como  $g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \varphi_n$  com  $\varphi_n(t) = e^{int} / \sqrt{2\pi}$  e a convergência desta série é uniforme em  $[0, 2\pi]$ , os coeficientes de Fourier  $\hat{g}(n) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} g \overline{\varphi}_n$  podem ser calculados integrando a série termo a termo. As funções  $\varphi_n$  são ortonormais. Logo  $\hat{g}(n) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} g \overline{\varphi}_n = \hat{f}(n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $f$  e  $g$  têm os mesmos coeficientes de Fourier e a função contínua  $h = f - g$  tem todos os coeficientes de Fourier nulos,  $\hat{h}(n) = 0$ . Pretende-se provar que  $h = 0$ , o que não resulta imediatamente de todos os seus coeficientes de Fourier serem nulos porque neste ponto da demonstração ainda não se tem a garantia da série de Fourier de  $h$  convergir para  $h$ .

Considera-se o conjunto  $\Psi_N$  dos polinómios trigonométricos de grau menor ou igual a  $N \in \mathbb{N}$ . Sabe-se da secção 7.2 que o elemento de  $\Psi_N$  mais próximo de  $h$  na norma de  $L^2([0, 2\pi])$  é a soma parcial  $S_N(h)$  de ordem  $N$  da

<sup>22</sup>Heine, Eduard (1821-1881).

<sup>23</sup>Cantor, Georg (1845-1918).

série de Fourier de  $h$ . Como  $S_N(h) = 0$ , temos  $\|h\| = \|h - S_N(h)\| \leq \|h - \psi\|$  para todo  $\psi \in \Psi_N$ . A função  $g$  é periódica de período  $2\pi$  pois é a soma de uma série de Fourier. Logo  $g$  tem valores iguais nos extremos do intervalo  $[0, 2\pi]$ , o que também acontece para  $h$ . Do Teorema de Aproximação de Weierstrass (7.14), o lado direito desta desigualdade pode ser feito arbitrariamente pequeno, pelo que  $\|h\|_{L^2([0, 2\pi])} = 0$  e, portanto,  $h = 0$  q.t.p. em  $[0, 2\pi]$ . Como  $h$  é contínua temos  $h = 0$  em todos os pontos de  $[0, 2\pi]$ . *Q.E.D.*

Prova-se agora o resultado anunciado no início da secção para a ordem de convergência para zero dos coeficientes de funções  $C^k$ .

**(7.16) Proposição:** *Se  $f \in C^k([0, 2\pi])$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , então para  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*

$$|\widehat{f}(n)| = (2\pi)^{-1} |(f^{(j)})^\wedge(n)| |n|^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$|\widehat{f}(n)| \leq (2\pi)^{-1} \min_{j=0,1,\dots,k} \|f^{(j)}\|_{L^1} |n|^{-j}.$$

*Dem.* Se  $g \in C^1([0, 2\pi])$  é  $g(t) = \int_0^t g' + g(0)$  e a propriedade (7.10.8) dá  $\widehat{g}(n) = (g')^\wedge(n)/(in)$  para  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Por indução finita, se  $f \in C^k([0, 2\pi])$  com  $k \in \mathbb{N}$ , obtém-se  $|\widehat{f}(n)| = |(f^{(j)})^\wedge(n)/(in)^j| = |(f^{(j)})^\wedge(n)|/|n|^j$  para  $j = 1, \dots, k$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . De (7.10.4) é  $|(f^{(j)})^\wedge(n)| \leq (2\pi)^{-1} \|f^{(j)}\|_{L^1}$ , para  $j = 0, 1, \dots, k$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , o que termina a prova. *Q.E.D.*

Podemos agora estabelecer que as séries de Fourier de funções  $C^2$  convergem uniformemente para as respectivas funções.

**(7.17) Teorema:** *Se  $f \in C([0, 2\pi])$ ,  $f(0) = f(2\pi)$  e  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|$  converge, então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em  $[0, 2\pi]$ .*

*Dem.* O módulo de cada termo da série de Fourier de  $f$  é igual ao correspondente termo da série numérica  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|$ , que é convergente dado que da proposição (7.16) é dominada pela série convergente  $\sum n^{-2}$  multiplicada por  $(2\pi)^{-1} \|f^{(k)}\|_{L^1}$ . Portanto, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em  $[0, 2\pi]$  para uma função  $g$  contínua em  $[0, 2\pi]$ . O teorema anterior garante  $g = f$ . *Q.E.D.*

Prova-se agora que  $O = \{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$  é um conjunto ortonormal completo em  $L^2([0, 2\pi])$ , como referido no exemplo (7.6). É assim completada a prova da convergência em média quadrática de todas as

séries de Fourier de funções em  $L^2([0, 2\pi])$  considerada na 2ª secção deste capítulo.

(7.18) **Teorema:**  $O = \{\varphi_n : \varphi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$  é um conjunto ortonormal completo em  $L^2([0, 2\pi])$ . Toda a função  $f \in L^2([0, 2\pi])$  é igual à sua série de Fourier, com a convergência na norma de  $L^2([0, 2\pi])$ .

*Dem.* Do teorema (7.1) sabe-se que o conjunto das funções  $C^2$  em  $[0, 2\pi]$  é denso em  $L^2([0, 2\pi])$ . É fácil ver que, dados  $\epsilon > 0$  e  $f \in L^2([0, 2\pi])$  existe  $g \in C^2([0, 2\pi])$  com  $g(0) = g(2\pi)$  tal que  $\|f - g\|_{L^2} < \epsilon$ . O teorema anterior garante que a série de Fourier de  $g$  converge uniformemente para  $g$  em  $[0, 2\pi]$ . Designando por  $S_n(g)$  a soma parcial de ordem  $n$  da série de Fourier de  $g$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > M$  é  $\|g - S_n(g)\|_{L^2} \leq \epsilon$ . Sabe-se da secção 7.2 que o polinómio trigonométrico de ordem menor ou igual a  $n$  mais próximo de  $f$  na norma de  $L^2([0, 2\pi])$  é  $S_n(f)$ , pelo que

$$\|f - S_n(f)\|_{L^2} \leq \|f - S_n(g)\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - S_n(g)\|_{L^2} < 2\epsilon.$$

Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, conclui-se que a série de Fourier de qualquer função  $f \in L^2([0, 2\pi])$  converge para  $f$  na norma de  $L^2([0, 2\pi])$ . O teorema (7.5) estabelece que tal acontece se e só se  $O$  é um conjunto ortonormal completo.

A 2ª afirmação resulta também do teorema (7.5). *Q.E.D.*

O resultado anterior permite estabelecer a unicidade de séries de Fourier para funções de  $L^2([0, 2\pi])$  e, portanto, também para funções  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

(7.19) **Teorema de unicidade de séries de Fourier:** Se as séries de Fourier de  $f, g \in L^2([0, 2\pi])$  são iguais, então  $f = g$  q.t.p. em  $[0, 2\pi]$ . Em particular,  $f = g$  em todos os pontos onde ambas são contínuas.

*Dem.* A série de Fourier de  $f - g$  tem coeficientes nulos, pelo que converge para zero. Do teorema precedente, esta série converge para  $f - g$  na norma de  $L^2$ , pelo que  $f - g = 0$  q.t.p. em  $[0, 2\pi]$ . Se  $t$  é um ponto de continuidade de  $f$  e  $g$ , também é um ponto de continuidade de  $f - g$ . Como existem pontos arbitrariamente próximos onde  $f - g$  é zero, é  $f - g = 0$  em  $[0, 2\pi]$ . *Q.E.D.*

A convergência uniforme de séries de Fourier de funções  $f \in C^2([0, 2\pi])$  com valores iguais nos extremos do intervalo pôde ser facilmente obtida em consequência dos módulos dos seus coeficientes de Fourier  $|\hat{f}(n)|$  decrescerem mais rapidamente ou como  $|n|^{-2}$  quando  $|n| \rightarrow \infty$  e, portanto, as correspondentes séries de valores absolutos dos termos da série de Fourier serem majoradas por múltiplos da série numérica convergente  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{-2}$ .

A majoração correspondente no caso de funções  $C^1$  conduz à série harmônica  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{-1}$ , que é divergente, pelo que o argumento não pode ser aplicado neste caso. Contudo, o resultado pode neste caso ser estabelecido majorando módulos de somas de termos consecutivos da série em vez dos módulos de cada um dos seus termos. Na verdade, a demonstração aplica-se sem qualquer alteração ao caso menos restrito de funções contínuas com derivada integrável à Riemann no intervalo  $[0, 2\pi]$  e com valores iguais nos extremos deste intervalo<sup>24</sup>, pelo que é enunciado com esta hipótese.

(7.20) **Teorema:** *Se  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável,  $f'$  é integrável à Riemann e  $f(0) = f(2\pi)$ , então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em  $[0, 2\pi]$ . Em particular, o resultado é válido para  $f \in C^1([0, 2\pi])$  com  $f(0) = f(2\pi)$ .*

*Dem.* Como  $f(t) = \int_0^t f' + f(0)$ , (7.10.8) dá que  $f$  é contínua, logo integrável em  $[0, 2\pi]$ , e  $\widehat{f}'(n) = in \widehat{f}(n)$  para  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . É claro que  $f' \in L^2([0, 2\pi])$ . Com  $\varphi_n(t) = e^{int} / \sqrt{2\pi}$  e a Desigualdade de Bessel do teorema (7.4), obtém-se para  $m, p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{|n|=m+1}^{m+p} |n \widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}'(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f', \varphi_n \rangle \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|_{L^2}^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz<sup>25</sup> obtém-se para  $m, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|n|=m+1}^{m+p} \widehat{f}(n) e^{int} \right| &= \left| \sum_{|n|=m+1}^{m+p} n \widehat{f}(n) \frac{e^{int}}{n} \right| \\ &\leq \left( \sum_{|n|=m+1}^{m+p} |n \widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|n|=m+1}^{m+p} \left| \frac{e^{int}}{n} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_{L^2} \left( 2 \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como a série  $\sum 1/n^2$  é convergente, conclui-se que a sucessão de somas parciais de  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$  satisfaz a condição de Cauchy uniformemente, pelo que converge uniformemente em  $[0, 2\pi]$ . Todos os termos são funções contínuas de período  $2\pi$ , pelo que a série converge para uma função  $g$  contínua em  $[0, 2\pi]$  com  $g(0) = g(2\pi)$ . Como esta é a série de Fourier de  $f$ , o teorema (7.15) garante  $f = g$ . Q.E.D.

De modo a poder usar o resultado directamente para séries de Fourier de derivadas de funções  $C^k$  com derivada de ordem  $k+1$  integrável à Riemann

<sup>24</sup>No apêndice C estende-se este resultado com a teoria do integral de Lebesgue para funções  $f$  absolutamente contínuas com  $f' \in L^2([0, 2\pi])$ .

<sup>25</sup>Schwarz, Hermann (1843-1921).

no intervalo  $[0, 2\pi]$  e a função e todas as suas derivadas até à ordem  $k$  com valores iguais nos extremos do intervalo, enuncia-se o corolário seguinte.

(7.21) **Corolário:** Se  $f \in C^k([0, 2\pi])$ ,  $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi)$  para  $j = 0, \dots, k$ , e  $f^{(k+1)}$  é integrável à Riemann em  $[0, 2\pi]$ , então  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^k \widehat{f}(n) e^{int}$  converge uniformemente para  $f^{(k)}$  em  $[0, 2\pi]$ , para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Dem.* Como  $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ , o teorema anterior implica que a série de Fourier de  $f^{(k)}$  converge uniformemente para  $f^{(k)}$  em  $[0, 2\pi]$ . Resta verificar que esta série de Fourier é a série indicada no enunciado, o que resulta de observar que  $f^{(j)}(t) = \int_0^t f^{(j+1)} + f^{(j)}(0)$  e que a aplicação sucessiva da propriedade (7.10.8) dá  $(f^{(k)})^\wedge(n) = (in)^k$  para  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Q.E.D.

## 7.5 Fenómeno de Gibbs e convergência de séries de Fourier de funções seccionalmente diferenciáveis com derivada integrável

Nos exemplos das figuras 7.2 a 7.11 observou-se que a aproximação de funções com descontinuidades de salto por séries de Fourier está associada à ocorrência nas correspondentes sucessões de somas parciais de oscilações junto à descontinuidade que excedem ou ficam aquém (em inglês *overshoot* e *undershoot*) os valores limites, mas que permanecem em todos os termos, apesar da convergência pontual das somas parciais para os valores da função tão próximo da descontinuidade quanto se queira. A convergência da série de Fourier para o seu limite na vizinhança de uma descontinuidade não é uniforme, embora seja possível estabelecer convergência uniforme dos gráficos das somas parciais, como conjuntos, para um conjunto que não é o gráfico de uma função, dado que é um segmento de recta vertical e excede por uma fracção do salto da descontinuidade o valor do limite lateral maior e fica aquém do valor do limite lateral menor por igual fracção do salto. A esta propriedade chama-se **Fenómeno de Gibbs**, embora tenha sido primeiro descrita por H. Wilbraham<sup>26</sup> em 1848 e só tenha sido considerada por J.W. Gibbs<sup>27</sup> em 1898.

Em consequência do estudo do Fenómeno de Gibbs estabelece-se um resultado de convergência de séries de Fourier em todos os pontos de um

<sup>26</sup> Wilbraham, Henry (1825-1883).

<sup>27</sup> Gibbs, Josiah Willard (1839-1903).

## 7.5 Fenómeno de Gibbs, conv. p/ funções secc. diferenciáveis 209

intervalo limitado  $I$  para **funções seccionalmente diferenciáveis** no intervalo  $I$ , isto é, diferenciáveis nos fechos dos subintervalos de uma partição finita de  $I$ , e com derivada integrável em  $I$ , permitindo a existência de um número finito de descontinuidades de salto. Para esta classe de funções as séries de Fourier convergem para o valor da função em pontos de continuidade e para a média dos limites laterais em pontos de descontinuidade, e a convergência é uniforme em subconjuntos fechados de  $I$  que não contenham pontos de descontinuidade, e conseqüentemente na união das suas repetições periódicas para além de  $I$ , enquanto nos pontos de descontinuidade ocorre o Fenómeno de Gibbs.

A análise do Fenómeno de Gibbs pode ser feita penas com base nas secções anteriores, no estudo de máximos e mínimos de funções reais e em trigonometria elementar ao nível da estudada no ensino secundário. Tal estudo, se bem que elementar, resulta longo e envolve compridas fórmulas trigonométricas. Como na secção seguinte se vai considerar a convergência pontual de séries de Fourier em geral, com base no núcleo de Dirichlet, e as oscilações associadas ao Fenómeno de Gibbs estão directamente relacionadas com este núcleo, opta-se por antecipar a introdução do núcleo de Dirichlet e utilizá-lo para análise do Fenómeno de Gibbs. A trigonometria aparece assim principalmente para estabelecer propriedade gerais do núcleo de Dirichlet e a análise pode ser mais curta. Esta opção tem a vantagem adicional de sublinhar a relação entre o Fenómeno de Gibbs e um instrumento tão fundamental em Análise de Fourier como o núcleo de Dirichlet.

