

## Capítulo 6

# Equação das ondas – Solução de d’Alembert e separação de variáveis

### 6.1 Introdução e classificação das equações diferenciais parciais lineares de 2<sup>a</sup> ordem em duas variáveis com coeficientes constantes

Neste capítulo considera-se a resolução de problemas para a **equação das ondas** em dimensão 1

$$(6.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 ,$$

primeiro pelo método de d’Alembert e depois pelo método de separação de variáveis. É um exemplo de equações consideradas na modelação de processos de propagação de ondas e singularidades em áreas como dinâmica de fluidos, acústica, electromagnetismo, reacções químicas, movimento de veículos em redes viárias.

O método de d’Alembert foi considerado logo no início do estudo destas equações em meados do século XVIII. Permite obter as soluções da equação das ondas por adição de duas ondas calculadas a partir das condições iniciais, idênticas mas que se propagam em sentidos opostos com velocidade constante e, no caso de domínios limitados, se reflectem em pontos da fronteira de acordo com condições de de reflexão impostas.

O método de separação de variáveis para resolução de equações diferenciais parciais também foi introduzido na mesma altura e consiste na procura de soluções que são produtos de funções que dependem separadamente de cada uma das variáveis, procurando transformar a resolução de uma equação diferencial parcial na resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, cada uma tendo como variável independente uma das variáveis

independentes da equação diferencial parcial considerada. Neste capítulo considera-se a aplicação do método de separação de variáveis à equação das ondas com e sem amortecimento.

Nos capítulos seguintes considera-se a resolução de outras equações diferenciais parciais de 2ª ordem em duas variáveis, nomeadamente a **equação do calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

e a **equação de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

A primeira é um exemplo de equações associadas a fenómenos de difusão como por exemplo os que ocorrem em propagação de calor, difusão química, de populações ou doenças, movimento browniano de partículas. A segunda é um caso particular de equações associadas a processos de equilíbrio, por exemplo no âmbito da electrostática, da mecânica dos fluidos ou de processos de reacção-difusão, que geralmente ocorrem em processos evolutivos que envolvem propagação de ondas, fenómenos de difusão ou situações mistas.

Embora as três equações referidas constituam casos muito particulares de equações diferenciais parciais, cada uma delas é um exemplo típico das três classes principais de equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem em duas variáveis e com coeficientes constantes

$$(6.2) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots = 0,$$

onde  $A, B, C \in \mathbb{R}$  são constantes não todas zero e  $\dots$  representa termos de ordem inferior, nomeadamente da forma  $D \partial u / \partial t + E \partial u / \partial x + F u + G$  com  $D, E, F$  constantes e  $G$  uma função de  $(t, x)$ .

Com  $X = \partial / \partial t$ ,  $Y = \partial / \partial x$ ,  $X^2 = \partial^2 / \partial t^2$ ,  $XY = YX = \partial^2 / (\partial t \partial x)$ ,  $Y^2 = \partial^2 / \partial x^2$  e ignorando os termos de ordem inferior a 2ª ordem, a equação (6.2) pode ser escrita  $(AX^2 + BXY + CY^2)u = 0$ . A expressão anterior faz lembrar uma forma quadrática. Se  $X, Y$  fossem escalares, poder-se-ia associar a essa forma quadrática a matriz simétrica

$$M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

e seria  $AX^2 + BXY + CY^2 = [X \ Y] M [X \ Y]^t$ . Como  $M$  é uma matriz simétrica pode ser diagonalizada por uma transformação linear de variáveis que corresponde a uma rotação rígida<sup>1</sup>, obtendo-se uma matriz diagonal  $\Lambda$

<sup>1</sup>É uma transformação ortogonal representada por uma matriz  $S$  tal que  $SS^t = S^t S = I$ .

## 6.1 Introdução e classificação de EDPs lineares de 2ª ordem 159

com os valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $M$  na diagonal principal, e nas novas variáveis a forma quadrática passa a ser  $\lambda_1 U^2 + \lambda_2 V^2$ . Temos três casos possíveis:

1.  $B^2 - 4AC > 0$ , valores próprios diferentes de zero com sinais diferentes;
2.  $B^2 - 4AC = 0$ , um dos valores próprios zero,
3.  $B^2 - 4AC < 0$ , valores próprios diferentes de zero com mesmo sinal.

Quando  $X, Y$  são escalares, também  $U, V$  são escalares e as curvas  $\lambda_1 U^2 + \lambda_2 V^2 = K$  com  $K \neq 0$  são, respectivamente, hipérbolas, parábolas e elipses. Quando  $X, Y$  são os operadores de derivação acima definidos, as transformações lineares de variáveis consideradas passam de  $(t, x)$  para novas variáveis  $(a, b)$  cuja ordem pode ser escolhida de forma ao valor próprio  $\lambda_1$  ser positivo no caso 1, e diferente de zero no caso 2. Os valores próprios podem ser normalizados com a transformação de coordenadas adicional  $\alpha = \sqrt{|\lambda_1|} a$ ,  $\beta = \sqrt{-\lambda_2} b$  no caso 1,  $\alpha = \pm \sqrt{|\lambda_1|} a$  (escolhendo o sinal igual ao de  $\lambda_1$ ),  $\beta = b$  no caso 2, e  $\alpha = \pm \sqrt{|\lambda_1|} a$ ,  $\beta = \pm \sqrt{|\lambda_2|} b$  (escolhendo o sinal igual ao dos valores próprios) no caso 3. Obtém-se assim uma transformação das variáveis  $(t, x)$  para  $(\alpha, \beta)$  que transforma  $X = \partial/\partial t$ ,  $Y = \partial/\partial x$  em  $U = \partial/\partial \alpha$ ,  $V = \partial/\partial \beta$ ,  $U^2 = \partial^2/\partial \alpha^2$ ,  $UV = \partial^2/(\partial \alpha \partial \beta)$ ,  $V^2 = \partial^2/\partial \beta^2$ , com o valor próprio  $\lambda_1$  normalizado a 1 e o valor próprio  $\lambda_2$  normalizado a  $-1, 0$  e  $+1$ , conforme o caso. Assim, a equação diferencial considerada é transformada em

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \dots &= 0, & \text{se } B^2 - 4AC > 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \dots &= 0, & \text{se } B^2 - 4AC = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \dots &= 0, & \text{se } B^2 - 4AC < 0. \end{aligned}$$

A primeira e a terceira são, respectivamente, a equação das ondas normalizada com  $c=1$  e a equação de Laplace. A segunda corresponde à equação do calor normalizada com  $k=1$  dado que se ignoram os termos de ordem inferior a segunda. Por razões que são agora evidentes, diz-se que a equação (6.2) é **hiperbólica**, **parabólica**, ou **elíptica** conforme  $B^2 - 4AC$  é positivo, zero ou negativo. Esta classificação também se faz para equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem com coeficientes variáveis, com ou sem termos de ordem inferior à segunda.

Assim, a equação das ondas é uma equação hiperbólica, a equação do calor é uma equação parabólica e a equação de Laplace é uma equação elíptica. Cada uma destas equações tem propriedades gerais características do correspondente tipo, geralmente associadas a situações de respectivamente,

processos evolutivos que envolvem propagação de ondas e singularidades e leis de conservação, processos evolutivos com difusão, e processos de equilíbrio.

