Capítulo 5

Equações diferenciais parciais de 1^{a} ordem – Método das características

5.1 Introdução

As equações diferenciais parciais são as equações diferenciais em que a função incógnita depende de mais de uma variável e, portanto, envolvem derivadas parciais da incógnita. O caso mais simples é o de equações escalares com duas variáveis e de primeira ordem. Neste capítulo consideramos equações lineares deste tipo e também equações quasilineares. As equações diferenciais quasilineares são as que são lineares nas derivadas de maior ordem da função incógnita que aparecem na equação, podendo não ser lineares em derivadas de ordens inferiores ou nos valores dessa função.

A resolução de ambos os casos baseia-se no Método das Características que, em condições bastante gerais, permite reduzir a resolução destas equações diferenciais parciais à de equações diferenciais ordinárias. O método pode ser estendido de forma natural a equações de 1^{a} ordem com mais variáveis, tanto lineares como quasilineares, e também pode ser estendido para se aplicar à resolução de equações diferenciais parciais escalares de 1^{a} ordem não lineares bastante gerais. Usamos aqui a expressão "resolver uma equação diferencial parcial" no sentido de a reduzir à resolução de equações diferenciais ordinárias. Já se sabe dos capítulos anteriores que as equações diferenciais ordinárias que podem ser resolvidas, mesmo obtendo apenas equações implícitas para as soluções em termos de funções elementares, formam uma classe bastante restrita, pelo que o mesmo acontece para equações diferenciais parciais não lineares.

5.2 Equações lineares de 1ª ordem em duas variáveis

Uma **equação diferencial parcial linear de 1ª ordem em duas variáveis** é da forma

$$a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u = d(x,y)\,, \tag{5.1}$$

onde a, b, c, d são funções com valores reais definidas num subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Uma função $u\colon S \to \mathbb{R}$, com S sendo um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ onde as funções a, b, c, d estão definidas e são contínuas, é **solução** da equação diferencial (5.1) se é C^1 em S e satisfaz a equação em todos os pontos $(x,y)\in S$.

Antes de avançar para a resolução da equação convém interpretar geometricamente as condições que impõe às soluções. A equação pode ser escrita em termos do produto interno euclidiano de vectores na forma $(a, b, d-cu)\cdot(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, -1)=0$, pelo que corresponde a especificar a ortogonalidade dos vectores $(a, b, d-cu)$ e $(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, -1)$ em cada ponto $(x,y)\in S$. Obviamente, em cada ponto apenas importa a direcção de $(a, b, d-cu)$ nesse ponto, pelo que é chamada **direcção característica** da equação (5.1). O gráfico de uma solução u é uma superfície em $S\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação cartesiana $u(x,y)-z=0$, pelo que em cada ponto é tangente ao plano ortogonal ao vector $(\nabla u, -1)=(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, -1)$ e este plano contém a recta que passa no ponto com a direcção característica $(a, b, d-cu)$ (Figura 5.1). Logo, resolver a equação (5.1) corresponde geometricamente a determinar superfícies tangentes ao campo de direcções características, i.e., ao campo definido em cada ponto $(x,y,u)\in S\times\mathbb{R}$ por $(a, b, d-cu)(x,y)$, como resolver uma equação diferencial ordinária corresponde geometricamente a determinar curvas tangentes ao campo de direcções da equação.

Para obter um método de resolução da equação dada consideramos primeiro o caso particular em que $c=d=0$

$$a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,. \tag{5.2}$$

Neste caso a direcção característica é em cada ponto a do vector $(a, b, 0)$ nesse ponto, pelo que neste caso particular a equação corresponde à ortogonalidade dos vectores (a, b) e $\nabla u=(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$ em cada ponto de $S\subset\mathbb{R}^2$. Em pontos onde $\nabla u\neq 0$ este vector é perpendicular às curvas de nível de u contidas em S que passam nesses pontos, pelo que estas têm nesses pontos tangentes com a direcção de (a, b). Assim, resolver a equação diferencial num conjunto S onde $\nabla u\neq 0$ corresponde a calcular funções definidas em S cujas curvas de nível sejam tangentes ao vector (a, b) em cada ponto. Em