Como se disse, para analisar a convergência pontual de séries de Fourier é útil considerar o **núcleo de Dirichlet**<sup>28</sup> (Figura 7.13)

$$(7.22) \quad D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

pois resulta da propriedade (7.10.7) aplicada à 1ª fórmula que as somas parciais da série de Fourier de  $f \in L^1([0, 2\pi])$  satisfazem  $S_n(f) = D_n * f$ . Obviamente a 2ª fórmula não está definida em pontos onde  $\sin t/2 = 0$  (i.e.,  $t = 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ ), mas pode ser estendida por continuidade a esses pontos com o valor  $(2n+1)/(2\pi)$  uma vez que a regra de l'Hôpital ou relações trigonométricas mostram que a função definida pela 2ª fórmula tem limite nesses pontos igual a este valor; assim, considera-se a 2ª fórmula prolongada por continuidade aos pontos indicados. A igualdade das duas fórmulas acima para  $D_n$  obtém-se notando que  $\sin(nt+t/2) - \sin(nt-t/2) = 2(\cos nt) \sin(t/2)$ , e portanto

---

<sup>28</sup>Note-se que o núcleo de Fejér introduzido na secção anterior é o quadrado do núcleo de Dirichlet normalizado para ter integral 1.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n e^{ijt} &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{e^{ijt} + e^{-ijt}}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos jt \right) \\
 (7.23) \qquad &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sin \frac{2j+1}{2} t - \sin \frac{2j-1}{2} t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t - \sin \frac{1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}.
 \end{aligned}$$

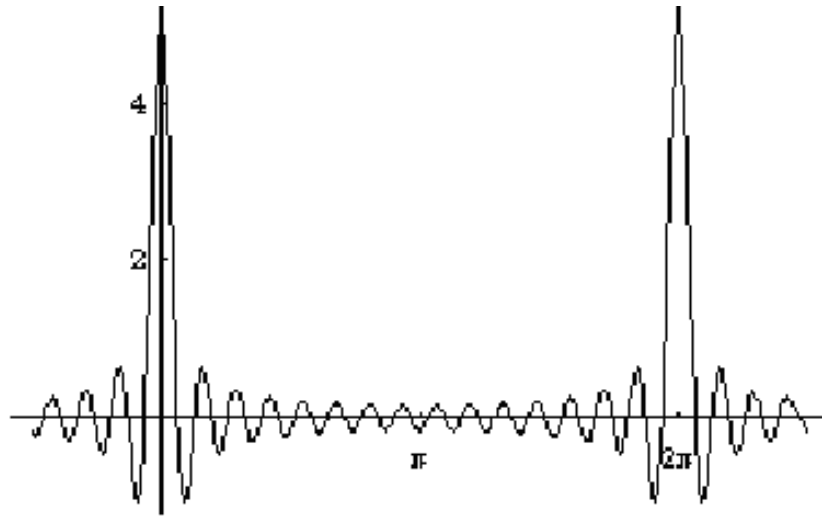


Figura 7.13: Núcleo de Dirichlet, com  $n=9$

Como  $S_n(f) = D_n * f$ , a série de Fourier de  $f$  é convergente num ponto  $t$  se e só se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (D_n * f)(t)$  existe e, então, a soma da série no ponto  $t$  é igual ao valor deste limite. Por esta razão o núcleo de Dirichlet vai ser utilizado na secção seguinte dedicada à convergência pontual de séries de Fourier.

O resultado seguinte dá para o núcleo de Dirichlet propriedades semelhantes às que foram estabelecidas para o núcleo de Fejér.

(7.24) **Proposição:** O núcleo de Dirichlet  $D_n$  definido por (7.22) é uma função par definida e contínua em  $\mathbb{R}$ , periódica de período  $2\pi$ , com  $D_n(0) = (2n+1)/(2\pi)$ , que satisfaz as propriedades seguintes:

1.  $\int_0^{2\pi} D_n = 1$ ;
2.  $\int_\delta^{2\pi-\delta} D_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow +\infty$  qualquer que seja  $\delta \in ]0, \pi[$ ;



## 7.5 Fenómeno de Gibbs, conv. p/ funções secc. diferenciáveis 211

3.  $D_n * f = S_n(f)$  para toda  $f \in L^1([0, 2\pi])$ , onde  $S_n(f)$  é a soma parcial de ordem  $n$  da série de Fourier de  $f$ .

*Dem.* As primeiras afirmações são consequências óbvias da 2ª fórmula para  $D_n$  em (7.22) e do prolongamento por continuidade a pontos  $t=2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , como indicado acima.

1. obtém-se da 1ª fórmula para  $D_n$  em (7.22) e de  $\int_0^{2\pi} e^{ijt} dt$  ser igual a zero se  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e a  $2\pi$  se  $j=0$ .

2. resulta da 2ª fórmula para  $D_n$  em (7.22) por aplicação do Lema de Riemann-Lebesgue (7.11) a  $\int_{\delta}^{2\pi-\delta} f(t) \sin(n+1/2)t dt$ , com  $f(t) = 1/(2\pi \sin(t/2))$ , dado que  $f$  é contínua em todo o intervalo e, portanto, pertence a  $L^1([\delta, 2\pi-\delta])$ .

3. já foi provada logo a seguir à definição de  $D_n$  em (7.22). *Q.E.D.*

### (7.25) Exemplos:

1. Começa-se por analisar o Fenómeno de Gibbs no caso da **função de impulsos rectangulares** periódica de período  $2\pi$  que no intervalo  $[0, 2\pi]$  é definida por

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in ]0, \pi[ \\ -1, & \text{se } t \in ]\pi, 2\pi[ \\ 0, & \text{se } t \in \{0, \pi, 2\pi\}. \end{cases}$$

Esta função periódica de período  $2\pi$  é uma função ímpar pelo que tem série de Fourier de senos e sucessão de somas parciais da série  $S_n(\mathcal{P})$  satisfaz  $S_n(\mathcal{P})(2\pi-t) = -S_n(\mathcal{P})(t)$ . Como a função é periódica de período  $2\pi$  também satisfaz  $S_n(\mathcal{P})(2\pi+t) = S_n(\mathcal{P})(t)$ . Como neste caso  $\mathcal{P}(\pi-t) = \mathcal{P}(t)$  também se verifica  $S_n(\mathcal{P})(\pi-t) = S_n(\mathcal{P})(t)$ .

Portanto, cada função  $S_n(\mathcal{P})$  pode ser completamente obtida por estas relações de simetria a partir dos valores em  $[0, \pi/2]$ .

Da propriedade (7.24.3) do núcleo de Dirichlet é  $S_n(\mathcal{P}) = D_n * \mathcal{P}$ , pelo que

$$S_n(\mathcal{P})(t) = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t-\tau) D_n(\tau) d\tau = \int_{t-\pi}^t D_n - \int_{t-2\pi}^{t-\pi} D_n.$$

A derivada desta função nos pontos  $t \neq j\pi$ , com  $j \in \mathbb{Z}$ , é

$$S_n(\mathcal{P})'(t) = D_n(t) - D_n(t-\pi) - D_n(t-\pi) + D_n(t-2\pi) = 2[D_n(t) - D_n(t-\pi)]$$

Da 1ª fórmula para  $D_n$  em (7.22) e atendendo a que  $e^{-ij\pi} = (-1)^{|j|}$  para  $j \in \mathbb{Z}$ , obtém-se

$$D_n(t) - D_n(t-\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n \left[ e^{ijt} - e^{ij(t-\pi)} \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=-n \\ j \text{ ímpar}}}^n e^{ijt}.$$

Como a soma no último termo só tem parcelas não nulas para  $j$  ímpar, para cada  $n$  par,  $D_n(t) - D_n(t - \pi) = D_{n-1}(t) - D_{n-1}(t - \pi)$ , e os termos de ordem par da sucessão de somas parciais  $\{S_n(\mathcal{P})\}$  são iguais aos termos de ordem ímpar imediatamente anteriores, ou seja  $S_{2n}(\mathcal{P}) = S_{2n-1}(\mathcal{P})$ . Com as mesmas relações usadas nas fórmulas (7.23), obtém-se  $S_{2n}(\mathcal{P})'(t) = S_{2n-1}(\mathcal{P})'(t) = (2/\pi)(\sin 2nt)/\sin t$  e, primitivando, obtém-se

$$S_{2n}(\mathcal{P})(t) = S_{2n-1}(\mathcal{P})(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2ns}{\sin s} ds.$$

Como estamos interessados nas propriedades oscilatórias das somas parciais da série de Fourier  $S_n(\mathcal{P})$  vamos analisar os máximos e mínimos relativos destas funções. Em vez de trabalhar directamente com esta sucessão estuda-se no intervalo  $[0, \pi]$  a sucessão de funções

$$(7.26) \quad \Phi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin ns}{\sin s} ds - 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

cujos termos de ordem par dão as somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{P}$  pela fórmula  $S_{2n}(\mathcal{P}) = S_{2n-1}(\mathcal{P}) = \Phi_{2n} + 1$ . Além de simplificar um pouco a notação, ficamos também com a análise feita para os termos de ordem ímpar, que é semelhante. Note-se que tanto os termos de ordem par como os de ordem ímpar estão directamente ligados ao núcleo de Dirichlet, pois para  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$(7.27) \quad \begin{aligned} \Phi'_{2k+1}(t) &= 4 D_k(2t), & \Phi_{2k+1}(t) &= 2 \int_0^{2t} D_k - 1, \\ \Phi'_{2k}(t) &= 2[D_{2k}(t) - D_{2k}(t - \pi)], & \Phi_{2k}(t) &= 2 \left( \int_{t-\pi}^t D_{2k} - \int_{t-2\pi}^{t-\pi} D_{2k} \right) - 1, \end{aligned}$$

ou seja, a menos de mudanças de escala no domínio e no contradomínio (respectivamente para o dobro e para um quarto) a derivada  $\Phi'_{2k+1}$  dos termos de ordem ímpar da sucessão de funções considerada é precisamente o núcleo de Dirichlet  $D_k$ , e a menos de uma mudança de escala no contradomínio (para metade) a derivada  $\Phi'_{2k}$  dos termos de ordem par é a diferença entre o núcleo de Dirichlet de ordem par correspondente e uma sua translação no domínio (de  $\pi$ ).

Começa-se por obter relações de simetria para as funções  $\Phi_n$  no intervalo  $[0, \pi]$  a partir das relações de simetria do núcleo de Dirichlet  $D_k(t) = D_k(-t)$ ,  $D_k(t + 2\pi) = D_k(t)$ , e de  $\int_0^{2\pi} D_k = 1$ . Note-se que para  $n = 1$  a função não tem oscilações, pois é  $\Phi_1(t) = 2t/\pi - 1$  cujo gráfico é um segmento de recta. Com mudanças de variáveis de integração obtém-se para todo  $t \in [0, \pi]$  e  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Phi_{2k}(\pi - t) &= 2 \left( \int_{-t-\pi}^{-t} D_k - \int_{-t}^{-t+\pi} D_k \right) - 1 = 2 \left( \int_{t-2\pi}^{t-\pi} D_k - \int_{t-\pi}^t D_k \right) - 1 = \Phi_{2k}(t), \\ \Phi_{2k+1}(\pi - t) &= 2 \int_0^{2(\pi-t)} D_k - 1 = 2 \left( \int_0^{2\pi} D_k + \int_{2\pi}^{2\pi-2t} D_k \right) - 1 = -2 \int_0^{2t} D_k + 1 = -\Phi_{2k+1}(t). \end{aligned}$$

## 7.5 Fenómeno de Gibbs, conv. p/ funções secc. diferenciáveis 213

Tendo em conta estas simetrias basta estudar as oscilações das funções  $\Phi_n$ , com  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  no intervalo  $]0, \pi/2[$ .

Para determinar os máximos e mínimos relativos de  $\Phi_n$  em  $]0, \pi[$  para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  calculam-se os pontos deste intervalo onde a derivada se anula, isto é, os pontos onde  $\sin nt = 0$ , que são  $t_{k,n} = k\pi/n$ , com  $k = 1, \dots, n-1$  para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Nos pontos  $t_{k,n} = k\pi/n$ , com  $k = 1, \dots, n-1$  para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , a 2ª derivada de  $\Phi_n$  é  $(2n/\pi)(\cos k\pi)/\sin t_{k,n} = (-1)^k 2n/(\pi \sin t_{k,n})$ . Como  $\sin t_{k,n} > 0$ , a 2ª derivada de  $\Phi_n$  em  $t_{k,n}$  é negativa para  $k$  ímpar e positiva para  $k$  par, pelo que os máximos e mínimos relativos de  $\Phi_n$  ocorrem nos pontos  $t_{k,n}$ , respectivamente com  $k$  ímpar e  $k$  par. Conforme  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  é ímpar ou par  $\Phi_n$  tem no intervalo  $]0, \pi[$  respectivamente um número par ou ímpar de máximos relativos, e um número ímpar ou par de mínimos relativos, e entre dois extremos relativos consecutivos  $\Phi_n$  tem um ponto de inflexão. Para  $n$  par, o ponto  $\pi/2$  a meio do intervalo é um ponto de extremo relativo que é um máximo relativo para  $n = 2$  (neste caso o único máximo relativo em  $]0, \pi[$  e alterna entre um máximo relativo e um mínimo relativo à medida que  $n$  cresce. Para  $n$  ímpar, o ponto  $\pi/2$  a meio do intervalo é um ponto de inflexão e alterna a situação de haver imediatamente à esquerda um máximo relativo e à direita um mínimo relativo para a situação inversa à medida que  $n$  cresce, verificando-se para  $n = 3$  que a função tem precisamente um máximo relativo à esquerda e  $\pi/2$  e um mínimo relativo à direita deste ponto.

Figura 7.14: Funções  $\Phi_n$  para alguns valores de  $n$  par e  $n$  ímpar

Como se viu, os máximos e os mínimos relativos de  $\Phi_n$  em  $]0, \pi[$  ocorrem nos pontos  $t_{k,n}$  com, respectivamente,  $k$  ímpar e  $k$  par, ou seja respectivamente nos pontos  $t_{2j-1,n} = (2j-1)\pi/n$  e  $t_{2j,n} = 2j\pi/n$  com  $j = 1, 2, \dots, [n/2]$ ,

onde  $[n/2]$  designa o maior inteiro  $\leq n/2$ . Para os valores dos correspondentes máximos ou mínimos relativos obtém-se

$$\Phi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi/n} \frac{\sin ns}{\sin s} ds - 1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^{k\pi} \frac{\sin \tau}{\sin \frac{\tau}{n}} d\tau - 1.$$

Com a 2ª fórmula é possível obter para a diferença dos valores absolutos de extremos relativos

$$n\pi \left[ \Phi_n\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) - \Phi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right] = - \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin \tau}{\sin \frac{\tau}{n}} d\tau.$$

A função  $\tau \mapsto \sin(\tau/n)$  é positiva e crescente em  $]0, n\pi/2[$ , logo também no intervalo da integração na última fórmula para extremos relativos no intervalo  $[0, \pi/2]$  (para os quais  $k \leq n/2$ ); a função  $\tau \mapsto \sin \tau$  é positiva no mesmo intervalo de integração para  $k$  ímpar e negativa para  $k$  par, e tem valores absolutos iguais em cada par de pontos de  $[0, \pi/2]$  cuja distância ao meio do respectivo intervalo de integração na última fórmula seja a mesma. Destas observações resulta que o lado direito da fórmula anterior é positivo para  $k$  par e negativo para  $k$  ímpar, com valores absolutos decrescentes à medida que  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$  aumenta, onde  $[n/2]$  designa o maior inteiro  $\leq n/2$ . Portanto, qualquer que seja  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fixo, em  $]0, \pi/2[$  os valores mínimos relativos são negativos e os valores máximos relativos são positivos e a sucessão finita dos valores absolutos de extremos relativos consecutivos é decrescente, pelo que a sucessão finita dos valores mínimos relativos é crescente e a sucessão finita dos valores máximos relativos é decrescente ao longo de  $[0, \pi/2]$  (Figura 7.14).