## 6.2 Solução de d'Alembert para uma corda infinita

Um modelo simplificado para o movimento de uma corda elástica flexível uniforme num plano é dado pela equação das ondas em dimensão 1 (6.1), onde  $u(t, x)$  é o afastamento da corda no instante  $t$  e no ponto  $x$  em relação à posição rectilínea de equilíbrio que supomos ser ao longo do eixo dos  $xx$ , considerado perpendicularmente a este eixo (Figura 6.1). Equações deste tipo descrevem também outras situações em que se observa a propagação de ondas com velocidade  $c > 0$ , como é o caso das ondas de pequenas deformações longitudinais de uma barra elástica rectilínea, das ondas electromagnéticas num domínio homogéneo e isotrópico sem cargas eléctricas nem correntes, em que as componentes escalares do campo eléctrico e do campo magnético satisfazem equações do tipo indicado e  $c$  é a velocidade da luz, e o caso das ondas sonoras num gás em movimento numa direcção, em que tanto a densidade como a velocidade do gás satisfazem equações do tipo indicado em que  $c$  é a velocidade do som.

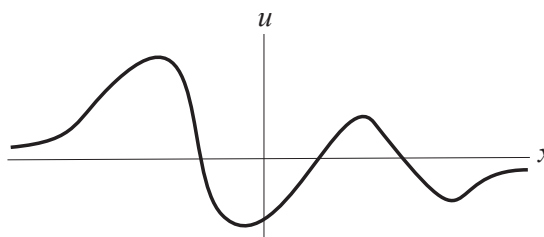


Figura 6.1: Corda elástica em vibração

Consideramos nesta secção a resolução da equação das ondas para uma corda infinita e, portanto, definida para  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ . Temos

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)u.$$

Resulta imediatamente destas igualdades que as funções  $C^2$  que forem soluções das equações de 1ª ordem  $\partial u / \partial t - c \partial u / \partial x = 0$  e  $\partial v / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$  também são soluções da equação das ondas considerada. Estas equações de 1ª ordem foram resolvidas no exemplo (???) do capítulo anterior, onde se obteve que as suas projecções características têm equações cartesianas, respectivamente,  $x + ct = \alpha$  e  $x - ct = \beta$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  constantes arbitrárias. Como o eixo dos  $xx$  é transversal às projecções características de ambas equações, podem ser especificados Problemas de Cauchy para cada uma destas equações com soluções únicas pelas condições  $u(0, x) = p(x)$  e  $u(0, x) = q(x)$ ,

respectivamente, onde  $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas que têm de ser  $C^2$  para que as soluções correspondentes das equações diferenciais sejam  $C^2$ . Assim, para cada par de tais funções  $p, q$  obtêm-se soluções para a equação parcial de 2ª ordem considerada no início da secção, da forma

$$(6.2) \quad u(t, x) = p(x+ct) + q(x-ct) .$$

Esta forma das soluções da equação das ondas unidimensional foi descoberta por d'Alembert em 1747. Mostra que as soluções são o resultado da soma da translação de duas funções, em sentidos opostos, ambas movendo-se com velocidade  $c$ . É por esta razão que a equação considerada é conhecida pelo nome de equação das ondas.

É claro que uma função da forma (6.2) satisfaz  $u(0, x) = p(x) + q(x)$  e  $(\partial u / \partial t)(0, x) = c[p'(x) - q'(x)]$ . Com  $u_0(x) = u(0, x)$  e  $v_0(x) = (\partial u / \partial t)(0, x)$ , primitivando a segunda equação dividida por  $c$  e adicionando o resultado à primeira equação, obtêm-se para uma constante  $K \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$

$$(6.3) \quad p(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds + K .$$

Voltando a usar a primeira equação obtém-se

$$(6.4) \quad q(x) = u_0(x) - p(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds - K .$$

Portanto, os Problemas de Cauchy considerados para as equações de 1ª ordem obtidas, especificando os valores das soluções sobre a transversal  $t = 0$  às projecções características de ambas as equações, correspondem ao problema de valor inicial para a equação das ondas em que se especificam no instante inicial a posição  $u$  e a velocidade  $\partial u / \partial t$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) , \end{aligned}$$

para  $t, x \in \mathbb{R}$ , onde  $c > 0$  é uma constante e  $u_0, v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas, respectivamente  $C^2$  e  $C^1$ .

O argumento anterior baseado na resolução de equações de 1ª ordem pelo método das características assegura a existência de solução deste problema de valor inicial da forma

$$(6.6) \quad u(t, x) = \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds ,$$

a que se chama **solução de d'Alembert** do problema de valor inicial para a equação das ondas (6.5).

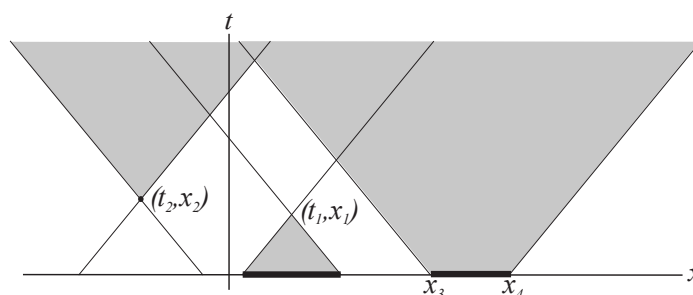


Figura 6.2: Intervalo e domínio de dependência da solução no ponto  $(t_1, x_1)$ , domínio de influência do ponto  $(t_2, x_2)$  e domínio de influência das condições iniciais no intervalo  $[x_3, x_4]$  para a equação das ondas (6.5)

O valor da solução em cada ponto  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  depende apenas da média dos dois valores de  $u_0$  nos pontos  $x-ct$  e  $x+ct$  e da média de  $v_0$  no intervalo entre estes dois pontos, a que se chama **intervalo de dependência** da solução no ponto  $(t, x)$  (Figura 6.2). Por outro lado, o valor da solução no ponto  $(t, x)$  só pode ser influenciado pelos valores da solução no conjunto  $\{(s, y) : s \leq t, x-c(t-s) \leq y \leq x+c(t-s)\}$  a que se chama **domínio de dependência** do ponto  $(t, x)$ . Em acréscimo, o valor da solução num ponto  $(t, x)$  só influencia os valores futuros da solução no conjunto  $\{(s, y) : s \geq t, x-c(s-t) \leq y \leq x+c(s-t)\}$  a que se chama **domínio de influência** do ponto  $(t, x)$ . Em particular, o domínio de influência das condições iniciais num intervalo  $[x_1, x_2]$  especificadas no instante  $t=0$  é  $\{(s, y) : s \geq 0, x_1-cs \leq y \leq x_2+cs\}$ . As linhas de equações cartesianas  $x-ct=k_1$  ou  $x+ct=k_2$ , com  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  constantes, regulam a propagação das condições iniciais. Por analogia com as equações de 1ª ordem consideradas no capítulo anterior, estas linhas são conhecidas por **projectções características** da equação das ondas (Figura 6.3).

Não ficou ainda esclarecida a unicidade de solução, a qual pode ser facilmente obtida notando que as relações acima estabelecidas entre soluções da equação das ondas e das equações de 1ª ordem consideradas podem ser reforçadas observando que  $u$  é solução do problema de valor inicial (6.5) se e só se é solução do Problema de Cauchy para a equação de 1ª ordem  $(\partial/\partial t - c \partial/\partial x)u = v$ ,  $u(0, x) = u_0(x)$  onde  $v$  é solução do Problema de Cauchy para a equação de 1ª ordem  $(\partial/\partial t + c \partial/\partial x)v = 0$ ,  $v(0, x) = v_0(x) - cu'_0(x)$ . Sabe-se do capítulo anterior que este último Problema de Cauchy tem solução única  $v$  em  $\mathbb{R}^2$ , e que o primeiro Problema de Cauchy onde a função  $v$  é essa solução da última equação também tem solução única em  $\mathbb{R}^2$ . Conclui-se que o problema de valor inicial (6.5), com  $u_0, v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  respectivamente  $C^2$  e  $C^1$ , tem solução única em  $\mathbb{R}^2$  dada por (6.6).

Uma argumentação elementar alternativa, uma vez constatado que a

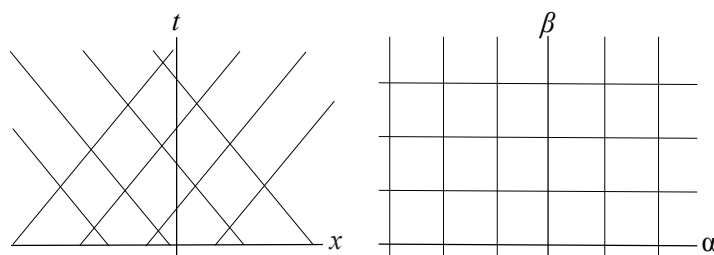


Figura 6.3: Projecções características da equação das ondas nas coordenadas  $(t, x)$  e  $(\alpha, \beta)$

equação das ondas tem soluções da forma (6.2) que são constantes sobre as rectas com  $x + ct$  ou  $x - ct$  constante, consiste em começar por fazer a mudança de variáveis  $\alpha = x + ct$ ,  $\beta = x - ct$  e calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

A equação das ondas é transformada em  $-4c^2 \partial^2 u / (\partial \alpha \partial \beta) = 0$ . Esta equação é satisfeita se e só se nas novas coordenadas  $u$  é da forma  $p(\alpha) + q(\beta)$ , ou seja se e só se a solução é da forma (6.2). Nestas coordenadas as projecções características têm equações  $\alpha$  ou  $\beta$  constante (Figura 6.3).

Quando há forças  $f(t, x)$  aplicadas transversalmente à corda em cada ponto  $x$  e em cada instante  $t$ , ou quando se consideram pequenas deformações longitudinais de barras elásticas no caso em que há forças aplicadas longitudinalmente, obtém-se um problema de valor inicial para a equação das ondas não homogénea

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(t, x) \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x), \end{aligned}$$

para  $t, x \in \mathbb{R}$ , onde  $c > 0$  é uma constante,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $u_0, v_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas, respectivamente  $C^2$  e  $C^1$ . Se  $v$  é a solução do problema homogéneo correspondente, ou seja do mesmo problema mas com  $f = 0$ , pelo princípio da sobreposição a solução do problema não homogéneo é  $u = v + u_p$ , onde  $u_p$  é uma solução particular da equação não homogénea que satisfaz condições iniciais nulas  $u_p(0, x) = \partial u_p / \partial t(0, x) = 0$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Com a mudança de variáveis considerada acima  $\alpha = x + ct$ ,  $\beta = x - ct$ , a equação diferencial é transformada em  $-4c^2 \partial^2 u / \partial \alpha \partial \beta = F(\alpha, \beta)$ , onde  $F(\alpha, \beta) = f((\alpha - \beta)/(2c), (\alpha + \beta)/2)$ . As condições iniciais nas novas variáveis para a solução particular  $U_p(\alpha, \beta) = u_p((\alpha - \beta)/(2c), (\alpha + \beta)/2)$  são  $U_p(\alpha, \alpha) = 0$ ,  $\partial U_p / \partial \alpha(\alpha, \alpha) = \partial U_p / \partial \beta(\alpha, \alpha)$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Primitivando a

equação diferencial obtida primeiro em ordem a  $\alpha$  e depois em ordem a  $\beta$  com as condições iniciais mencionadas obtém-se

$$U_p(\alpha, \beta) = \frac{1}{4c^2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\eta}^{\alpha} F(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

Mudando de variáveis de integração para as variáveis iniciais  $(t, x)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} u_p(t, x) &= \frac{1}{4c^2} \int_{x-ct}^{x+ct} \int_{\eta}^{x+ct} f\left(\frac{\xi-\eta}{2c}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s, y) dy ds . \end{aligned}$$

Portanto, a solução de d'Alembert do problema para a equação das ondas não homogénea (6.7) é

$$(6.8) \quad \begin{aligned} u(t, x) &= \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s, y) dy ds . \end{aligned}$$

A utilização de problemas para equações diferenciais como modelos de situações concretas em áreas de aplicação exige não só a existência e a unicidade de solução como, em geral, a dependência contínua dos dados, nomeadamente de condições iniciais, condições na fronteira e parâmetros da equação, uma vez que em situações experimentais estes só podem ser obtidos aproximadamente, ou seja exige que seja um **problema bem posto no sentido de Hadamard**.

No caso do problema de valor inicial para a equação das ondas homogénea ou não (6.7), pode-se provar que o problema é bem posto no sentido de Hadamard no sentido seguinte. Mais precisamente, se  $\bar{u}$  é a solução de

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \bar{c}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= \bar{f}(t, x) \\ \bar{u}(0, x) &= \bar{u}_0(x), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, x) = \bar{v}_0(x) , \end{aligned}$$

para  $t, x \in \mathbb{R}$ , onde  $\bar{c} > 0$  são constantes,  $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e  $\bar{u}_0, \bar{v}_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções respectivamente  $C^2$  e  $C^1$ , então  $\bar{u} \rightarrow u$  uniformemente em subconjuntos compactos<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^2$  quando  $\bar{c} \rightarrow c$ , e  $\bar{f} \rightarrow f$ ,  $u_0 \rightarrow \bar{u}_0$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Da

---

<sup>2</sup>Para simplificar a notação, escreve-se aqui  $\bar{u} \rightarrow u$  uniformemente em subconjuntos compactos para a convergência de sucessões de funções  $\bar{u}_j \rightarrow u$ .



fórmula (6.8) que dá a solução do problema obtém-se

$$\begin{aligned}
|u(t, x) - \bar{u}(t, x)| &\leq \frac{|u_0(x-ct) - \bar{u}_0(x-\bar{c}t)| + |u_0(x+ct) - \bar{u}_0(x+\bar{c}t)|}{2} \\
&+ \frac{1}{2c\bar{c}} \int_{x-ct}^{x+ct} |\bar{c}v_0(s) - c\bar{v}_0(s)| ds + \frac{1}{2\bar{c}} \left| \int_{x+ct}^{x+\bar{c}t} \bar{v}_0(s) ds \right| \\
&+ \frac{1}{2\bar{c}} \left| \int_{x-\bar{c}t}^{x-ct} \bar{v}_0(s) ds \right| + \frac{1}{2c\bar{c}} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} |\bar{c}f(s, y) - c\bar{f}(s, y)| dy ds \\
&+ \frac{1}{2\bar{c}} \int_0^t \left| \int_{x+c(t-s)}^{x+\bar{c}(t-s)} \bar{f}(s, y) dy \right| ds + \frac{1}{2\bar{c}} \int_0^t \left| \int_{x-\bar{c}(t-s)}^{x-c(t-s)} \bar{f}(s, y) dy \right| ds.
\end{aligned}$$