Consequentemente, para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , se  $t_{k,n}$  é um ponto de extremo relativo de  $\Phi_n$  em  $]0, \pi/2[$ , os valores de  $\Phi_n$  em  $[t_{k,n}, \pi/2]$  estão entre o valor desse extremo relativo e o valor do extremo relativo imediatamente seguinte, respectivamente  $\Phi_n(t_{k,n})$  e  $\Phi_n(t_{k+1,n})$ .

O menor ponto em  $]0, \pi[$  onde  $\Phi_n$ , com  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , tem um extremo relativo é  $t_{1,n} = \pi/n \leq \pi/2$ , e este extremo é um máximo relativo cujo valor é dado por qualquer das fórmulas<sup>29</sup>

$$\Phi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/n} \frac{\sin ns}{\sin s} ds - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} \left[ \frac{\sin \frac{\tau}{n}}{\frac{\tau}{n}} \right]^{-1} d\tau - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sinc} \tau}{\operatorname{sinc} \frac{\tau}{n}} d\tau - 1.$$

Com a 2ª fórmula, tendo em conta que  $\sin \tau > 0$  para  $0 < \tau < \pi$  e  $\tau \mapsto (\sin \tau)/\tau$  é estritamente decrescente em  $[0, \pi]$ , obtém-se

$$\frac{\pi}{2} \left[ \Phi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) - \Phi_{n+1}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right] = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sinc} \tau}{\operatorname{sinc} \frac{\tau}{n} - \operatorname{sinc} \frac{\tau}{n+1}} d\tau,$$

<sup>29</sup> Aparece aqui novamente a função  $\operatorname{sinc} t = (\sin t)/t$  referida nos exemplos (7.6) e (7.12) e introduzida por P. Woodward para facilitar a notação em Análise de Fourier. Para aliviar as fórmulas seguintes usa-se esta notação.

## 7.5 Fenómeno de Gibbs, conv. p/ funções secc. diferenciáveis 215

pelo que a sucessão dos valores destes primeiro máximos relativos  $\{\Phi_n(\pi/n)\}$ , com  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , é estritamente decrescente e, portanto, decresce para o seu limite

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sinc } \tau}{\text{sinc } \frac{\tau}{n}} d\tau - 1.$$

Como  $\tau \mapsto \text{sinc } \tau \leq 1$  é estritamente decrescente em  $[0, \pi]$  e  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \text{sinc } \tau = 1$ , obtém-se

$$\int_0^\pi \text{sinc } \tau d\tau \leq \frac{\pi \Delta}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{sinc } \frac{\tau}{n}} \int_0^\pi \text{sinc } \tau d\tau = \int_0^\pi \text{sinc } \tau d\tau.$$

Em consequência, a sucessão  $\{\Phi_n(\pi/n)\}$  dos valores dos primeiros máximos relativos de  $\Phi_n$  em  $]0, \pi]$  decresce estritamente e converge para

$$(7.28) \quad \Delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sinc } \tau d\tau - 1 = 0,1789797\dots^{30}$$

Figura 7.15: Convergência do primeiro máximo relativo de  $\Phi_n$  em  $[0, \pi]$  com *overshooting* na vizinhança de zero

Tal como se viu que  $\{\Phi_n(t_{1,n})\}$  é uma sucessão decrescente que converge para  $(2/\pi) \int_0^\pi \text{sinc } \tau d\tau > 0$ , pode-se ver para cada  $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fixo que a

<sup>30</sup>De  $\text{sinc } \tau < 1$  obtém-se  $\Delta < 1$ . Verificando que  $(\text{sinc } \tau)'' < 0$  em  $[0, 3\pi/4]$ , observa-se que  $\text{sinc}$  é côncava neste intervalo, pelo que a soma das áreas dos trapézios de bases verticais inscritos no conjunto de ordenadas desta função dá uma estimativa por defeito do integral da função no intervalo; como  $\text{sinc } \tau > 0$  em  $[0, \pi]$ , obtém-se a estimativa

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sinc} > \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2} + \text{sinc } \frac{\pi}{4} + \text{sinc } \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \text{sinc } \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \right) > 1,09.$$

Estas estimativas muito grosseiras dão  $0,09 < \Delta < 1$ . Valores mais aproximados do integral podem ser calculados refinando o cálculo numérico.

sucessão  $\{\Phi_n(t_{2j-1,n})\}_{n=2j}^\infty$  de valores máximos relativos em  $t_{2j-1,n} \in [0, \pi/2]$  é decrescente e converge para  $\Delta_j = (2/\pi) \int_0^{(2j-1)\pi} \text{sinc } \tau \, d\tau > 0$ , e analogamente, a sucessão  $\{\Phi_n(t_{2(j-1),n})\}_{n=2j}^\infty$  de valores máximos relativos em  $t_{2(j-1),n} \in [0, \pi/2]$  é crescente e converge para  $\delta_j = (2/\pi) \int_0^{2j\pi} \text{sinc } \tau \, d\tau < 0$ . É claro que

$$\Delta > \Delta_2 > \dots > \Delta_j > \dots > 0 > \dots > \delta_j > \dots > \delta_2 > \delta_1 > -\Delta.$$

O maior dos pontos  $t_{k,n}$  em  $[0, \pi/2]$  onde  $\Phi_n$  tem extremos relativos é  $t_{[n/2],n}$ . Se  $n$  é par este ponto coincide com  $\pi/2$ , e  $\Phi_n$  tem em  $\pi/2$  um máximo relativo se  $n/2$  é ímpar e um mínimo relativo se  $n/2$  é par; os valores destes extremos são  $\Phi_n(t_{[n/2],n}) = \Phi_n(\pi/2) = (2/\pi) \int_0^{n\pi/2} \text{sinc } \tau \, d\tau$ . Se  $n$  é ímpar  $\Phi_n$  tem um ponto de inflexão em  $\pi/2$  e  $t_{[n/2],n}$  coincide com o ponto  $\pi/2 - \pi/(2n)$ , pelo que neste caso  $\Phi_n$  tem um máximo relativo neste ponto se  $(n-1)/2$  é ímpar e um mínimo relativo se  $(n-1)/2$  é par. Os valores destes extremos em  $\pi/2 - \pi/(2n)$  são  $\Phi_n(t_{[n/2],n}) = \Phi_n(\pi/2 - \pi/(2n)) = (2/\pi) \int_0^{(n-1)\pi/2} \text{sinc } \tau \, d\tau$ . Como o integral impróprio de Riemann<sup>31</sup>  $\int_0^\infty \text{sinc } \tau \, d\tau = \pi/2$ , em ambos os casos tem-se  $\Phi_n(t_{[n/2],n}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Pode-se agora provar que  $\Phi_n \rightarrow 0$  uniformemente em cada intervalo fechado  $I$  contido em  $]0, \pi/2[$ . Na verdade, se  $\epsilon > 0$ , como  $\Phi_n(t_{[n/2],n}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N$  é  $|\Phi_n(t_{[n/2],n})| < \epsilon$ . Como para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fixo a sucessão finita de valores máximos relativos consecutivos de  $\Phi_n$  e a sucessão finita de valores mínimos relativos consecutivos em  $]0, \pi/2[$  são, respectivamente, decrescente e crescente, obtém-se para  $n \geq N$  que  $|\Phi_n(t)| < \epsilon$  para  $t \in [t_{N,n}, \pi/2]$ . Como  $t_{N,n} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  com  $M > N$  tal que para  $n \geq M$  o intervalo  $[t_{N,n}, \pi/2]$  contém o intervalo  $I$ , pelo que  $|\Phi_n| < \epsilon$  em  $I$ , ou seja, o gráfico da restrição da função ao intervalo  $I$  está contido no retângulo  $R_\epsilon = I \times ]-\epsilon, \epsilon[$ . Em consequência,  $\Phi_n \rightarrow 0$  uniformemente em  $I$ , como se pretendia provar. Devido às propriedades de simetria  $\Phi_{2k}(\pi-t) = \Phi_{2k}(t)$  e  $\Phi_{2k+1}(\pi-t) = -\Phi_{2k+1}(t)$ , para  $t \in [0, \pi]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , as conclusões anteriores determinam conclusões correspondentes para o intervalo  $[\pi/2, \pi[$  e, portanto, também para todo o intervalo  $]0, \pi[$ . É uma óbvia consequência do que foi estabelecido que  $\Phi_n \rightarrow 0$  em  $]0, \pi[$ , pois podem ser considerados intervalos fechados  $I \subset ]0, \pi[$  com extremidades tão próximas de 0 e de  $\pi$  quanto se queira, mas vemos a seguir que a convergência não é uniforme em quaisquer vizinhanças de 0 e de  $\pi$ .

O que se passa próximo das extremidades do intervalo  $[0, \pi]$  também pode ser clarificado com base na análise anterior. Tem-se  $\Phi_n(0) = -1$ . Como se viu,  $\Phi_n$  tem um 1º extremo relativo no intervalo  $]0, \pi[$  no ponto  $\pi/n$ , que é um máximo relativo de valor  $\Phi_n(\pi/n)$ . Quando  $n \rightarrow +\infty$  a parte do gráfico da função contínua  $\Phi_n$  entre os pontos 0 e  $\pi/n$  converge uniformemente

<sup>31</sup>Pode-se ver uma forma de calcular este integral impróprio no lema (??).

Figura 7.16: Fenómeno de Gibbs: somas parciais da série de Fourier de uma função periódica de impulsos rectangulares – *overshooting* e *undershooting* na vizinhança de descontinuidades de salto

para o segmento de recta vertical<sup>32</sup>  $\{0\} \times [-1, \Delta]$ , onde  $\Delta = 0,1789797\dots$  foi obtido na fórmula (7.28). Como se viu acima, o limite do gráfico de  $\Phi_n$  quando  $n \rightarrow +\infty$  excede em  $\Delta = 0,1789797\dots$  o valor do limite de  $\Phi_n$  em pontos de  $]0, \pi[$  arbitrariamente próximos do ponto 0 que se viu que é igual a zero.

Próximo do ponto  $\pi$  a situação é análoga, embora haja a óbvia diferença resultante das diferentes propriedades de simetria estabelecidas acima. Esta diferença fica desde logo patente nos próprios valores das funções no ponto  $\pi$ . De facto, se  $n$  é ímpar  $\Phi_n(\pi) = \Phi_n(0) = -1$ , e se  $n$  é par  $\Phi_n(\pi) = -\Phi_n(0) = 1$ . Assim, quando  $n$  é par o gráfico de  $\Phi_n$  em  $]0, \pi[$  converge uniformemente para o segmento vertical  $\{\pi\} \times [-1, \Delta]$ , e quando  $n$  é ímpar o gráfico de  $\Phi_n$  em  $]0, \pi[$  converge uniformemente para o segmento vertical  $\{\pi\} \times [-\Delta, 1]$  (Figura (7.16)).

Como a sucessão das somas parciais da série de Fourier da função de impulsos rectangulares  $\mathcal{P}$  é  $S_{2n}(\mathcal{P}) = S_{2n-1}(\mathcal{P}) = \Phi_{2n} + 1$ , as conclusões anteriores para esta última sucessão aplicam-se a  $S_n(\mathcal{P})$ . Visto que  $S_n(\mathcal{P})(\pi+t) = -S_n(\mathcal{P})(t)$ ,  $S_n(\mathcal{P})(2\pi+t) = S_n(\mathcal{P})(t)$ , o que se viu anteriormente garante que quando  $n \rightarrow +\infty$  a série de Fourier de  $\mathcal{P}$  converge para  $\mathcal{P}$  uniformemente

<sup>32</sup>No sentido deste segmento de recta ser o conjunto de pontos limite no plano de pontos do gráfico de  $\Phi_n$ , *i.e.*, o conjunto de pontos limites de sucessões de pontos  $\{(t_n, y_n)\}$  pertencentes a estas partes dos gráficos das funções  $\Phi_n$  e de qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que a distância mínima de pontos do gráfico de  $\Phi_n$  a pontos do segmento de recta ser menor do que  $\epsilon$  para  $n > N$ .

em qualquer subconjunto fechado de  $[0, 2\pi]$  sem pontos de descontinuidade de  $\mathcal{P}$  e conseqüentemente na união das repetições periódicas de um tal conjunto. A convergência nos pontos de descontinuidade é trivial porque nesses pontos todas as somas parciais são iguais a zero em consequência de  $S_{2n}(\mathcal{P}) = S_{2n-1}(\mathcal{P}) = \Phi_{2n} + 1$  em  $[0, \pi]$  e  $\Phi_{2n}(0) = \Phi_{2n}(\pi) = -1$  e  $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(\pi)$ . Contudo, em qualquer vizinhança de um ponto de descontinuidade a convergência não é uniforme pois por maior que seja  $n$  há sempre pontos nessa vizinhança onde  $S_n(\mathcal{P})$  tem valores distantes do valor limite zero, inclusive a uma distância maior do que  $1 + \Delta$ , onde  $\Delta = 0,1789797\dots$  foi obtido na fórmula (7.28).

O limite do gráfico da função contínua  $S_n(\mathcal{P})$  em  $0$  e  $\pi$  é respectivamente  $\{0\} \times [-1 - \Delta, 1 + \Delta]$  e  $\{\pi\} \times [-1 - \Delta, 1 + \Delta]$ . O limite do gráfico de  $S_n(\mathcal{P})$  quando  $n \rightarrow +\infty$  excede o limite do gráfico de  $\mathcal{P}$  numa vizinhança arbitrariamente pequena dos pontos  $0$  e  $\pi$ , tanto no sentido positivo como no negativo das ordenadas, por uma quantidade de igual magnitude que é aproximadamente 8,95% do salto na descontinuidade de  $\mathcal{P}$  nesse ponto (neste caso de magnitude 2). Por periodicidade, o mesmo acontece em todos os pontos de descontinuidade  $k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto, o gráfico de  $S_n(\mathcal{P})$  converge para um conjunto  $G_\infty$  que é a união do gráfico de  $\mathcal{P}$  com o conjunto de segmentos verticais  $\{\{k\pi\} \times [-1 - \Delta, 1 + \Delta] : k \in \mathbb{Z}\}$ . Esta convergência é uniforme, no sentido de qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > N$  o gráfico de  $S_n(\mathcal{P})$  está contido no conjunto dos pontos do plano a uma distância do conjunto  $G\mathcal{P}_\infty$  inferior a  $\epsilon$  (Figura 7.17). Em suma, para as somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{P}$ , **o gráfico do limite é diferente do limite dos gráficos**; na verdade, o gráfico do limite é o gráfico de  $\mathcal{P}$  e o limite dos gráficos é  $G\mathcal{P}_\infty$ . Este último contém o primeiro, mas excede-o em pontos de descontinuidade de  $\mathcal{P}$ , embora a convergência dos gráficos das somas parciais para  $G_\infty$  seja uniforme.