Com a desigualdade triangular obtém-se

$$\begin{aligned}
|u_0(x \pm ct) - \bar{u}_0(x \pm \bar{c}t)| &\leq |u_0(x \pm ct) - \bar{u}_0(x \pm ct)| + |\bar{u}_0(x \pm ct) - \bar{u}_0(x \pm \bar{c}t)| \\
|\bar{c}v_0(y) - c\bar{v}_0(y)| &\leq |\bar{c} - c| |v_0(y)| + c |v_0(y) - \bar{v}_0(y)| \\
\left| \int_{x \pm ct}^{x \pm \bar{c}t} \bar{v}_0(y) dy \right| &\leq |t| |\bar{c} - c| \max\{|\bar{v}_0(y)| : y \text{ entre } x \pm \bar{c}t \text{ e } x \pm ct\} \\
|\bar{c}f(s, y) - c\bar{f}(s, y)| &\leq |\bar{c} - c| |f(s, y)| + c |f(s, y) - \bar{f}(s, y)| \\
\int_0^t \left| \int_{x \pm c(t-s)}^{x \pm \bar{c}(t-s)} \bar{f}(s, y) dy \right| ds &\leq |t| |t-s| |\bar{c} - c| \\
&\max\{|\bar{f}(s, y)| : 0 \leq s \leq t, y \text{ entre } x \pm \bar{c}(t-s) \text{ e } x \pm c(t-s)\}.
\end{aligned}$$

Portanto, se  $\bar{c} \rightarrow c$ , e  $\bar{f} \rightarrow f$ ,  $u_0 \rightarrow \bar{u}_0$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente, então verifica-se  $\bar{u} \rightarrow u$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^2$ , como se pretendia.

Os resultados obtidos podem ser resumidos como se segue.

(6.10) **Teorema (Solução de d'Alembert):** *Se a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e as funções  $u_0, v_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são  $C^2$  e  $C^1$  respectivamente, então o problema de valor inicial para a equação das ondas homogênea ou não (6.8) tem solução única em  $\mathbb{R}^2$  dada por (6.6). O problema é bem posto no sentido de Hadamard, tomando para as funções envolvidas a convergência uniforme em conjuntos compactos.*

### 6.3 Solução de d'Alembert para uma corda finita

No caso em que a equação das ondas modela o movimento de uma corda elástica flexível uniforme de comprimento  $L$  supõe-se que em repouso a corda se dispõe ao longo do intervalo do eixo dos  $xx$  com extremos  $x=0$  e  $x=L$  e é mantida nas duas extremidades em posições fixas com valores  $U_0$  e  $U_L$ , respectivamente (Figura 6.4), pelo que se exige  $u(t,0) = U_0$ ,  $u(t,L) = U_L$  para todos os instantes de tempo  $t$ . As condições como estas que estabelecem valores para a solução ou para as suas derivadas na fronteira chama-se **condições na fronteira** e aos correspondentes problemas para equações diferenciais chama-se **problemas de valores iniciais com valores na fronteira**. Às condições na fronteira que, como neste caso, estabelecem valores fixos da solução chama-se **condições de Dirichlet**<sup>3</sup>. É fácil observar que  $v(t,x) = u(t,x) - (U_0 + x(U_L - U_0)/L)$  satisfaz a mesma equação das ondas com condições na fronteira  $u(t,0) = u(t,L) = 0$ , pelo que basta considerar problemas com estas condições na fronteira a que se chama **condições de Dirichlet homogêneas**. Tem-se assim o problema de valor inicial com condições de Dirichlet homogêneas para a equação das ondas na forma

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(t,0) &= u(t,L) = 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x), \end{aligned}$$

para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in [0, L]$ , onde  $c > 0$  é uma constante e  $u_0, v_0: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas, com  $u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$  para haver compatibilidade entre as condições iniciais e as condições na fronteira.

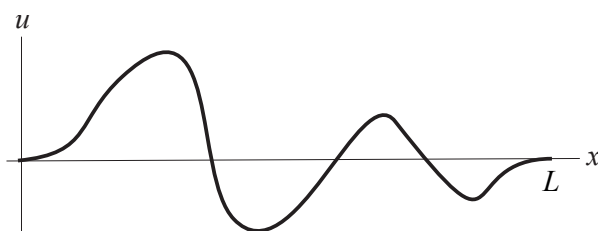


Figura 6.4: Corda flexível vibrante fixa nas extremidades

Considera-se **solução** do problema (6.11) num intervalo de tempo  $I$  que contém zero qualquer função contínua  $u: I \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  que é  $C^2$  e satisfaz a equação diferencial no interior do domínio, tem primeira derivada em relação a  $t$  contínua nos pontos  $(0, x)$ , com  $x \in [0, L]$ , e satisfaz as condições de fronteira e as condições iniciais indicadas.

<sup>3</sup>Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805-1859).

Tal como no caso anterior em que a condição das ondas foi considerada em  $\mathbb{R}$ , os valores da solução no interior do conjunto  $I \times [0, L]$  satisfazem a forma geral da solução de d'Alembert (6.2). As funções  $p, q$  na fórmula (6.2) da solução têm de ser compatíveis com as condições na fronteira em  $x = 0$  e  $x = L$ , pelo que  $p(ct) + q(-ct) = 0$ ,  $p(L + ct) + q(L - ct) = 0$ , e as condições iniciais têm de satisfazer  $u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$ . No triângulo  $T = \{(t, x) : t \geq 0, t \leq x/c, t \leq (L - x)/c\}$  (Figura 6.5) os valores da solução dependem exclusivamente das condições iniciais definidas por  $u_0, v_0$ , sem qualquer interferência das condições na fronteira. Os valores de  $p$  e  $q$  no intervalo  $[0, L]$  e da solução  $u$  no triângulo  $T$  são dados em termos das condições iniciais  $u_0, v_0$  respectivamente pelas fórmulas (6.3), (6.4) e (6.6) obtidas para o problema anterior.

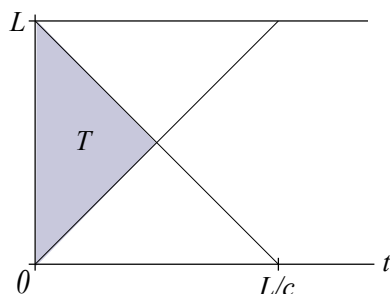


Figura 6.5: Domínio de dependência exclusiva das condições iniciais sem interferência das condições de fronteira (6.11)

Para calcular a solução do problema (6.11) fora do triângulo  $T$  é necessário usar também as condições na fronteira em  $x = 0$  e  $x = L$ . Uma maneira de prosseguir é estender as funções  $p$  e  $q$  do intervalo  $[0, L]$  a todo  $\mathbb{R}$ , de forma a serem satisfeitas as condições acima obtidas para haver compatibilidade com as condições na fronteira, nomeadamente

$$(6.12) \quad q(x) = -p(-x), \quad p(y) = -q(2L - y).$$

Como as funções  $p$  e  $q$  são definidas no intervalo  $[0, L]$  pelas condições iniciais, as fórmulas anteriores permitem definir  $q$  no intervalo  $[-L, 0]$  e  $p$  no intervalo  $[L, 2L]$ . Estas mesmas fórmulas, aplicadas uma na outra, dão

$$\begin{aligned} q(x) &= -p(-x) = -(-q(2L + x)) = q(2L + x), \\ p(y) &= -q(2L - y) = -(-p(-2L + y)) = p(-2L + y). \end{aligned}$$

Portanto, as funções  $p$  e  $q$  devem ser periódicas de período  $2L$ , pelo que as extensões destas funções a  $\mathbb{R}$  podem ser obtidas estendendo por periodicidade as funções  $p$  e  $q$  definidas nos intervalos  $[0, 2L]$  e  $[-L, L]$ , respectivamente, como indicado acima. Assim, as fórmulas (6.12) correspondem à forma como as ondas que se propagam em sentidos opostos com velocidade  $c$  de acordo com a fórmula geral da solução e d'Alembert se reflectem na fronteira (6.2).

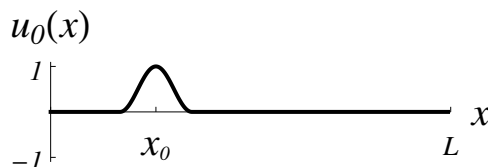


Figura 6.6: Impulso inicial centrado em  $x_0$  para a equação das ondas com condições na fronteira nulas (6.11)

Se a posição inicial é um impulso simétrico centrado no ponto  $x_0$  como ilustrado na Figura 6.6 e a velocidade inicial é nula, a solução (Figuras 6.7 e 6.8) consiste na separação do impulso inicial em dois, cada um com metade da amplitude do impulso original, e da sua propagação com velocidade  $c$ , em sentidos opostos, reflectindo-se na fronteira com troca de sinal e inversão da direcção de propagação, e fundindo-se num único impulso com a amplitude do impulso inicial nas alturas em que os dois impulsos deslocando-se em sentidos opostos se cruzam e têm o mesmo sinal, ou anulando-se se têm sinais diferentes. As linhas de propagação destes impulsos podem ser representadas como na Figura 6.9, onde também se indicam os sinais dos impulsos. Mesmo que a condição inicial não seja um impulso, as linhas indicadas correspondem à propagação das condições iniciais. São as **projeções características** do problema considerado, com equações cartesianas  $x+ct=k_1$  e  $x-ct=k_2$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes arbitrárias.

Figura 6.7: Solução da equação das ondas com condições na fronteira nulas (6.11) e condição inicial igual ao impulso centrado em  $x_0$  da figura anterior com velocidade inicial nula

Figura 6.8: Gráficos da solução da equação das ondas com condições na fronteira nulas (6.11) e condição inicial igual ao impulso centrado em  $x_0$  da Figura 6.6 com velocidade nula, em instantes sucessivos específicos

## 6.4 Resolução da equação das ondas por separação de variáveis 169

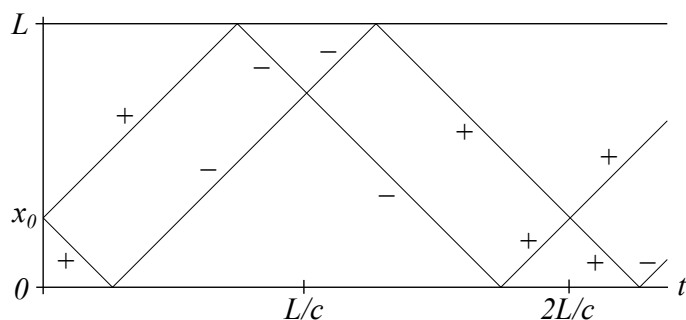


Figura 6.9: Projecções características da equação das ondas com condições de Dirichlet homogéneas (6.11) que passam no  $(0, x_0)$ . Os sinais + e - indicam que o valor inicial  $u_0(x_0)$  é multiplicado por +1 e -1, respectivamente, nos troços correspondentes

Ficou estabelecido o resultado seguinte.

(6.13) **Teorema:** *Sejam  $u_0, v_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  funções respectivamente  $C^2$  e  $C^1$  com  $u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$ . Então o problema de valor inicial com condições de Dirichlet na fronteira para a equação das ondas (6.11) tem uma solução única  $u$  definida em  $\mathbb{R} \times [0, L]$  que pode ser calculada em termos das condições iniciais  $u_0, v_0$  como indicado acima, em resultado da soma da translação de uma função  $p$  para a esquerda e de uma função  $q$  para a direita com velocidade  $c$  e da reflexão com inversão de sinal destas funções na fronteira em  $x=0$  e  $x=L$ .*

*Em consequência, a solução é periódica em  $t$  de período  $2L/c$  e satisfaz  $u(t+L/c, x) = -u(t, L-x)$ , propagando-se sem atenuação, e é dada pela fórmula de d'Alembert (6.6), considerando  $u_0$  e  $v_0$  estendidas a  $\mathbb{R}$  de forma a serem ímpares e periódicas de período  $2L$ .*

Tal como para o problema da secção anterior, é possível mostrar que o problema (6.11) é bem posto no sentido de Hadamard.

## 6.4 Resolução da equação das ondas por separação de variáveis

Um método alternativo de resolver problemas para a equação das ondas é por separação de variáveis. Como primeira ilustração considera-se o problema (6.11) de valor inicial para a equação das ondas num intervalo  $[0, L]$  com condições na fronteira de Dirichlet homogéneas considerado na secção

anterior

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
 (6.14) \quad & u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\
 & u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x),
 \end{aligned}$$

para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in [0, L]$ , onde  $c > 0$  é uma constante e  $u_0, v_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções dadas, com  $u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$ .

A equação diferencial juntamente com as condições na fronteira em (6.14) formam um sistema linear homogêneo no espaço das funções contínuas  $u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  que são  $C^2$  no interior do domínio. Por isso, é natural procurar obter soluções da equação diferencial que satisfazem as condições na fronteira e, depois, obter a solução do problema de valor inicial por uma sobreposição dessas soluções de forma a satisfazer a condição inicial.

Neste caso, o **método de separação de variáveis** consiste em procurar soluções de (6.14) da forma  $u(t, x) = T(t) X(x)$ . Substituindo na equação diferencial obtém-se  $T''(t) X(x) - c^2 T(t) X''(x) = 0$  e, portanto, em pontos onde  $T(t), X(x) \neq 0$  é

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Nesta equação as variáveis  $t, x$  aparecem separadas. O lado esquerdo da equação depende só de  $t$  e o direito só de  $x$ . Para que a equação se verifique para  $(t, x)$  num conjunto aberto conexo e não vazio de  $\mathbb{R}^2$  é necessário que ambos os lados da equação sejam iguais a uma mesma constante  $\sigma$ . Assim, o problema com valor inicial com valores na fronteira (6.14) conduz a

$$\begin{aligned}
 & T''(t) - \sigma c^2 T(t) = 0 \\
 & X''(x) - \sigma X(x) = 0 \\
 (6.15) \quad & X(0) = X(L) = 0 \\
 & T(0) X(x) = u_0(x), \quad T'(0) X(x) = v_0(x),
 \end{aligned}$$

para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in [0, L]$ , onde  $\sigma \in \mathbb{R}$  é uma constante. As equações diferenciais obtidas são equações ordinárias lineares simples de resolver. A segunda equação tem solução geral  $X(x) = c_1 X_1(x) + c_2 X_2(x)$ , sendo necessário considerar três casos:

- (i)  $X_1(x) = 1, X_2(x) = x$ , se  $\sigma = 0$ ;
- (ii)  $X_1(x) = e^{\sqrt{\sigma} x}, X_2(x) = e^{-\sqrt{\sigma} x}$ , se  $\sigma > 0$ ;
- (iii)  $X_1(x) = \cos(\sqrt{-\sigma} x), X_2(x) = \sin(\sqrt{-\sigma} x)$ , se  $\sigma < 0$ .