2. Analisa-se agora o Fenómeno de Gibbs no caso da **função em dente de serra** periódica de período  $2\pi$  que no intervalo  $[0, 2\pi]$  é definida por

$$\mathcal{Z}(t) = \begin{cases} 1 - t/\pi, & \text{se } t \in ]0, 2\pi[ \\ 0 & , \text{ se } t \in \{0, 2\pi\} . \end{cases}$$

Tal como no exemplo anterior esta função é ímpar pelo que tem série de Fourier de senos. Neste caso as simetrias das somas parciais da série de Fourier são  $S_n(\mathcal{Z})(\pi + t) = -S_n(\mathcal{Z})(t)$ ,  $S_n(\mathcal{Z})(2\pi + t) = S_n(\mathcal{Z})(t)$ . A função  $S_n(\mathcal{Z})$  pode ser completamente obtida por estas relações de simetria a partir dos valores da função no intervalo  $[0, \pi]$ .

Da propriedade (7.24.3) do núcleo de Dirichlet é  $S_n(\mathcal{Z}) = D_n * \mathcal{Z}$ , logo, utilizando também  $\int_0^{2\pi} D_n = 1$ ,



Figura 7.17: Convergência uniforme dos gráficos das somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{P}$  para  $G_\infty$  com acréscimos verticais em relação ao gráfico de  $\mathcal{P}$  nos pontos de descontinuidade de  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} S_n(\mathcal{Z})(t) &= \int_0^{2\pi} \mathcal{Z}(t-\tau) D_n(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\pi-t+\tau}{\pi} D_n(\tau) d\tau + \int_t^{2\pi} \frac{2\pi-\pi-t+\tau}{\pi} D_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{\pi-t}{\pi} \int_0^t D_n - \frac{\pi+t}{\pi} \int_t^{2\pi} D_n + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau D_n(\tau) d\tau \\ &= 2 \int_0^t D_n - 1 - \frac{t}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau D_n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

A derivada desta função é  $S_n(\mathcal{Z})'(t) = 2D_n(t) - 1/\pi$ . Primitivando e subtraindo  $\mathcal{Z}$ , e tendo em conta (7.27), obtém-se

$$S_n(\mathcal{Z})(t) - \mathcal{Z}(t) = \Phi_{2n+1}(t/2).$$

No exemplo anterior os termos de ordem par  $\Phi_{2n}$  deram os valores da diferença entre as somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{P}$  e a função  $1 = \mathcal{P}$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Analogamente, no exemplo presente os termos de ordem ímpar  $\Phi_{2n+1}$  dão os valores da diferença entre as somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{Z}$  e a própria função  $\mathcal{Z}$ , embora com um escalamento para o dobro nos pontos onde são calculadas. Apesar de no exemplo anterior serem os termos de ordem par da sucessão  $\{\Phi_n\}$  que interessam e no exemplo presente serem os de ordem ímpar, o comportamento oscilatório das duas subsucessões é semelhante.

Das propriedades de  $\Phi_{2n+1}$  estabelecidas no exemplo anterior, quando  $n \rightarrow +\infty$  a série de Fourier de  $\mathcal{Z}$  converge para  $\mathcal{Z}$  uniformemente em qualquer subconjunto fechado de  $[0, 2\pi]$  sem pontos de descontinuidade de  $\mathcal{Z}$ , e portanto nos conjuntos que são repetições periódicas de tais conjuntos. Na

verdade, resulta do que se obteve no exemplo anterior para  $\Phi_{2n+1}$  que dado qualquer subintervalo fechado  $I$  de  $]0, 2\pi[$  sem pontos de descontinuidade, qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > 0$  o gráfico de  $S_n(\mathcal{Z})$  está contido no trapézio  $\{(t, y) : t \in I, |y - \mathcal{Z}(t)| < \epsilon\}$ . Para qualquer conjunto fechado  $F$  sem descontinuidades de  $\mathcal{Z}$  contido em  $[0, 2\pi]$ , dado que 0 e  $2\pi$  são pontos de descontinuidade, existe um intervalo fechado  $I \subset ]0, 2\pi[$  que contém  $F$ , pelo que o que se viu implica que a série de Fourier de  $\mathcal{Z}$  converge uniformemente para esta própria função em  $F$ , e obviamente nos conjuntos que consistem na união das repetições periódicas deste conjunto. A convergência nos pontos de descontinuidade é trivial porque nesses pontos todas as somas parciais são iguais a zero em consequência de  $S_n(\mathcal{Z})(0) = \mathcal{Z}(0) + \Phi_{2n+1}(0) + 1$  e  $\Phi_{2n+1}(0) = -1$  e  $\mathcal{Z}(0) = 0$ . Contudo, em qualquer vizinhança de um ponto de descontinuidade a convergência não é uniforme pois por maior que seja  $n$  há sempre pontos nessa vizinhança onde  $S_n(\mathcal{Z})$  tem valores distantes do valor limite zero, inclusivamente a uma distância maior do que  $1 + \Delta$ , onde  $\Delta = 0,1789797\dots$  foi obtido na fórmula (7.28) (Figura 7.18).

Figura 7.18: Fenómeno de Gibbs: somas parciais da série de Fourier de uma função periódica em dente de serra – *overshooting* e *undershooting* na vizinhança de descontinuidades de salto

O limite do gráfico da função contínua  $S_n(\mathcal{Z})$  em 0 é o segmento vertical  $\{0\} \times [-1 - \Delta, 1 + \Delta]$ . O limite do gráfico de  $S_n(\mathcal{Z})$  quando  $n \rightarrow +\infty$  excede o limite do gráfico de  $\mathcal{Z}$  numa vizinhança arbitrariamente pequena do ponto 0, tanto no sentido positivo como no negativo das ordenadas, por uma quantidade de igual magnitude que é aproximadamente 8,95% do salto na descontinuidade de  $\mathcal{Z}$  nesse ponto (neste caso também de magnitude 2). Por periodicidade, o mesmo acontece em todos os pontos de descontinuidade  $2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto, o gráfico de  $S_n(\mathcal{Z})$  converge uniformemente para

## 7.5 Fenómeno de Gibbs, conv. p/ funções secc. diferenciáveis 221

um conjunto  $G_\infty$  que é a união do gráfico de  $\mathcal{P}$  com o conjunto de segmentos verticais  $\{\{2k\pi\} \times [-1-\Delta, 1+\Delta] : k \in \mathbb{Z}\}$  (Figura 7.19). Em suma, para as somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{Z}$ , o gráfico do limite também é diferente do limite dos gráficos; na verdade, o gráfico do limite é o gráfico de  $\mathcal{Z}$  e o limite dos gráficos é  $G\mathcal{Z}_\infty$ . Este último contém o primeiro, mas excede-o em pontos de descontinuidade de  $\mathcal{Z}$ , embora a convergência dos gráficos das somas parciais para  $G\mathcal{Z}_\infty$  seja uniforme.

Figura 7.19: Convergência uniforme dos gráficos das somas parciais da série de Fourier de  $\mathcal{Z}$  para  $G\mathcal{Z}_\infty$  com acréscimos verticais em relação ao gráfico de  $\mathcal{Z}$  nos pontos de descontinuidade de  $\mathcal{Z}$

Em resumo, o Fenómeno de Gibbs nestes exemplos traduz-se no seguinte: **o gráfico do limite da série de Fourier está contido e é diferente do limite dos gráficos das somas parciais da série.** Tal acontece não só por conter os segmentos de recta verticais nos pontos de descontinuidade de salto entre os limites laterais da função nesses pontos, como acontece sempre na convergência de funções contínuas para funções com descontinui-

dades de salto, como também porque os segmentos de recta verticais do limite dos gráficos das somas parciais da série de Fourier excedem em ambos os sentidos das ordenadas o segmento entre os limites laterais da função por comprimentos acrescidos em cada uma das extremidades da ordem de 8,95% do valor do salto (que nestes exemplos é 2).

Figura 7.20: Fenómeno de Gibbs: gráfico do limite e limite do gráfico das somas parciais da série de Fourier de uma função periódica de impulsos rectangulares

O Fenómeno de Gibbs descrito nos exemplos anteriores é paradigmático do que acontece em geral com a convergência de séries de Fourier de funções integráveis e seccionalmente diferenciáveis com descontinuidades de salto. O resultado seguinte estabelece este facto e que as séries de Fourier desta classe de funções convergem em todos os pontos. Em subconjuntos fechados de um intervalo correspondente a um período da função sem pontos de descontinuidade da função a convergência é uniforme para a própria função e conseqüentemente o mesmo acontece em conjuntos que sejam a união das repetições periódicas de um tal conjunto fechado para além do intervalo considerado, e em pontos de descontinuidade para a média dos limites laterais nesses pontos e não uniformemente em qualquer conjunto que contenha um desses pontos de descontinuidade.

(7.29) **Teorema:** *Se  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é seccionalmente diferenciável,  $f' \in L^1([0, 2\pi])$  e  $f$  é identificada com a extensão periódica de período  $2\pi$  a  $\mathbb{R}$  da restrição de  $f$  a  $[0, 2\pi[$ , então a série de Fourier converge em todos os pontos: para  $f(t)$  se  $t$  é um ponto de continuidade e para a média dos limites laterais,  $[f(t-) + f(t+)]/2$ , se  $t$  é um ponto de descontinuidade. A convergência é uniforme em subconjuntos fechados de  $[0, 2\pi]$  sem pontos de descontinuidade de  $f$  e conseqüentemente na união das repetições periódicas de período  $2\pi$  de subconjuntos fechados de  $[0, 2\pi]$ .*

*Na vizinhança de qualquer ponto de descontinuidade a convergência*

não é uniforme e ocorre o Fenómeno de Gibbs, com overshooting e undershooting, respectivamente do lado do limite lateral de  $f$  maior e menor nesse ponto. Mais especificamente, o gráfico das somas parciais da série de Fourier converge uniformemente para a união do gráfico de  $f$  com segmentos de recta verticais em cada ponto de descontinuidade que excedem em ambos os sentidos o segmento de recta delimitado pelos limites laterais de  $f$ , em comprimentos iguais a cerca de 8,95% do salto nesse ponto, mais precisamente a

$$\frac{|f(t+) - f(t-)|}{2} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau - 1 \right] = |f(t+) - f(t-)| 0,0894899 \dots$$

*Dem.* Sejam  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < 2\pi$  os pontos onde  $f$  tem descontinuidades e que definem uma partição finita de  $[0, 2\pi]$  em cujos subintervalos  $f$  é contínua. O salto da descontinuidade num ponto  $t_k$  com  $k \neq 0$  é  $J_k = f(t_k+) - f(t_k-)$ , onde  $f(t_k+)$  e  $f(t_k-)$  designam os limites laterais de  $f$  respectivamente à direita e à esquerda de  $t_k$ . O salto em  $t_0$  da função  $f$  estendida por periodicidade de período  $2\pi$  é  $J_0 = f(0+) - f(2\pi-)$ . Para cada  $a \in [0, 2\pi]$  designa-se por  $\mathcal{Z}_a$  a translação da função em dente de serra do último exemplo  $\mathcal{Z}_a(t) = \mathcal{Z}(t-a)$ . Define-se a função  $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^N J_k \mathcal{Z}_{t_k}/2$ , que em cada subintervalo da partição considerada tem como gráfico um segmento de recta e cujos saltos nos pontos  $t_k$  são iguais aos saltos de  $f$  nesses pontos. Logo, a função  $g = f - \mathcal{A}$ , tal como  $f$ , é seccionalmente diferenciável com  $g' \in L^1([0, 2\pi])$ , mas adicionalmente é contínua em  $[0, 2\pi]$  e satisfaz  $f(0) = f(2\pi)$  (Figura 7.21).

Se a função  $g$  fosse diferenciável nos pontos  $t_k$ , o teorema (7.20) aplicado a  $g$  garantiria a convergência uniforme da série de Fourier de  $g$  para a própria função  $g$  em  $[0, 2\pi]$ . Embora a função  $g$  seja contínua, pode não ser diferenciável nos pontos  $t_k$ . Contudo a demonstração do teorema (7.20) pode aplicada a este caso depois da pequena preparação que se segue. Para  $t$  em cada subintervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  da partição a função  $g$  satisfaz  $g(t) = \int_{t_{k-1}}^t g' + g(t_{k-1})$ , pelo que, por aplicações sucessivas desta relação aos subintervalos precedentes da partição  $g$  também satisfaz  $g(t) = \int_0^t g' + g(0)$ . A partir desta observação, a argumentação na demonstração do teorema (7.20) pode ser tal e qual aplicada à função  $g$ , obtendo-se, também neste caso, a convergência uniforme da série de Fourier de  $g$  para a própria função  $g$ .

Sabe-se do último exemplo anterior que a série de Fourier da função  $\mathcal{Z}_a$  estendida a  $\mathbb{R}$  por periodicidade de período  $2\pi$  converge em todos os pontos para  $\mathcal{Z}_a$ , uniformemente em subconjuntos fechados de  $[0, 2\pi]$  que não contenham o ponto de descontinuidade  $a$  e, em consequência, na união das repetições periódicas de período  $2\pi$  destes conjuntos. Nos pontos de descontinuidade  $a + 2k\pi$  ocorre o Fenómeno de Gibbs, com um *overshoot* acima de 1 à direita de  $a + 2k\pi$  e um *undershoot* abaixo de  $-1$  à esquerda de  $a + 2k\pi$  de alturas iguais a  $[(2/\pi) \int_0^\pi (\sin \tau)/\tau d\tau - 1]/2$ .