Destes três casos apenas o último dá soluções não nulas que satisfazem as condições na fronteira  $X(0) = X(L) = 0$  na terceira equação do sistema (??). Estas condições exigem  $c_1 = 0$  e  $c_2 \sin(\sqrt{-\sigma}L) = 0$ , pelo que só se obtêm soluções não nulas para  $\sqrt{-\sigma}L = n\pi$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , e estas são da forma  $X(x) = c_2 \sin(\sqrt{-\sigma}x)$ . Note-se que  $\sqrt{-\sigma} = n\pi/L$  é equivalente a  $\sigma = -n^2\pi^2/L^2$ , pelo que as soluções do problema de valores na fronteira definido pelas segunda e terceira equações do sistema considerado são a forma  $X(x) = c_2 \sin(n\pi x/L)$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

A solução do problema de valor inicial para a 1ª equação em (6.15), com  $\sigma = -n^2\pi^2/L^2$  é

$$T_n(t) = T_n(0) \cos \frac{n\pi ct}{L} + T_n'(0) \frac{L}{n\pi c} \sin \frac{n\pi ct}{L}.$$

Assim, obtêm-se soluções  $u(t, x) = T(t)X(x)$  que são combinações lineares de soluções da forma

$$(6.16) \quad \begin{aligned} u_n(t, x) &= \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ v_n(t, x) &= \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

Para obter soluções deste tipo para o problema (6.14) é preciso que sejam satisfeitas as condições iniciais  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $(\partial u / \partial t)(0, x) = v_0(x)$ . As funções  $u_n, v_n$  satisfazem  $u_n(0, x) = \sin n\pi x/L$ ,  $(\partial u_n / \partial t)(0, x) = 0$ ,  $v_n(0, x) = 0$ ,  $(\partial v_n / \partial t)(0, x) = (n\pi c/L) \sin n\pi x/L$ . No caso em que as condições iniciais  $u_0$  e  $v_0$  são combinações lineares das funções  $u_n$  e  $\partial v_n / \partial t$  avaliadas em  $t=0$ , isto é,

$$(6.17) \quad u_0(x) = \sum_{n=1}^m b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^m b_n^* \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

com  $b_n, b_n^* \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{N}$ , obtém-se para solução do problema de valor inicial considerado (Figura 6.10)

$$(6.18) \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^m \left( b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

A confirmação de que esta função é efectivamente uma solução do problema pode ser feita directamente substituindo esta expressão em (6.14). Note-se que, devido às funções seno e coseno serem periódicas de período  $2\pi$ , as soluções consideradas são periódicas de período  $T = 2L/c$ , embora o período mínimo (no caso de soluções não nulas) possa ser um submúltiplo inteiro de  $T$ , no caso em que os primeiros termos das somas consideradas serem nulos.

Esta foi a forma encontrada para soluções da equação das ondas por Daniel Bernoulli em 1753. É fácil verificar com as fórmulas elementares para o seno e o coseno de somas e diferenças que a solução assim obtida tem a forma da solução de d'Alembert para o mesmo problema referida no teorema (6.13). Na verdade,

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{n=1}^m \left( b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\
&= \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{2} \left( \sin \frac{n\pi(x+ct)}{L} + \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^m \frac{b_n^*}{2} \left( -\cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} + \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\
&= \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds .
\end{aligned}$$

Figura 6.10: Exemplo de solução  $u$  do problema de valor inicial para a equação das ondas (6.14) com posição inicial  $u_0$  da forma 6.17 com gráfico dado na figura e velocidade inicial nula em  $t=0$ , e gráfico da solução sobre a recta  $x=1/8L$

Convém ter a certeza que a solução do problema (6.14) é única. A unicidade de solução foi estabelecida nas secções anteriores com base na solução de d'Alembert. Também é possível obter a unicidade por um método alternativo, nomeadamente considerando a conservação de energia associada ao problema da corda em vibração. Para tal, começa-se por multiplicar a equação diferencial em (6.14) por  $\partial u/\partial t$  e observar que a equação obtida pode ser escrita na forma



$$(6.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0 .$$

Integrando esta equação no retângulo  $[0, \tau] \times [0, L]$ , com  $\tau \in \mathbb{R}$ , e usando as condições na fronteira especificadas em (6.14), obtém-se

$$(6.20) \quad \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} (\tau, x) \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} (\tau, x) \right)^2 \right] dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} (0, x) \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} (0, x) \right)^2 \right] dx = 0 ,$$

onde os dois integrais no lado esquerdo dão a energia total (cinética mais potencial) nos instantes  $\tau$  e  $0$ , respectivamente. Portanto, a energia é constante ao longo do tempo, o que está de acordo com as observações no teorema (6.13) relativas à propagação das condições iniciais por translações de velocidade  $c$  em sentidos opostos e reflexões sucessivas na fronteira com inversão de sinal. Esta lei de conservação da energia permite provar a unicidade da solução do problema. Na verdade, se  $u$  e  $v$  fossem duas soluções,  $u-v$  seria solução do problema com condições iniciais nulas, pelo que a energia inicial seria nula e, portanto, a equação idêntica à anterior que dá o balanço de energia para a solução  $u-v$  daria  $\partial(u-v)/\partial t = \partial(u-v)/\partial x = 0$  em  $\mathbb{R} \times [0, L]$ . Segue-se que  $u-v$  seria constante, e como  $u-v=0$  na fronteira, teria de ser  $u=v$  em  $\mathbb{R} \times [0, L]$ . Este argumento é um exemplo dos **métodos de energia** que têm um amplo âmbito de aplicação em equações diferenciais parciais.

O método de separação de variáveis nada adiantou à resolução do problema considerado pela solução de d'Alembert e aplica-se apenas aos casos particulares em que as condições iniciais  $u_0$  e  $v_0$  são combinações lineares finitas de funções seno, da forma  $x \mapsto \sin n\pi x/L$ , com  $n \in \mathbb{N}$  como nas fórmulas (6.17). Contudo, além de fazer justiça histórica às contribuições alternativas de Euler e d'Alembert por um lado, e de Daniel Bernoulli por outro, este exemplo de separação de variáveis abre o caminho para resolver por separação de variáveis outras equações diferenciais, como a que é objecto da secção seguinte, e mostra que é natural considerar a possibilidade de representar  $u_0$  e  $v_0$  como séries, em vez de combinações lineares finitas, das funções referidas e tentar obter soluções do tipo das anteriores, mas dadas por séries em vez de somas finitas. Somos assim conduzidos a considerar séries de Fourier no capítulo seguinte.

## 6.5 Equações lineares hiperbólicas de 2ª ordem com coeficientes constantes

Como se viu na introdução deste capítulo, uma equação diferencial parcial linear hiperbólica de 2ª ordem com coeficientes constantes e duas variáveis

geral

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial u}{\partial t} + F \frac{\partial u}{\partial x} + G u = H .$$

pode ser transformada com uma mudança de variáveis numa equação da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{D} \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{F} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{G} u = \tilde{H} .$$

Com a mudança de variáveis  $s = x + ct$  e  $y = x - ct$  já usada na secção 6.2 esta equação é transformada numa equação da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} + d \frac{\partial u}{\partial s} + f \frac{\partial u}{\partial y} + g u = h .$$

Por sua vez, com a mudança de variáveis  $u(s, y) = e^{\mu s + \lambda y} v(s, y)$ ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y} + (\mu + d) \frac{\partial v}{\partial s} + (\lambda + f) \frac{\partial v}{\partial y} + (\mu \lambda + d \mu + f \lambda + g) v = e^{-(\mu s + \lambda y)} h .$$

Tomando  $\mu = -d$ ,  $\lambda = -f$   $k(s, y) = e^{-(\mu s + \lambda y)} h(s, y)$ ,  $\sigma = g - df$ , obtém-se

$$(6.21) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y} + \sigma v = k .$$

Esta equação é conhecida por **equação do telégrafo** por ser um modelo de uma linha de transmissão electromagnética com indutância, capacidade e resistência distribuídas.

Pretende-se obter uma fórmula para a solução geral desta equação, o que invertendo as sucessivas mudanças de variáveis acima consideradas permite resolver uma equação hiperbólica de coeficientes constantes geral.

Supondo que as funções  $v, w$  são  $C^2$  e considerando o operador diferencial  $L(v) = \partial^2 v / \partial s \partial y + \sigma v$ , verifica-se

$$\begin{aligned} w L(v) - v L(w) &= w \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y} - v \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial y} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left( w \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} v \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial w}{\partial s} v \right) . \end{aligned}$$

Portanto  $w L[v] - v L[w]$  é a divergência de um campo vectorial, pelo que o Teorema de Green<sup>4</sup> aplicado a um domínio regular<sup>5</sup> com cantos  $D$  em cujo

<sup>4</sup>Green, George (1793-1841).

<sup>5</sup>Chama-se **domínio regular** em  $\mathbb{R}^n$  a um conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  cuja fronteira  $\partial D$  é uma variedade diferencial compacta de dimensão  $n - 1$  tal que  $\partial D = \bar{\partial D}$ . Chama-se **domínio regular com cantos** em  $\mathbb{R}^n$  a um conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  limitado tal que  $D = \text{int } \bar{D}$  e  $\partial D = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup B$ , onde para cada  $A_j$  existe um conjunto aberto  $U_j \subset \mathbb{R}^n$  com  $A_j = \partial D \cap U_j$ ,  $\partial D \cap \bar{U}_j$  é um subconjunto de uma variedade diferencial  $M_j$  de dimensão  $n - 1$  mergulhada em  $\mathbb{R}^n$ , e  $B$  é um conjunto compacto contido numa união finita de variedades diferenciais de dimensão  $n - 2$  mergulhadas em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $(\partial D \cap \bar{U}_j) \cap \partial D \cap \bar{U}_m \subset B$  para  $j \neq m$ . Ver, por exemplo, o livro do autor *Integrais em Variedades e Aplicações*, Texto Editora, 1993.

fecho  $v, w$  é  $C^2$  dá

$$\iint_D (w L[v] - v L[w]) = \frac{1}{2} \oint \mathbf{B}[v, w] \cdot d\gamma,$$

onde  $\gamma$  é um caminho seccionalmente regular que descreve a fronteira de  $D$  no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e se considera o campo vectorial

$$\mathbf{B}[v, w] = \left( -\frac{\partial}{\partial s}(wv) + 2 \frac{\partial w}{\partial s} v, \frac{\partial(wv)}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} v \right).$$

Para determinar uma expressão para o valor num ponto  $C = (t, x)$  da solução geral da equação diferencial (6.21), considera-se  $D$  o subconjunto do domínio de dependência do ponto  $C$  delimitado por uma transversal às projecções características que passam por este ponto onde se podem considerar dados para um problema de Cauchy para a equação. As projecções características da equação diferencial (6.21) são as rectas paralelas aos eixos coordenados. Considera-se uma transversal às características que passam pelo ponto  $C$  que seja o gráfico de uma função  $C^1$  de  $t$  para  $x$  decrescente que passa por baixo do ponto  $C$ , e portanto o domínio  $D$  é o conjunto delimitado pelos segmentos das projecções características que passam por  $C$  e pelo arco da transversal considerada. Portanto, o caminho seccionalmente regular  $\gamma$  que descreve a fronteira de  $D$  no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio percorre os referidos segmentos das projecções características e o arco da transversal a estas projecções como indicado na Figura 6.11.

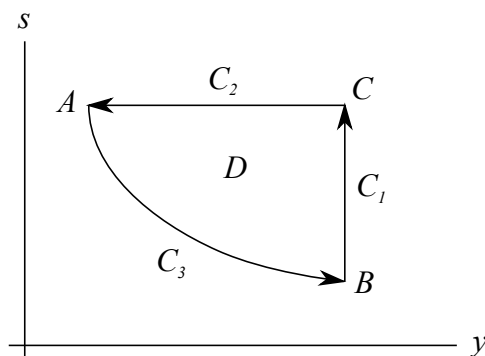


Figura 6.11: Domínio  $D$  e caminho  $\gamma$  definido por segmentos de projecções características e um arco de uma transversal a estas projecções para aplicação do Teorema de Green

Como se pretende uma fórmula para a solução geral  $v$  da equação (6.21), tem de ser  $L[v] = h$ . Se  $w$  for uma solução arbitrária da equação  $L[w] = 0$ , a

fórmula obtida acima com o Teorema de Green dá

$$\iint_D wh = \frac{1}{2} [w(C)v(C) - w(B)v(B)] - \int_{C_1} \frac{\partial w}{\partial y} v dy - \frac{1}{2} [w(A)v(A) - w(C)v(C)] + \int_{C_2} \frac{\partial w}{\partial s} v ds + \int_{C_3} \mathbf{B}[v, w] \cdot d\tilde{\gamma},$$

onde  $C_1$  é o segmento da projecção característica vertical que passa em  $C$  considerado desde o ponto  $B$  em que intersecta a transversal indicada até  $C$ ,  $C_2$  é o segmento da projecção característica desde  $C$  até ao ponto  $A$  da sua intersecção com a transversal, e  $C_3$  é o arco da transversal de  $A$  a  $B$  (Figura 6.11). Portanto, podemos obter uma fórmula para o valor  $v(C)$  da solução da equação diferencial (6.21), considerando  $w$  na fórmula anterior igual à solução da equação  $L[w] = 0$  que satisfaz a condição  $w(C) = 1$  e  $\partial w/\partial s = 0$  sobre  $C_1$ ,  $\partial w/\partial y = 0$  sobre  $C_2$  de forma a estes termos se anularem. Designamos por  $\mathfrak{R}((s, y); C)$  esta solução de  $L[w] = 0$ , a que se chama **função de Riemann** da equação diferencial. Em termos desta função, o valor  $v(C)$  da solução da equação diferencial (6.21) é dado por

$$(6.22) \quad v(C) = \frac{1}{2} \mathfrak{R}(A; C) v(A) + \frac{1}{2} \mathfrak{R}(B; C) v(B) - \int_{C_3} \mathbf{B}[v, \mathfrak{R}(\cdot; C)] + \iint_D \mathfrak{R}(\cdot; C) k.$$