Da linearidade da série de Fourier, obtém-se que a sucessão de somas parciais da série de Fourier de  $f$  satisfaz  $S_n(f) = S_n(g) - S_n(\mathcal{A})$ , pelo que converge para os valores de  $f$  em todos os pontos de continuidade de  $f$  e em pontos de descontinuidade converge para a média dos limites laterais de  $f$  nos respectivos pontos. Como  $S_n(g) \rightarrow g$  uniformemente em  $[0, 2\pi]$  e o gráfico de  $\mathcal{A}$  em cada subintervalo fechado de  $[0, 2\pi]$  sem pontos de descontinuidade de  $f$  é um segmento de recta, é claro que  $S_n(\mathcal{A})$  converge uniformemente para  $\mathcal{A}$  em subconjuntos fechados  $[0, 2\pi]$  que não contenham pontos de descontinuidade, e conseqüentemente o mesmo acontece para a convergência de  $S_n(f)$  para  $f$ . Conclui-se também que nos pontos de descontinuidade  $t_k$  de  $f$  ocorre o Fenómeno de Gibbs tal como descrito para  $\mathcal{Z}_a$  em  $a = t_k$ , excepto que o salto na descontinuidade de  $f$  em  $t_k$  é  $[f(t_k^+) - f(t_k^-)]/2$  vezes o salto da descontinuidade de  $\mathcal{Z}_{t_k}$  no mesmo ponto pois este salto é igual a 2, o que resulta em que a altura do *overshoot* e do *undershoot* é multiplicada por  $|f(t_k^+) - f(t_k^-)|/2$ , e os *overshoot* e *undershoot* ocorrem respectivamente à direita e à esquerda de  $t_k$  se o salto é positivo e vice versa se o salto é negativo (Figura 7.22). Q.E.D.

Figura 7.21: Eliminação de descontinuidades de salto por subtração de funções em dente de serra

## 7.6 Convergência pontual de séries de Fourier

Na secção 7.2 considerou-se a convergência em média quadrática de séries de Fourier em  $L^2(I)$ . Na penúltima secção obteve-se a convergência uniforme de séries de Fourier de funções para essas mesmas funções primeiro no caso mais simples de todos, o de funções  $C^2$  num intervalo compacto  $I$  com valores

Figura 7.22: Fenómeno de Gibbs em funções seccionalmente diferenciáveis

iguais nos extremos de  $I$ , e depois com um argumento menos directo provou-se o resultado para o conjunto maior de funções contínuas com derivada integrável à Riemann em  $I$  e com valores iguais nos extremos do intervalo, e por maioria de razão para funções  $C^1$  em  $I$ . A convergência uniforme em  $I$  implica a convergência pontual em todos os pontos de  $I$ , que assim se verifica para funções contínuas com derivada integrável à Riemann em  $I$ .

Na última secção anterior estudou-se o Fenómeno de Gibbs e obteve-se um resultado de convergência de séries de Fourier de funções seccionalmente contínuas com derivada integrável à Riemann. Estas funções podem ter descontinuidades de salto num conjunto finito de pontos. Para estas funções obteve-se convergência pontual das séries de Fourier em todos os pontos, para o valor da função em pontos de continuidade e para a média dos limites laterais em pontos de descontinuidade, e até se obteve convergência uniforme nos conjuntos fechados de um intervalo correspondente a um período da função, e conseqüentemente nas uniões das repetições periódicas de período  $2\pi$  de tais conjuntos.

Sabe-se desde o final do século XIX que há funções contínuas num intervalo  $I$  cujas séries de Fourier são divergentes num conjunto denso em  $I$ , pelo que a garantia de convergência pontual exige condições adicionais à continuidade<sup>33</sup>. Por outro lado, foi provado em 1965 por L. Carlson<sup>34</sup> que as séries

---

<sup>33</sup>Ver Apêndice C.

<sup>34</sup>Carleson, Lennart (1928-).

de Fourier de funções de quadrado integrável num intervalo  $I$ , e portanto também de funções contínuas em  $I$ , são sempre pontualmente convergentes q.t.p. em  $I$ . Também é possível provar que para qualquer subconjunto de medida nula de  $I$  existem funções contínuas com séries de Fourier divergentes em todos os pontos desse conjunto. Além disso, em 1926 A. Kolmogorov<sup>35</sup> mostrou que há funções integráveis num intervalo  $I$  com séries de Fourier divergentes em todos os pontos de  $I$ .

As observações anteriores indicam que a análise da convergência pontual de séries de Fourier é claramente mais difícil se as funções não satisfazem a condição<sup>36</sup> de serem seccionalmente diferenciáveis com derivada integrável à Riemann em  $I$ . O resultado central desta secção é o chamado Princípio de Localização de Riemann, que estabelece que a convergência de uma série de Fourier num ponto é uma propriedade local, no sentido de depender apenas da função numa vizinhança do ponto, apesar dos coeficientes da série e do valor do limite dependerem da função em todo o intervalo. Como aplicação deste princípio estabelece-se uma condição para convergência de séries de Fourier num ponto, chamada Critério de Dini, que implica a convergência de séries de Fourier num ponto de funções integráveis que tenham limites laterais e cujas restrições à direita e à esquerda do ponto prolongadas pelo respectivo limite lateral são lipschitzianas em intervalos fechados arbitrariamente pequenos à esquerda e à direita do ponto<sup>37</sup>.

O resultado seguinte estabelece que a convergência pontual da série de Fourier de uma função depende exclusivamente dos valores da função localmente numa vizinhança de cada ponto considerado, apesar dos coeficientes da série e do valor do seu limite dependerem da função em todo o intervalo  $[0, 2\pi]$ , o que é uma conclusão notável.

**(7.30) Princípio de Localização de Riemann:** *Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$ , então a série de Fourier de  $f$  converge num ponto  $t \in [0, 2\pi]$  se e só se para algum  $\delta \in ]0, \pi[$  existe o limite seguinte*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\tau} d\tau .$$

*Em caso afirmativo, a soma da série de Fourier é o valor deste limite.*

*Dem.* Se  $D_n$  é o núcleo de Dirichlet, a soma parcial de ordem  $n$  da série de

<sup>35</sup>Kolmogorov, Andrey (1903-1987).

<sup>36</sup>Ou a condição correspondente estabelecida no apêndice C com a teoria do integral de Lebesgue, de  $f$  ser absolutamente contínua com  $f' \in L^2([0, 2\pi])$ .

<sup>37</sup>No apêndice C faz-se um estudo mais profundo da convergência pontual de séries de Fourier e analisam-se outros tipos de convergência.



Fourier de  $f$  é  $S_n(f) = D_n * f$  e da 2ª fórmula para  $D_n$  em (7.22) resulta que a série de Fourier de  $f$  converge em  $t$  se e só se existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) \frac{\sin(n+1/2)\tau}{2 \sin \tau/2} d\tau .$$

Quando existe, este limite é a soma da série. Do Lema de Riemann-Lebesgue (7.11) a contribuição para o limite anterior da integração fora de qualquer intervalo  $[-\delta, \delta]$  com  $\delta > 0$  é zero. Do mesmo lema obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(t-\tau) \left( \frac{1}{2 \sin \tau/2} - \frac{1}{\tau} \right) \sin(n+1/2)\tau d\tau = 0 ,$$

pois a função  $\tau \mapsto [2 \sin(\tau/2)]^{-1} - \tau^{-1}$  é contínua em  $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$  e pode ser estendida por continuidade ao ponto zero dado que  $[2 \sin(\tau/2)]/\tau \rightarrow 1$  quando  $t \rightarrow 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t-\tau) \frac{\sin(n+1/2)\tau}{\tau} d\tau \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \frac{\sin(n+1/2)\tau}{\tau} d\tau . \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier converge em  $t$  se e só se este limite existe para algum  $\delta \in ]0, \pi[$  e, então, a soma da série é igual ao valor do limite. *Q.E.D.*

Uma consequência imediata do Princípio de Localização de Riemann e dos resultados de convergência uniforme nas secções anteriores é que **as séries de Fourier de funções diferenciáveis e com derivadas integráveis à Riemann num subintervalo  $I$  de  $[0, 2\pi]$  convergem pontualmente para os valores da função em todos os pontos interiores a  $I$ .** Na verdade, a restrição da função a qualquer subintervalo fechado de  $I$  pode ser estendida a uma função diferenciável e com derivada integrável à Riemann em  $[0, 2\pi]$ , e a série de Fourier desta extensão converge uniformemente para esta função em  $[0, 2\pi]$  em consequência do teorema (7.20). Devido ao Princípio de Localização de Riemann, a convergência pontual da série de Fourier da função inicial num ponto interior a  $I$  depende apenas dos valores dessa função numa vizinhança desse ponto e o limite é dado por um integral que só envolve os valores de  $f$  na vizinhança do ponto. Conclui-se que a série de Fourier da função inicial converge pontualmente em cada ponto interior a  $I$  para o valor da função, dado que tal acontece para a série de Fourier de uma extensão que coincide com a função inicial num intervalo com o ponto considerado no interior. A convergência pontual pode ser estendida a uma classe mais ampla de funções com o **critério de Dini**<sup>38</sup>.

<sup>38</sup>Dini, Ulisse (1845-1918).

(7.31) **Teorema (Critério de Dini):** Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$ ,  $t \in ]0, 2\pi[$ , o limite de  $g(\tau) = [f(t+\tau) + f(t-\tau)]/2$  para  $\tau \rightarrow 0$  existe e para algum  $\delta \in ]0, 2\pi[$  a função  $k_t(\tau) = [g(\tau) - \lim_{h \rightarrow 0} g(\tau)]$  é integrável em  $[0, \delta]$ , então a série de Fourier de  $f$  converge para  $\lim_{\tau \rightarrow 0} [f(t+\tau) + f(t-\tau)]/2$  no ponto  $t$ . Em particular, converge para  $f(t)$  se  $f$  é contínua em  $t$  e para a média dos limites laterais esquerdo e direito de  $f$  em  $t$  se  $f$  tem uma descontinuidade de salto em  $t$ . Se  $t$  é uma das extremidades do intervalo a conclusão é a mesma para a extensão de  $f$  periódica de período  $2\pi$  e a série converge para  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} [f(0+\tau) + f(2\pi-\tau)]/2$ .

*Dem.* Do Princípio de Localização de Riemann (7.30) a série de Fourier de  $f$  converge no ponto  $t$  se e só se existe o limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(\tau) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\tau} d\tau &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta k_t(\tau) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau d\tau \\ &+ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}{\tau} d\tau, \end{aligned}$$

e, caso este limite exista, é igual à soma da série de Fourier.

Do Lema de Riemann-Lebesgue (7.11) o primeiro limite do lado direito na expressão acima é zero, e do Princípio de Localização de Riemann (7.30) o segundo limite é igual ao limite da série de Fourier da função constante de valor  $\lim_{\tau \rightarrow 0} [f(t+\tau) + f(t-\tau)]/2$ . Portanto, esta série reduz-se ao termo de ordem zero e, em consequência, tem soma igual a este valor. *Q.E.D.*

A verificação do critério de Dini é, em geral, incômoda, pelo que convém conhecer condições mais simples de verificar que impliquem a validade deste critério. Uma condição simples pode ser expressa em termos de continuidade lateral à Lipschitz. Diz-se que uma função  $f$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é **contínua à Lipschitz à esquerda e à direita no ponto**  $t \in I$  se tem limites laterais finitos em  $t$  à esquerda e à direita, respectivamente  $f(t-)$  e  $f(t+)$ , e existem  $L > 0$  e intervalos abertos à esquerda e à direita de  $t$ , respectivamente  $] -\delta, t[$  e  $] t, \delta[$  para algum  $\delta > 0$ , onde  $|f(t-\tau) - f(t-)| < L\tau$  e  $|f(t+\tau) - f(t+)| < L\tau$ , para  $\tau \in ]0, \delta[$  (se  $t$  é uma extremidade do intervalo  $I$  as condições são só para o lado que intersecta  $I$ ).

(7.32) **Corolário:** Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$  é contínua à Lipschitz à esquerda e à direita em  $t \in [0, 2\pi]$ , então a série de Fourier de  $f$  converge no ponto  $t$ , onde se obtêm as conclusões do critério de Dini.

*Dem.* Definem-se as funções  $g$  e  $k_t$  como no enunciado do teorema anterior. É claro que  $g \in L^1([0, 2\pi])$  e para  $\tau \in [0, \delta]$  verifica-se

$$|k_t(\tau)| \leq \frac{|f(t-\tau) - f(t-)|}{2\tau} + \frac{|f(t+\tau) - f(t+)|}{2\tau} \leq \frac{L\tau + L\tau}{2\tau} = L,$$

pelo que também  $k_t \in L^1([0, \delta])$ .

*Q.E.D.*

Note-se que se  $f$  tem limites laterais num ponto  $t \in I$  e tem derivadas laterais finitas à esquerda e à direita em  $t$ , designadas respectivamente por  $f'(t-)$  e  $f'(t+)$ , então  $f$  é contínua à Lipschitz à esquerda e à direita de  $t$ ; na verdade, para algum  $\epsilon > 0$  é  $|f(t-\tau) - f(t-)| < |f'(t-) + E_e(t, \tau)| |\tau|$  e  $|f(t+\tau) - f(t+)| < |f'(t+) + E_d(t, \tau)| |\tau|$  para  $\tau \in ]0, \epsilon[$ , onde  $E_e(t, \tau), E_d(t, \tau) \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow 0$ , pelo que com  $L > \max\{|f'(t-)|, |f'(t+)|\}$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(t-\tau) - f(t-)| < L\tau$  e  $|f(t+\tau) - f(t+)| < L\tau$ , para  $\tau \in ]0, \delta[$ . Portanto, o corolário anterior contém o caso em que a função  $f$  tem derivadas laterais no ponto  $t$ .

Pode ser útil ter condições de formulação simples baseadas nos resultados anteriores que garantam a convergência pontual de séries de Fourier em todos os pontos de um intervalo. Chama-se função **seccionalmente lipschitziana** num intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  a uma função lipschitziana em  $J$  excepto possivelmente num conjunto finito de pontos onde é contínua à Lipschitz à esquerda e à direita, verificando propriedades semelhantes nos extremos finitos do intervalo se  $J \neq ]-\infty, +\infty[$ .

(7.33) **Corolário:** *Se  $f$  é uma função seccionalmente lipschitziana em  $[0, 2\pi]$ , então a série de Fourier de  $f$  converge pontualmente em todo o intervalo, em pontos  $t$  de continuidade de  $f$  interiores ao intervalo para  $f(t)$  e em pontos  $\tau$  de descontinuidade de  $f$  interiores ao intervalo para a média dos limites laterais esquerdo e direito de  $f$  em  $\tau$ . Nas extremidades do intervalo a conclusão é a mesma para a extensão de  $f$  periódica de período  $2\pi$ ; logo, se  $f(0)$  é igual a  $f(2\pi)$  a convergência é para este valor comum e caso contrário é para a média destes valores.*

*Dem.* Se  $f$  é seccionalmente lipschitziana, então é contínua excepto possivelmente num conjunto finito de pontos onde tem descontinuidades de salto e  $f \in L^1([0, 2\pi])$ . Portanto, pode-se aplicar directamente o corolário anterior para obter o resultado. *Q.E.D.*

Do que se viu acima, uma função seccionalmente diferenciável é seccionalmente lipschitziana, pelo que o resultado anterior contém o caso em que  $f$  é seccionalmente diferenciável.

## 7.7 Ordem de decaimento de coeficientes de Fourier e regularidade de funções

Sabe-se do Lema de Riemann-Lebesgue que os coeficientes de Fourier convergem para zero no infinito,  $\widehat{f}_n \rightarrow 0$  para  $|n| \rightarrow \infty$ . Também se sabe da proposição (7.16), estabelecida a propósito da convergência uniforme de séries de Fourier, que quanto maior é a ordem de diferenciabilidade contínua de uma função  $f$  maior é a ordem de decaimento para zero dos coeficientes de Fourier no infinito (ver os exemplos das figuras 7.2 a 7.11). Mais precisamente, se  $f \in C^k([0, 2\pi])$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então

$$|\widehat{f}(n)| \leq (2\pi)^{-1} |(f^{(k)})^\wedge(n)| |n|^{-k}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

É conveniente utilizar a **notação de Bachmann<sup>39</sup>-Landau<sup>40</sup>** para ordens de crescimento ou decaimento. Sejam  $\{u_n\}, \{v_n\} \in \mathbb{C}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Diz-se que:

1.  $u_n$  é **infinitesimal** em relação a  $v_n$ , e escreve-se  $u_n = o(v_n)$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , se  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} u_n/v_n = 0$ ;
2.  $u_n$  tem **ordem de decaimento** (ou **crescimento**) **inferior** a  $v_n$ , e escreve-se  $u_n = O(v_n)$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , se existe  $M > 0$  tal que  $|u_n| \leq M|v_n|$  para  $|n|$  suficientemente grande;
3.  $u_n$  tem **ordem de decaimento** (ou **crescimento**) **superior** a  $v_n$ , e escreve-se  $u_n = \omega(v_n)$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , se qualquer que seja  $M > 0$  é  $|u_n| \geq M|v_n|$  para  $|n|$  suficientemente grande.

O resultado obtido para a ordem de decaimento dos coeficientes de Fourier de funções  $C^k$  tem o converso parcial seguinte.

(7.34) **Proposição:** *Seja  $f \in L^1([0, 2\pi])$ . Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| |n|^k$  converge com algum  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , então  $f \in C^k$ . Se  $|\widehat{f}(n)| = O(|n|^{-\alpha})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , para algum  $\alpha > 0$ , então  $f \in C^{m-2}$ , onde  $m$  é o menor inteiro  $\geq \alpha$ .*

*Dem.* Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| |n|^k$  converge, então as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| |n|^j$ , com  $j = 0, 1, \dots, k$  convergem pois são dominadas pela série acima dado que  $|n|^j \leq |n|^k$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, as séries de Fourier  $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)(in)^j e^{int}$  são uniformemente convergentes em  $[0, 2\pi]$ . Designam-se os respectivos limites por  $f_j(t)$ . Para  $j = 1, \dots, k$ , tendo em conta a unicidade de séries de Fourier, resulta

<sup>39</sup>Bachmann, Paul (1837-1920).

<sup>40</sup>Landau, Edmund (1877-1938).

$$\widehat{f}_j(n) e^{int} = \widehat{f}(n)(in)^j e^{int} = \widehat{f}(n)(in)^{j-1}(in) e^{int} = \left(\widehat{f}_{j-1}(n) e^{int}\right)'.$$

Por indução finita obtém-se  $\widehat{f}_j(n) e^{int} = (\widehat{f}_0(n) e^{int})^{(j)}$ . Portanto os termos das séries de Fourier de  $f_j$  são obtidos derivando os correspondentes termos da série de Fourier de  $f_0$  sucessivamente até à ordem  $j$ . A função limite de uma sucessão uniformemente convergente cujos termos são diferenciáveis e cuja sucessão das respectivas derivadas é uniformemente convergente tem derivada igual ao limite da sucessão das derivadas da sucessão. Este resultado, que costuma ser resumido dizendo que tais sucessões podem ser derivadas termo a termo, é provado no teorema final desta secção. Aplicando o resultado referido às sucessões das somas parciais das séries aqui consideradas conclui-se que  $f_0$  tem derivada até ordem  $k$  em  $[0, 2\pi]$  e  $f_0^{(j)} = f_j$ . O teorema no final da secção também garante que uma função que é o limite de uma sucessão de funções uniformemente convergentes cujos termos são funções contínuas também é contínua, o que aplicado à sucessão de somas parciais da série de Fourier de  $f_k$  implica que esta função é contínua em  $[0, 2\pi]$ . Conclui-se que  $f_0 \in C^k([0, 2\pi])$ , o que termina a prova da 1ª afirmação.

Se  $\alpha > 0$ ,  $|\widehat{f}(n)| = O(|n|^{-\alpha})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , e  $m$  é o menor inteiro  $\geq \alpha$ , então  $|\widehat{f}(n)| |n|^{m-2} = O(|n|^{m-2-\alpha})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ . Como  $m - \alpha < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) |n|^{m-2}$  converge, e a 1ª afirmação implica  $f \in C^{m-2}$ . *Q.E.D.*

O resultado seguinte dá informação sobre a ordem de decaimento no infinito dos coeficientes de séries de Fourier de senos.

**(7.35) Proposição:** *Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$  quando estendida a  $\mathbb{R}$  por periodicidade  $2\pi$  é uma função ímpar (ou seja, a série de Fourier é uma série de senos) e  $\widehat{f}(n) \geq 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| n^{-1}$  é convergente; em particular, não pode ser  $|\widehat{f}(n)| = \omega((\ln |n|)^{-1})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ .*

*Dem.* Da propriedade (7.10.8), a função contínua  $F(t) = \int_0^t f$  é periódica de período  $2\pi$  em  $\mathbb{R}$  e tem coeficientes de Fourier  $\widehat{F}(n) = \widehat{f}(n)/(in)$  para  $n \neq 0$ . Procedendo como na demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass (7.14), com o núcleo de Fejér  $K_m$  definido em (7.13) obtém-se  $K_m * F \rightarrow F$  uniformemente em  $[0, 2\pi]$  para  $m \rightarrow +\infty$ . Da propriedade (7.13.3) do núcleo de Fejér, é

$$(K_m * F)(t) = \sum_{n=-m}^m \left(1 - \frac{|n|}{m+1}\right) \widehat{F}(n) e^{int}.$$

Como  $f$  é uma função par,  $\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Calculando o limite em  $t = 0$ , obtém-se  $\lim_{m \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=1}^m \widehat{f}(n) n^{-1} = -i \widehat{F}(0)$ . Como  $\widehat{f}(n) \geq 0$ , fica provada a 1ª afirmação.

Se fosse  $|\widehat{f}(n)| = \omega((\ln |n|)^{-1})$  para  $|n| \rightarrow \infty$  então qualquer que fosse  $M > 0$  seria  $\widehat{f}(n)n^{-1} \geq M(n \ln n)^{-1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, e  $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)n^{-1} \geq \sum_{n=m}^{\infty} M(n \ln n)^{-1}$  para  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, e como a série no lado direito é divergente, também a série no lado esquerdo seria divergente. Da 1ª afirmação isto é falso, pelo que não pode ser  $|\widehat{f}(n)| = \omega((\ln |n|)^{-1})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ . *Q.E.D.*

Este resultado mostra que os coeficientes de Fourier de funções ímpares em  $L^1([0, 2\pi])$  não podem decair arbitrariamente lentamente no infinito e, mesmo, não podem decair mais lentamente do que  $(\ln |n|)^{-1}$ . Em particular, a série trigonométrica  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin nt)/(\ln n)$  não pode ser uma série de Fourier.

Em termos da notação de Bachmann-Landau as propriedades estabelecidas para ordens de decaimento dos coeficientes de Fourier resumem-se assim:

- (i) Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$ , então  $\widehat{f}(n) = o(1)$  para  $|n| \rightarrow \infty$ ;
- (ii) Se  $f \in C^k([0, 2\pi])$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então  $\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ ;
- (iii) Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$  e  $|\widehat{f}(n)| = O(|n|^{-\alpha})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , para algum  $\alpha > 0$ , então  $f \in C^{m-2}$ , onde  $m$  é o menor inteiro  $\geq \alpha$ ;
- (iv) Se  $f \in L^1([0, 2\pi])$ ,  $\widehat{f}(n) \geq 0$ , e  $\widehat{f}(-n) = -\widehat{f}(n)$  para  $n \in \mathbb{N}$  (*i.e.* a série de Fourier é uma série de senos), então não pode ser  $|\widehat{f}(n)| = \omega((\ln |n|)^{-1})$  para  $|n| \rightarrow \infty$ .

Conclui-se que há uma relação muito estreita entre a ordem de diferenciabilidade contínua de uma função e a ordem de convergência para zero dos respectivos coeficientes de Fourier: o conjunto das funções  $C^k$  está contido no conjunto das funções com coeficientes de Fourier que decaem para zero com ordem  $o(|n|^{-k}) \subset O(|n|^{-k})$  e contém o conjunto das funções com coeficientes de Fourier que decaem para zero com ordem  $O(|n|^{-\alpha})$  com  $\alpha > k+1$  mas arbitrariamente próximo de  $k+1$ , pelo que o conjunto de funções  $C^k$  contém o conjunto das funções com coeficientes de Fourier que decaem com ordem  $O(|n|^{-(k+1)})$  e está contido no conjunto das funções com coeficientes de Fourier que decaem com ordem  $o(|n|^{-k})$  (Figura 7.23).

Os coeficientes de Fourier de funções  $C^\infty$  decaem para zero no infinito mais rapidamente do que  $|n|^{-\alpha}$ , para qualquer  $\alpha > 0$ , ou seja, decaem para zero mais rapidamente do que qualquer potência.

Apesar dos coeficientes de séries de Fourier de séries de senos,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nt$ , não poderem decair arbitrariamente devagar e, no caso destes coeficientes

Figura 7.23: Diagrama de conjuntos de funções com diferentes ordens de decaimento dos coeficientes de Fourier para zero no  $\infty$  indicando a branco a zona onde pode haver funções  $C^k$  que não são  $C^{k+1}$

serem não negativos, não poderem decair mais lentamente do que  $(\ln n)^{-1}$  para  $n \rightarrow +\infty$ , acontece que as séries de Fourier de cossenos podem ter coeficientes que decaem para zero arbitrariamente devagar. O resultado seguinte dá condições na sucessão dos coeficientes de uma série de cossenos, em particular uma condição de convexidade, que garantem que é uma sucessão de coeficientes de Fourier, e mostra que essa condição pode ser satisfeita por sucessões que convergem arbitrariamente devagar para zero. Há, neste aspecto, um contraste radical entre séries trigonométricas de senos e de cossenos.

(7.36) **Proposição:** *Se  $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , é uma sucessão par, i.e.,  $c_{-n} = c_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (pelo que a série de Fourier com coeficientes  $c_n$  é necessariamente uma série de cossenos) e se  $c_n \geq 0$ ,  $c_n \rightarrow 0$  para  $|n| \rightarrow \infty$ , e  $c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1} \geq 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ , então existe  $f \in L^1([0, 2\pi])$  com  $f \geq 0$  tal que  $\widehat{f}(n) = c_n$ . Como há sucessões que satisfazem as condições de  $\{c_n\}$  e convergem para zero no infinito arbitrariamente devagar, existem séries de Fourier de cossenos com coeficientes que convergem para zero no infinito arbitrariamente devagar.*

*Dem.* A condição de convexidade na hipótese garante que  $c_n - c_{n+1}$  é decrescente, e como esta sucessão converge para zero obtém-se  $c_n - c_{n+1} \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em consequência  $n(c_n - c_{n+1}) + c_n$  também é decrescente, pois

$$[(n-1)(c_{n-1} - c_n) + c_{n-1}] - [n(c_n - c_{n+1}) + c_n] = n[(c_{n-1} - c_n) - (c_n - c_{n+1})] \geq 0.$$

Como  $n(c_n - c_{n+1}) + c_n \geq 0$  e esta sucessão é decrescente, converge para um  $L \geq 0$ . Como  $c_n \rightarrow 0$ , também  $n(c_n - c_{n+1}) \rightarrow L$ , pelo que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$n(c_n - c_{n+1}) \geq L/2$  para  $n > N$ . Logo

$$c_N - c_{m+1} = \sum_{n=N}^m (c_n - c_{n+1}) \geq \sum_{n=N}^m \frac{L}{2n}.$$

Fazendo  $m \rightarrow +\infty$ , obtém-se  $c_N \geq \sum_{n=N}^{+\infty} L/(2n)$ , pelo que  $L = 0$ . Como  $n(c_n - c_{n+1}) \rightarrow 0$ , segue-se que

$$\sum_{n=1}^m n(c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}) = c_0 - c_m - m(c_m - c_{m+1})$$

converge para  $c_0$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Define-se

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}) K_{n-1}(t),$$

onde  $K_n$  é o núcleo de Fejér definido em (7.13). É claro que  $f \geq 0$ , e do teorema de Convergência de Levi é  $f \in L^1([0, 2\pi])$ . Os coeficientes de Fourier desta função são

$$\begin{aligned} \hat{f}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}) \hat{K}_{n-1}(j) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = c_{|j|}. \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

(7.37) **Exemplo:** Apesar da série de senos  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin nt)/(\log n)$  não ser uma série de Fourier, a série de cossenos correspondente  $\sum_{n=2}^{\infty} (\cos nt)/(\log n)$  é uma série de Fourier, como resulta da última proposição anterior, pois neste caso  $c_n = 1/(2 \log n)$  para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$  e  $c_0 = c_{\pm 1} = 0$ . Na verdade  $c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1} \geq 0$  é garantido para  $n \geq 3$  pela convexidade de  $x \mapsto 1/\log x$ , para  $n=2$  pela conta  $c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1} = -2/(4 \log 2) + 1/(2 \log 3) > 0$ , e para  $n=1$  pela conta  $c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1} = 1/(2 \log 2) > 0$ .

O último resultado desta secção estabelece o facto usado na demonstração da proposição (7.34) das propriedades de continuidade e diferenciabilidade serem herdadas pelos limites de sucessões uniformemente convergentes e a derivada do limite ser no último caso o limite da sucessão das derivadas da sucessão que converge para a função. No contexto da demonstração da proposição (7.34) pode-se fazer uma demonstração mais simples, mas optou-se por isolar o resultado e formulá-lo de forma mais geral dada a utilidade que tem noutros contextos e a importância fundamental destas propriedades da convergência uniforme.



(7.38) **Teorema de continuidade e diferenciabilidade de sucessões uniformemente convergentes:** *Seja  $\{f_n\}$  uma sucessão de funções reais definidas num intervalo  $[a, b]$ .*

1. *Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $[a, b]$  e as funções  $f_n$  são contínuas, então  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .*
2. *Se  $f_n(t_0) \rightarrow f(t_0)$  num ponto de  $[a, b]$ , as funções  $f_n$  são diferenciáveis e  $\{f'_n\}$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então  $f$  é diferenciável e  $f'_n \rightarrow f'$  em  $[a, b]$ .*

*Dem.*

1. Para  $t \in [a, b]$  e  $h$  tal que  $t+h \in [a, b]$  é

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |f(t+h) - f_n(t+h)| + |f_n(t+h) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)|.$$

Qualquer que seja  $\epsilon > 0$ , como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $[a, b]$ , o 1º e o 3º termos do lado direito desta fórmula são  $< \epsilon/3$  para  $n$  suficientemente grande, e como  $f_n$  é contínua o 2º termo é  $< \epsilon/3$  para  $|h|$  suficientemente pequeno. Conclui-se que qualquer que seja  $\epsilon > 0$  para  $h$  suficientemente pequeno com  $t+h \in I$  é  $|f(t+h) - f(t)| < \epsilon$ , ou seja  $f$  é contínua em cada  $t \in [a, b]$ .