Para obter uma fórmula mais explícita para a solução, vamos calcular a função de Riemann da equação considerada. Para isso precisamos de resolver a equação diferencial  $\partial^2 w/(\partial s \partial y) + \sigma w = 0$  com a condição  $w = 1$  sobre os segmentos das projecções características  $C_1$  e  $C_2$ . Procuramos soluções da forma  $w(s, y) = \varphi((s-t)(y-x))$ , onde  $(t, x) = C$ , com  $w(0, 0) = w(C) = 1$ . Uma função  $w$  desta forma com  $w(C) = 1$  satisfaz automaticamente  $w = 1$  nos segmentos das projecções características  $C_1$  e  $C_2$  e, portanto, também as condições neles especificadas para a função de Riemann, nomeadamente  $\partial w/\partial s = 0$  e  $\partial w/\partial y = 0$ . A função  $w$  satisfaz a equação diferencial parcial considerada se e só se a função  $\varphi$  satisfaz a equação diferencial ordinária

$$(s-t)(y-x) \varphi''((s-t)(y-x)) + \varphi'((s-t)(y-x)) + \sigma \varphi((s-t)(y-x)) = 0,$$

ou seja, para  $(s-t)(y-x)$  poder variar num intervalo  $\varphi$  satisfaz o problema de valor inicial

$$\tau \varphi''(\tau) + \varphi'(\tau) + \sigma \varphi(\tau) = 0, \quad \varphi(0) = 1.$$

Com a mudança de variáveis  $\psi(\xi) = \varphi(\xi^2/(4\sigma))$ , o problema de valor inicial anterior é transformado no seguinte

$$\xi^2 \psi''(\xi) + \xi \psi'(\xi) + \xi^2 \psi(\xi) = 0, \quad \psi(0) = 1.$$

Esta é a **equação**<sup>6</sup> de **Bessel**<sup>7</sup> de ordem 0. Vamos procurar obter uma solução deste problema como soma de uma série de potências  $\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ . A condição  $\psi = 1$  equivale a  $c_0 = 1$ . Derivando a série uma e duas vezes termo a termo obtém-se, respectivamente,  $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n \xi^{n-1}$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n \xi^{n-2}$ . Em subconjuntos compactos dos respectivos intervalos de convergência, as séries convergem uniformemente para as correspondentes derivadas de  $\psi$ . Portanto, para  $\xi$  num intervalo compacto contido nos intervalos de convergência das duas séries temos

$$\xi^2 \psi''(\xi) + \xi \psi'(\xi) + \xi^2 \psi(\xi) = \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)c_n + n c_n + c_{n-2}) \xi^n + c_1 \xi,$$

pelo que os coeficientes de séries para funções  $\psi$  que satisfazem a equação diferencial têm de verificar  $c_1 = 0$  e  $n(n-1)c_n + n c_n + c_{n-2} = 0$ , ou seja  $c_n = -c_{n-2}/n^2$ . Logo  $c_{2j-1} = 0$  e  $c_{2j} = (-1)^j / (2j!)^2$  para  $j \in \mathbb{N}$ . Portanto, a candidata a solução do problema de valor inicial acima é  $\psi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \xi^{2j} / (2j!)^2$ . O teste da razão aplicado à série dos valores absolutos dos termos que se obtém derivando duas vezes esta série termo a termo dá para a razão de coeficientes consecutivos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{(2j+2)(2j+1) \xi^{2j} / [2(j+1)!]^2}{(2j)(2j-1) \xi^{2(j-1)} / [2j!]^2} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{(2j+1) \xi^2}{j(2j-1)(j+1)} = 0.$$

Logo, as séries consideradas para  $\psi''$ ,  $\psi'$  e  $\psi$  são absolutamente convergentes em todo  $\mathbb{R}$  e uniformemente convergentes em todos os intervalos compactos, pelo que as fórmulas obtidas para candidatas a derivadas de  $\psi$  são efectivamente as suas derivadas e esta função satisfaz a equação diferencial ordinária considerada. Esta solução da equação de Bessel de ordem zero chama-se **função de Bessel de ordem zero** do primeiro tipo e designa-se por  $J_0$ . Conclui-se que a função de Riemann da equação diferencial (6.21) é

$$\mathfrak{R}((s, y); (t, x)) = J_0 \left( 2\sqrt{\sigma(s-t)(y-x)} \right).$$

Com a fórmula que acabámos de obter para a função de Riemann da equação diferencial (6.21), a fórmula (6.22) dá a expressão seguinte para a solução geral  $u$  dessa equação

$$v(t, x) = \frac{p(0)+q(0)}{2} J_0 \left( 2\sqrt{\sigma t x} \right) + \int_0^t p'(s) J_0 \left( 2\sqrt{\sigma(t-s)y} \right) ds \\ + \int_0^x q'(y) J_0 \left( 2\sqrt{\sigma t(x-y)} \right) dy + \iint_D J_0 \left( 2\sqrt{\sigma(t-s)(x-y)} \right) k(s, y) ds dy,$$

<sup>6</sup>A equação de Bessel de ordem  $\alpha$  é  $\xi^2 y''(\xi) + \xi y'(\xi) + (\xi^2 - \alpha^2)y = 0$ . As suas soluções são as funções de Bessel. São usadas em problemas de vibração de membranas com simetria circular, condução do calor e propagação de ondas electromagnéticas com simetria circular ou cilíndrica. Também são úteis em teoria analítica dos números.

<sup>7</sup>Bessel, Friedrich Wilhelm (1784-1842).

onde  $p$  e  $q$  são funções  $C^2$  arbitrárias.

O caso da equação das ondas não homogénea para uma corda infinita considerado na secção 6.2 corresponde à equação (6.21) com  $\sigma=0$ , pelo que a fórmula que se acabou de obter dá para esse caso

$$v(t, x) = \left( p(t) - \frac{p(0)}{2} \right) + \left( q(x) - \frac{q(0)}{2} \right) + \iint_D k.$$

em concordância com a expressão da solução geral da solução obtida no início deste capítulo para a equação das ondas para coordenadas escolhidas com eixos coordenados paralelos às projecções características. Determinando  $p$  e  $q$  em termos das condições iniciais e observando que  $D$  é o domínio de dependência da solução no ponto  $(t, x)$  obtém-se a solução de d'Alembert.

O método aqui apresentado, com a utilização da função de Riemann para a equação diferencial, pode ser estendido de forma a aplicar-se a equações quasilineares hiperbólicas de 2ª ordem.

## 6.6 Notas históricas

A classificação das equações diferenciais parciais de 2ª ordem com duas variáveis em equações hiperbólicas, elípticas e parabólicas foi feita por P. Du Bois-Reymond em 1889.

As primeiras tentativas de resolução da equação das ondas são de d'Alembert em 1747, Euler em 1748 e Daniel Bernoulli em 1753. Os dois primeiros chegaram à conclusão que as soluções deveriam ser a sobreposição da propagação de duas funções em sentidos opostos com velocidades iguais. Em contraste com d'Alembert, D. Bernoulli representou as soluções por séries trigonométricas, em 1751-1753, antecipando a possibilidade de utilização de séries de Fourier em situações muito gerais.

As ideias básicas para equações hiperbólicas de ondas foram desenvolvidas para a dinâmica de gases por S. Poisson em 1807, G.G. Stokes em 1848, B. Riemann<sup>8</sup> em 1858. Stokes iniciou o estudo de ondas de água em 1847. Em 1860 B. Riemann resolveu a equação diferencial parcial hiperbólica de 2ª ordem com duas variáveis geral. A exposição na secção anterior é o caso particular do método desenvolvido por Riemann aplicado a equações com coeficientes constantes.

F.W. Bessel desenvolveu em detalhe as funções de Bessel em 1824 para estudar perturbações do movimento de planetas causadas por movimentos de rotação de outros planetas, mas estas funções já tinham sido consideradas por Jacob Bernoulli, Daniel Bernoulli, L. Euler e J.-L. Lagrange no contexto da hidrodinâmica em situações com simetria circular ou cilíndrica.

---

<sup>8</sup>Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826-1866).