2. Qualquer que seja  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m > N$  implica  $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon$  e  $|f'_n(t) - f'_m(t)| < \epsilon$  para  $t \in [a, b]$ . O teorema do valor médio de funções diferenciáveis aplicado à função  $f_n - f_m$  garante que para qualquer  $t, s \in [a, b]$  existe  $t_1$  entre  $t$  e  $s$  tal que

$$|f_n(t) - f_m(t) - f_n(s) + f_m(s)| = |f'_n(t_1) - f'_m(t_1)| |t - s| \leq \epsilon |b - a|.$$

Portanto, para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $t, s \in [a, b]$ ,  $n, m > N$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_m(t)| &\leq |f_n(t) - f_m(t) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leq \epsilon |b - a| + \epsilon, \end{aligned}$$

pelo que  $f_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$ . Define-se  $f_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  para  $t \in [a, b]$ .

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definem-se funções pelas razões incrementais de  $f_n$  e  $f_0$  em  $t_0$  por  $R_n(t) = [f_n(t) - f_n(t_0)](t - t_0)$  para  $t \neq t_0$ , e para  $n \in \mathbb{N}$  define-se  $R_n(t_0) = f'_n(t_0)$ . Como as funções  $f_n$  são diferenciáveis em  $[a, b]$  também são contínuas em  $[a, b]$ , e o mesmo acontece com as funções  $R_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso,  $R_n \rightarrow R_0$  uniformemente em  $[a, b] \setminus \{0\}$ . Da fórmula (7.7), para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n, m > N$  é  $|R_n - R_m| \leq \epsilon$  em  $[a, b]$ . Portanto,  $R_n \rightarrow R_0$  uniformemente em  $[a, b] \setminus \{0\}$ . Estendendo a função  $R_0$  ao ponto  $t_0$  por  $R_0(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t_0)$ , tem-se  $R_n \rightarrow R_0$  em  $[a, b]$  e  $R_n \rightarrow R_0$  uniformemente em  $[a, b]$ .

Como as funções  $R_n$  são contínuas em  $[a, b]$ , da 1ª afirmação do teorema resulta que  $R_0$  é contínua em  $[a, b]$ . Portanto  $\lim_{t \rightarrow t_0} R_n(t) = R_0(t_0)$ , o que significa que  $f$  é diferenciável em  $t_0$  e a sua derivada é  $f'(t_0) = R_0(t_0) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t_0)$ . Como  $t_0 \in [a, b]$  é arbitrário, conclui-se que  $f$  é diferenciável em  $[a, b]$  e  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente em  $[a, b]$ . *Q.E.D.*

## 7.8 Notas históricas

Em 1753, pouco tempo depois de d'Alembert ter obtido soluções para a equação das ondas por adição de funções propagando-se em sentidos opostos com velocidade constante, Daniel Bernoulli defendeu que as soluções desta equação podiam ser sempre representadas por somas de funções trigonométricas. Baseava esta sua ideia no princípio físico de que uma corda elástica em vibração emite uma frequência fundamental descrita por uma função trigonométrica e as suas harmônicas com frequências múltiplas da fundamental, pelo que propôs a validade da fórmula  $\sum \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi cx/L)$  para o movimento de cordas elásticas vibrantes, como as de instrumentos musicais, a partir de uma posição inicial considerada com velocidade inicial nula. Esta ideia pressupõe a possibilidade de representar em série de Fourier qualquer função que possa descrever uma posição inicial para a equação das ondas. Na verdade, D. Bernoulli argumentava que a sua fórmula em termos de funções trigonométricas permitia descrever o movimento de uma corda elástica mesmo que a posição inicial correspondesse à situação semelhante a dedilhar uma corda de viola com posição inicial dada por uma função cujo gráfico consiste em dois segmentos de recta com declives de sinais opostos fazendo um ângulo no ponto em que se unem, pelo que esta função podia ser representada por uma soma de funções trigonométricas. A ideia baseava-se na convicção de D. Bernoulli que o som produzido pela corda em vibração era o resultado audível da sobreposição de sons sinusoidais, pelo que a possibilidade de produzir sons musicais por dedilhação de uma corda elástica exigia a possibilidade da referida representação por somas de funções trigonométricas.

Em 1755 L. Euler descobriu várias séries trigonométricas, entre as quais as seguintes de funções descontínuas  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nt)/t = (\pi-t)/2$ , para  $0 < t < 2\pi$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\cos(2n+1)]/(2n+1) = \pm\pi/4$ , com o sinal + para  $-\pi/2 < t < \pi/2$  e o sinal - para  $\pi/2 < t < 3\pi/2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sin nt)/t = t/2$ , para  $-\pi < t < \pi$ .

O ponto de vista de D. Bernoulli gerou grande controvérsia na altura e encontrou forte oposição tendo sido rejeitado generalizadamente, inclusivamente por Euler, d'Alembert e Lagrange, mas veio a ser retomado por Fourier em 1807 a propósito da difusão do calor, ocasião em que também recebeu forte contestação porque não estava, então, assente em análise rigorosa.

A primeira prova da convergência de séries de Fourier em condições relativamente gerais acabou por ser feita apenas em 1829 por Dirichlet, precisamente com a introdução do núcleo de Dirichlet para representar as somas parciais da série. Dirichlet provou a convergência pontual de séries de Fou-

rier seccionalmente contínuas e monótonas num intervalo  $[a, b]$ , no sentido de haver uma partição finita do intervalo em cujos subintervalos a função é contínua e monótona podendo ser descontínua de salto nos pontos de separação dos subintervalos, onde provou que a convergência era para a média dos limites laterais à esquerda e à direita.

Fourier tomava como certa a **possibilidade de integração de séries de funções termo a termo**, como aliás também Cauchy, Gauss e outros, e tinha baseado a argumentação sobre a unicidade e a convergência de séries de Fourier na legitimidade de integração das séries termo a termo, e mesmo a obtenção das fórmulas integrais para os coeficientes das séries de Fourier. Inclusivamente, Cauchy considerava, sem questionar, que o limite de uma série convergente de funções contínuas era contínua. Em 1826 N.H. Abel<sup>41</sup> mostrou com um exemplo que tal não é verdadeiro em geral para séries convergentes arbitrárias, mostrando a ilegitimidade de em geral trocar a passagem ao limite em séries, embora tenha também dado exemplos de séries em que tal é possível. Esta observação levou-o a questionar a legitimidade da integração de séries termo a termo em geral, no sentido do integral de Cauchy definido pelo limite da soma das áreas dos trapézios definidos por partições finitas do intervalo  $[a, b]$  de integração e inscritos no conjunto das ordenadas da função. K. Weierstrass, possivelmente analisando os exemplos de Abel, considerou a **relevância da convergência uniforme** de séries para assegurar a validade da troca de limites num artigo escrito em 1841 mas só publicado em 1894, e nas suas lições a partir de 1856 sublinhava a importância da convergência uniforme para a troca de limites em séries e outras sucessões de funções, incluindo a integração termo a termo de séries e para que o limite de sucessões de funções ou de séries herde propriedades dos termos como continuidade ou diferenciabilidade<sup>42</sup>.

Em 1854 B. Riemann contribuiu para a questão da convergência de séries de Fourier, o que inclusivamente o levou ao próprio **conceito de integral de Riemann** exposto no trabalho sobre representação de funções por séries de Fourier que apresentou para a sua *Habilitationsschrift*<sup>43</sup>. Este trabalho contém pela primeira vez o chamado Lema Riemann-Lebesgue e o Princípio de

<sup>41</sup>Abel, Niels Henrik (1802-1829).

<sup>42</sup>Para sublinhar a importância da convergência uniforme é interessante citar uma passagem particularmente perspicaz das *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford, 1944, de John Littlewood (1885-1977) a propósito da teoria de funções de uma variável: "A extensão do conhecimento requerido não é nada tão grande como muitas vezes é suposto: todo conjunto [mensurável] é quase uma união finita de intervalos; toda a função [mensurável] é quase contínua; toda a sucessão convergente de funções [mensuráveis] é quase uniformemente convergente. Muitos dos resultados são aplicações razoavelmente intuitivas destas ideias, e o estudante armado com elas deverá estar à altura de muitas ocasiões em que é convocada a teoria de variável real. Se um dos princípios seria a maneira óbvia de resolver o problema se fosse 'mesmo' verdade, é natural perguntar se o 'quase' é suficientemente próximo, e para um problema resolúvel normalmene é."

<sup>43</sup>Prova académica nas universidades da Alemanha correspondente à Agregação nas universidades portuguesas.

Localização de Riemann, ambos no contexto da integração à Riemann estabelecida no mesmo trabalho. Riemann introduziu também uma ideia radicalmente nova na representação de funções por séries de Fourier e introduziu a distinção de séries de Fourier e séries trigonométricas tendo mostrado que há séries trigonométricas que não são séries de Fourier de qualquer função. Esta ideia consistia simplesmente em observar que primitivando duas vezes os termos de uma série trigonométrica  $S(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)$  obtinha-se  $\mathcal{F}(t) = C_1 + C_2 t + A_0 t^2/4 - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)/n^2$  e, com esta simples manipulação, a série no 2º termo é dominada pela série convergente  $\sum 2Mn^{-2}$  se  $A_n, B_n \leq M$ , pelo que é uniformemente convergente, o que em particular legitima a integração termo a termo desta série. Riemann observou que o limite da aproximação por acréscimos finitos de um passo de largura  $a$  para a 2ª derivada de  $F$  em  $t$  é

$$\lim_{a \rightarrow 0} [\mathcal{F}(t+a) - 2\mathcal{F}(t) + \mathcal{F}(t-a)]/a = 0,$$

e a aproximação por acréscimos finitos de dois passos de larguras  $a$  e  $b$  é

$$\mathfrak{D}^2 \mathcal{F}(t) = \lim_{a, b \rightarrow 0} [\mathcal{F}(t+a+b) - \mathcal{F}(t+a-b) - \mathcal{F}(t-a+b) + \mathcal{F}(t-a-b)]/(4ab)$$

existe e é igual a  $S(t)$ . Este trabalho ficou pouco conhecido e só foi publicado postumamente em 1867 por R. Dedekind<sup>44</sup>.

Em 1864, R. Lipschitz provou, na sua tese de doutoramento, a convergência pontual de séries de Fourier de funções que, excepto num conjunto finito de pontos de  $[a, b]$  onde podem ter descontinuidades de salto, satisfazem a condição que veio a ser conhecida por condição de Lipschitz, já utilizada a propósito da existência e unicidade de soluções de problemas de valores iniciais para equações diferenciais ordinárias no Teorema de Picard-Lindelöf em (??). A esta condição suficiente para convergência pontual de séries de Fourier chamou-se **critério de Lipschitz**. Assim, o conceito de funções Lipschitzianas apareceu primeiro a propósito da convergência de séries de Fourier.

Depois de tentativas infrutíferas de vários matemáticos, entre os quais Dirichlet, Heine e Riemann para resolver o **problema da unicidade de séries de Fourier**, esta questão foi considerada na altura um dos principais problemas matemáticos em aberto. Em 1870 H. Heine chamou a atenção para o problema, observando que nas condições supostas por Dirichlet com a hipótese adicional de convergência uniforme em qualquer intervalo compacto sem qualquer dos pontos finitos de descontinuidade da função se obtém a unicidade de séries de Fourier. Nesse mesmo ano, G. Cantor estabeleceu a unicidade de séries de Fourier nas condições referidas sem exigir a hipótese adicional de convergência uniforme e passou a considerar casos em que o conjunto  $P$  complementar dos intervalos de monotonia e continuidade da função no intervalo de base  $[a, b]$  é um conjunto infinito onde a função pode ter descontinuidades de salto.

<sup>44</sup>Dedekind, Richard (1831-1916).

O trabalho de Heine e Cantor estabeleceu a unicidade de séries de Fourier mas não considerou o cálculo rigoroso dos coeficientes. No mesmo mês de 1872, G. Ascoli<sup>45</sup> e U. Dini submeteram para publicação artigos sobre esta questão com base no trabalho de Riemann acima referido baseado em duas primitivações sucessivas dos termos de séries trigonométricas que levam a que a série obtida no resultado seja uniformemente convergente e portanto pudesse ser integrada termo a termo no contexto do integral de Riemann. Ascoli considerou funções com possíveis descontinuidades num número finito de pontos e Dini funções em que as descontinuidades são isoladas ou podem ter um número finito de pontos de acumulação. Em ambos os artigos a função  $\mathcal{F}$  obtida por Riemann acima referida é equacionada à primitivação sucessiva duas vezes da função  $f$  que se pretende representar em série de Fourier na forma  $\mathcal{F}(t) = \int_0^t (\int_0^s f) ds$  e os coeficientes da série são obtidos integrando de 0 a  $2\pi$  ambos os lados desta equação multiplicados por  $\cos mt$  e por  $\sin mt$ .

Em 1874, P. du Bois-Reymond<sup>46</sup> generalizou o trabalho de Ascoli e Dini para o caso em que  $f$  é uma função integrável à Riemann qualquer, com uma demonstração bastante complicada para poder lidar com o caso de funções com descontinuidades num conjunto denso num intervalo, estabelecendo definitivamente que a convergência uniforme da série trigonométrica inicial não é essencial para a calcular os coeficientes da série de Fourier de uma função, pois pode ser contornada considerando a série absolutamente convergente obtida por Riemann na fórmula de  $\mathcal{F}$  dada acima. Este resultado, algo irônico porque veio a contrariar as objeções levantadas 13 anos antes à integração termo a termo que foram fortemente responsáveis por importantes avanços na teoria das séries de Fourier, foi muito importante na altura, no contexto do integral de Riemann, mas tornou-se pouco útil com o integral de Lebesgue com o qual a integração termo a termo pode ser feita para séries limitadas num intervalo  $[a, b]$ .

O trabalho de Cantor sobre a unicidade de séries de Fourier disparou a publicação por Cantor na década seguinte de uma densa sequência de artigos que constituíram as primeiras pedras da construção das áreas fundamentais da **topologia de conjuntos de pontos** de números reais e da **teoria dos conjuntos** geral. Assim, num artigo de 1872 G. Cantor introduziu a noção de **ponto de acumulação**<sup>47</sup> do conjunto  $P$  e a ideia do conjunto de todos os seus pontos de acumulação ou **conjunto derivado**  $P'$ , de conjunto  $P''$  dos pontos de acumulação deste conjunto e assim sucessivamente, que designou, respectivamente, 1º conjunto derivado, 2º conjunto derivado, etc., chamando **conjunto de tipo**  $n \in \mathbb{N}$  a um conjunto cujo derivado de ordem  $n$  é não-vazio e o derivado de ordem  $n+1$  é vazio. Cantor estendeu a unicidade

<sup>45</sup> Ascoli, Julio (1843-1896).

<sup>46</sup> du Bois-Reymond, Paul David Gustav (1831-1889).

<sup>47</sup> Diz-se que um ponto é de acumulação de um conjunto se todas as suas vizinhanças contêm infinitos pontos do conjunto.

de séries de Fourier a funções em que  $P$  é um conjunto de tipo  $n$ , mas mais importante, pelas consequências que teve no estudo fino da análise real, em particular na teoria da medida e do integral de Lebesgue, foi Cantor entender que podem existir conjuntos de números reais de qualquer tipo  $n$ . É também interessante notar que no ano seguinte Cantor introduziu a noção elementar de **conjunto contável**<sup>48</sup> e implicitamente a noção de **cardinalidade** de conjuntos<sup>49</sup>, provou o resultado na altura surpreendente do conjunto dos números algébricos<sup>50</sup> ser contável e também que qualquer intervalo de números reais é incontável. Pouco depois, em 1878, Cantor propôs a **hipótese do *continuum***<sup>51</sup>. No ano seguinte (1879), Cantor introduziu a noção de **conjunto denso em toda a parte**<sup>52</sup> e de **conjunto não denso em parte alguma**<sup>53</sup>. No ano subsequente (1880) Cantor introduziu as noções básicas de **união** e de **intersecção** de conjuntos e usou-as para continuar para além da definição de conjuntos de 1ª espécie considerando a intersecção de todos os conjuntos derivados de ordem  $n$  e os conjuntos de tipo  $n \in \mathbb{N}$  deste conjunto, a que chamou **conjuntos de 2ª espécie**, e assim sucessivamente, definindo **conjuntos de  $n$ -ésima espécie**. Três anos depois (1883) Cantor introduziu a noção de **conjunto perfeito**<sup>54</sup> e em 1884 também a noção básica de **conjunto fechado**, definido como um conjunto que contém o seu derivado.

Em 1876, P. du Bois-Reymond construiu uma **função contínua periódica com série de Fourier divergente num ponto**. Um pouco mais tarde, o próprio du Bois-Reymond deu um exemplo de uma **função contínua periódica divergente num conjunto denso da recta real**.

O **critério de Dini** para provar convergência pontual de séries de Fourier foi desenvolvido por U. Dini em 1880, generalizando o critério de Lipschitz obtido em 1864.

Em 1881 C. Jordan<sup>55</sup> estabeleceu o chamado **critério de Jordan** para

<sup>48</sup>Diz-se que um conjunto é contável se há uma correspondência 1 a 1 entre o conjunto e um subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

<sup>49</sup>Diz-se que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se os respectivos elementos podem ser postos em relação 1 a 1.

<sup>50</sup>Um número real ou complexo é algébrico se há um polinómio de coeficientes inteiros que se anula nesse número.

<sup>51</sup>A hipótese do *continuum* é a inexistência de conjuntos com cardinalidade entre as de  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ . Veio a ser provada indecidível por Kurt Gödel (1906-1978) em 1940 no quadro da axiomática comum da teoria dos conjuntos, depois de ser considerada um dos principais problemas matemáticos em aberto, tendo inclusivamente sido o 1º dos famosos 23 **Problemas de Hilbert** (ver os comentários finais da introdução a este livro).

<sup>52</sup>Um conjunto é denso em toda a parte se o seu fecho é todo o espaço, como por exemplo os racionais no espaço dos números reais.

<sup>53</sup>Um conjunto é não denso em parte alguma se não é denso em qualquer subconjunto aberto não-vazio, ou por outras palavras, se o seu fecho tem interior vazio, como é o caso dos conjuntos de 1ª espécie.

<sup>54</sup>Um conjunto é perfeito se é igual ao seu derivado, ou seja se todos os seus pontos são pontos de acumulação do próprio conjunto.

<sup>55</sup>Jordan, Marie Ennemond Camille (1838-1922).

funções integráveis à Lebesgue de variação limitada<sup>56</sup>

O Teorema de Aproximação de Weierstrass deve-se ao próprio K. Weierstrass em 1885.

O núcleo de Fejér foi introduzido pelo próprio L. Fejér em 1900.

A extensão do conceito de integral de Lebesgue no início do século XX permitiu progressos fundamentais na teoria das séries de Fourier. As bases da teoria deste integral foram estabelecidas por H. Lebesgue numa série de artigos publicados a partir de 1898 que culminaram com a sua tese de doutoramento publicada em 1902 num artigo com o título *Intégrale, longueur, aire* e foram objecto do seu primeiro livro *Leçons sur l'Intégration et la Recherche de Fonctions Primitives*. O primeiro problema de séries de Fourier analisado com o integral de Lebesgue, considerado pelo próprio H. Lebesgue em 1902, foi dedicado precisamente a séries de Fourier, mais concretamente à extensão da integração de séries de Fourier termo a termo com uma grande simplificação tornada possível com o novo conceito de integral, pois passou a bastar que a série fosse limitada no intervalo de base  $[a, b]$ .

Em 1906, no seu segundo livro *Leçons sur les Séries Trigonométriques*, Lebesgue deu uma prova simples da Fórmula de Parseval para funções limitadas integráveis à Lebesgue, a qual tinha sido estabelecida para funções integráveis à Riemann por C. de la Vallée-Poussin<sup>57</sup> em 1893 e por A. Hurwitz<sup>58</sup> em 1903. A validade da Fórmula de Parseval para qualquer função integrável e de quadrado integrável à Lebesgue foi estabelecida por P. Fatou em 1906 na sua tese de doutoramento intitulada *Séries trigonométriques et séries de Taylor*.

Também em 1906, F. Riesz introduziu o espaço  $L^2(I)$  e estabeleceu as suas propriedades básicas e em 1907 estabeleceu a teoria de séries de Fourier em  $L^2(I)$ . O Teorema de Riesz-Fischer foi estabelecido independentemente por estes matemáticos em 1907, especificamente no contexto das séries de Fourier. A noção de conjunto ortonormal completo deve-se a D. Hilbert. A definição e o nome de **espaço de Hilbert**<sup>59</sup> para um espaço linear com produto interno completo, como  $L^2([0, 2\pi])$ , deve-se a J. von Neumann<sup>60</sup> em 1927.

---

<sup>56</sup>Diz-se que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função de variação limitada** se existe  $M > 0$  tal que para qualquer partição finita do intervalo por pontos  $a = t_0 < \dots < t_m = b$  verifica-se  $\sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq M$ . Vê-se no Apêndice B que uma função é de variação limitada em  $[a, b]$  se e só se é a diferença de duas funções crescentes neste intervalo.

<sup>57</sup>de la Vallée-Poussin, Charles Gustave Nicolas (1866-1962).

<sup>58</sup>Hurwitz, Adolf (1859-1919).

<sup>59</sup>Os espaços de Hilbert de dimensão infinita são todos espaços lineares isomorfos a  $L^2([0, 2\pi])$ , no sentido de haver um isomorfismo que preserva não só as operações e o zero de espaços lineares como também o produto interno (e portanto também preserva comprimentos e ângulos entre vectores), pelo que no fundo existe um único espaço de Hilbert de dimensão infinita que pode ser identificado com  $L^2([0, 2\pi])$ . Os espaços de Hilbert de dimensão finita  $n$  são isomorfos ao espaço euclidiano com produto interno  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>60</sup>von Neumann, John (1903-1957).

Portanto, é claro que a resolução de equações diferenciais parciais, em particular a equação das ondas e a equação do calor, desempenhou um papel essencial na descoberta das séries de Fourier e no desenvolvimento da teoria de integração, inclusivamente no que respeita às próprias contribuições tanto de B. Riemann como de H. Lebesgue para os integrais conhecidos pelos seus nomes.

As séries de Fourier também tiveram um papel importante na consolidação do próprio **conceito de função** adoptado hoje em dia, pois foi a propósito de séries de Fourier que uma função deixou de ser considerada como uma relação definida por um número finito de fórmulas ou pelas soluções de equações que envolvam tais fórmulas para assumir a noção de correspondência unívoca de pontos de um conjunto para outro. Na verdade, no estudo da convergência de séries de Fourier acabou por ficar clara a necessidade de considerar funções num sentido mais geral dado que os limites podiam não ser uma função no conceito tradicional. O germe para o abandono da noção tradicional de função começou a aparecer em consequência do trabalho de Euler (cerca de 1734) e de Fourier (cerca de 1822) a propósito de séries de Fourier, assim como das definições de Cauchy, também fortemente influenciadas pelo estudo de séries de Fourier, de continuidade (1821) e do integral de Cauchy (1823). Contudo, Fourier e Cauchy não abandonaram o conceito tradicional de função. Na verdade, a noção de função como correspondência unívoca de um conjunto para outro só ficou claramente expressa por Dirichlet em 1829 quando considerou a função a que foi dado o seu nome<sup>61</sup> como exemplo de uma função limitada num intervalo limitado não integrável, considerando desta forma como função uma relação que não era expressa por uma fórmula como se fazia anteriormente, embora não tenha formulado explicitamente a definição de função. Mesmo assim, a evolução foi lenta, pois até Riemann em 1851, que na sua tese de doutoramento definiu função no sentido moderno, só um outro matemático adoptou explicitamente o conceito de função actual, designadamente B. Bolzano<sup>62</sup>, que o formulou no manuscrito *Functionenlehre* de apoio às suas lições, que só veio a ser publicado em 1930.

O Fenómeno de Gibbs foi explicado por J.W. Gibbs em 1899 num artigo publicado na revista *Nature* com a distinção da convergência pontual da série de Fourier e da convergência dos respectivos gráficos, para a função em dente de serra definida por  $f(t) = t$  se  $t \in ]0, \pi[$ ,  $f(t) = t - 2\pi$  se  $t \in ]\pi, 2\pi[$  e  $f(0) = f(2\pi) = 0$ . Gibbs observou que o gráfico do limite das somas parciais de uma série de Fourier pode ser diferente do limite dos gráficos das somas parciais, e inclusivamente afirmou que o *overshoot* e *undershoot* no ponto de descontinuidade chegavam a  $2 \int_0^\pi (\sin s)/s ds$  de distância no eixo das abscissas, distintamente acima e abaixo respectivamente dos limites laterais da

<sup>61</sup>A função de Dirichlet é a função com valor 1 nos números racionais e 0 nos irracionais.

<sup>62</sup>Bolzano, Bernhard (1781-1848).



função no ponto, os quais são  $\pi$  e  $-\pi$ , mas não apresentou uma prova. Este artigo respondia a questões levantadas por A.A. Michelson<sup>63</sup> numa carta publicada na 1898 *Nature* na sequência de observações de *overshoots* e *undershoots* no seu analisador harmónico<sup>64</sup>. Contudo, já tinha sido chamada a atenção para este fenómeno em 1848 por H. Wilbraham, num artigo que passou despercebido durante décadas, mas em que tinha calculado que a altura do primeiro *overshoot* era cerca de 8,9% da altura do salto da descontinuidade, razão pela qual E. Hewitt<sup>65</sup> e R.E. Hewitt<sup>66</sup> lhe chamaram em 1980 Fenómeno de Gibbs-Wilbraham. O nome Fenómeno de Gibbs foi dado por M. Bôcher<sup>67</sup> em 1906 num artigo publicado na revista *Annals of Mathematics*, em que considerou uma outra função em dente de serra, definida por  $f(t) = (\pi - t)/2$  se  $t \in ]0, 2\pi[$  e  $f(0) = f(2\pi) = 0$ , e mostrou que este fenómeno ocorre nas séries de Fourier de funções seccionalmente  $C^1$  com descontinuidades de salto. Em 1904 C.D. Runge<sup>68</sup> também considerou este fenómeno num caso de uma série de Fourier particular. Em 1912 T.H. Gronwall publicou uma explicação elementar do Fenómeno de Gibbs e estendeu a classe de funções em que era explicado a funções de variação limitada com um número finito de descontinuidades. Em 1917 H.S. Carslaw publicou um artigo calculando o Fenómeno de Gibbs para a função periódica de impulsos rectangulares definida por  $f(t) = \pi/2$  se  $t \in ]0, \pi[$  e  $f(t) = -\pi/2$  se  $t \in ]-\pi, 0[$ .

Em 1926 A. Kolmogorov mostrou que há **funções integráveis com série de Fourier divergente em todos os pontos**. Por outro lado, em contraste com os resultados negativos de convergência pontual de séries de Fourier, foi provado no sentido positivo por L. Carleson em 1965, em resposta a uma questão posta 50 anos antes por N. Lusin<sup>69</sup>, que as **séries de Fourier de funções de quadrado integrável são sempre pontualmente convergentes excepto possivelmente num conjunto de medida nula**, ou seja, para funções de quadrado integrável o conjunto de pontos onde a série de Fourier diverge é negligível no sentido da medida de Lebesgue.

O símbolo  $O$  da notação de Bachmann-Landau para ordens de crescimento ou decaimento foi introduzido em 1891 por P. Bachmann e o

<sup>63</sup>Michelson, Albert Abraham (1852-1931).

<sup>64</sup>Os analisadores harmónicos começaram por ser aparelhos mecânicos para cálculo das primeiras componentes de séries de Fourier e foram aplicados para a decomposição de ondas de água, som ou luz em harmónicas. A.A. Michelson e Samuel Wesley Stratton (1861-1931) construíram em 1898 um analisador harmónico para cálculo das primeiras 80 componentes harmónicas, refinando o analisador harmónico inventado em 1876 por William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907) que se baseava no chamado Integrador de Kelvin para calcular mecanicamente integrais de produtos de duas funções.

<sup>65</sup>Hewitt, Edwin (1920-1999).

<sup>66</sup>Hewitt, Robert E.

<sup>67</sup>Bôcher, Maxime (1867-1918).

<sup>68</sup>Runge, C.D. (1856-1927).

<sup>69</sup>Lusin, Nikolai (1883-1950).

símbolo  $o$  foi introduzido por E. Landau em 1909, ambos investigadores de Teoria dos Números.

O processo de regularização baseado em núcleos de regularização ou molificadores foi criado por K.O. Friedrichs<sup>70</sup> em 1944, quando também introduziu o termo *mollifier*, a propósito da equivalência entre soluções fracas e soluções fortes de equações diferenciais parciais lineares em espaços como  $L^2$  e  $L^1$ .

Como se vê nestas notas históricas as séries de Fourier, inventadas a propósito da resolução de equações diferenciais parciais, foram impressionantemente férteis para o desenvolvimento da matemática, mesmo no que respeita a conceitos tão básicos como o de função e os mais elementares da teoria dos conjuntos e da topologia de conjuntos de pontos. Por isso e pelas aplicações que têm em muitas outras áreas e mesmo em várias áreas da própria matemática, a Análise de Fourier e a sua extensão Análise Harmónica sobressaem no panorama geral da matemática.

---

<sup>70</sup>Friedrichs, Kurt Otto (1901-1982).