Figura 5.1: Direcção característica, e normal e plano tangente ao gráfico de solução da equação

consequência, uma ideia natural para resolver a equação é calcular caminhos que representam linhas de nível da solução resolvendo a equação diferencial ordinária $(X', Y') = (a, b)$. Se a união destas curvas de nível contém todo o conjunto S, a solução da equação diferencial ficará conhecida em S sabendo apenas o valor que tem em um ponto de cada uma das diferentes curvas de nível, o que, em particular, poderá ser especificado dando valores que a solução tem de assumir sobre uma curva transversal às curvas de nível obtidas. Esta é a ideia do **método das características** para resolver a equação diferencial parcial (5.2). Este método reduz a resolução da equação diferencial parcial à resolução de equações diferenciais ordinárias associadas.

Assim, seja (X, Y) um caminho regular em S definido num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaz a equação diferencial ordinária de 1ª ordem

$$\dot{X} = a\,(X(t), Y(t)) \ , \qquad \dot{Y} = b\,(X(t), Y(t)) \ . \tag{5.3}$$

Os valores de uma solução da equação diferencial parcial (5.2) sobre o caminho (X, Y) são dados em função do parâmetro $t \in I$ por $U = u \circ (X, Y)$. Com a regra de derivação da função composta obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\,(X(t), Y(t))\,\dot{X}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\,(X(t), Y(t))\,\dot{Y}(t)\\ &= a\,(X(t), Y(t))\,\frac{\partial u}{\partial x}\,(X(t), Y(t)) + b\,(X(t), Y(t))\,\frac{\partial u}{\partial y}\,(X(t), Y(t)) \ .\end{aligned}$$

Resulta da equação (5.2) que U satisfaz a equação diferencial ordinária $\dot{U} = 0$ e, portanto, é constante sobre a curva descrita pelo caminho (X, Y), como se esperava. Deste modo, a resolução da equação diferencial parcial (5.2) é reduzida à resolução da equação diferencial ordinária de 1ª ordem (5.3) que dá curvas de nível da solução da equação diferencial parcial. Em alguns casos de interesse esta equação diferencial ordinária pode ser resolvida com os métodos obtidos nos capítulos anteriores. Mais geralmente, o Teorema de Picard-Lindelöf garante que se a e b forem localmente lipschitzianas em S cada problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária obtida, com $(X(0), Y(0)) = (x_0, y_0) \in S$, tem solução local única. Sobre o caminho (X, Y) que passa pelo ponto (x_0, y_0) a solução da equação diferencial parcial tem valor constante igual a $u(x_0, y_0)$, pelo que se chama à correspondente curva $t \mapsto (X(t), Y(t), u(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ descrita no gráfico da solução u curva **característica**, e à sua projecção no plano xy descrita pelo caminho (X, Y) **projecção característica**, da equação diferencial parcial (5.2) (Figura 5.2).

Figura 5.2: Características, projecções características, curva de valores iniciais e gráfico de solução para uma equação do tipo 5.2. As projecções características são tangentes em cada ponto (x, y) ao vector $(a(x, y), b(x, y))$, onde a e b são as funções na equação

Como habitualmente, em geral a equação diferencial considerada tem infinitas soluções, embora todas com as mesmas curvas de nível dadas pelas projecções características da equação diferencial. Para determinar problemas com solução local única podemos especificar os valores iniciais sobre uma curva regular em S que intersecte transversalmente as projecções características, isto é, tal que as correspondentes tangentes em cada ponto não sejam colineares (Figura 5.2). A este tipo de problema chama-se **Problema de Cauchy** para a equação diferencial parcial e chama-se a uma condição que especifica os valores da solução sobre uma transversal às projecções características **Condição de Cauchy** para a equação diferencial. Como vimos, as tangentes às projecções características em cada ponto (x, y) têm a direcção do vector $(a(x, y),\, b(x, y)) \neq 0$, pelo que se $\gamma = (\alpha, \beta)$ é um caminho regular definido num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ que descreve uma curva em S, a transversalidade às projecções características da equação diferencial corresponde à independência linear dos pares de vectores de $\mathbb{R}^2$ que são os valores de (α', β') e $(a \circ \gamma,\, b \circ \gamma)$ em cada ponto de J. Portanto, a **condição de transversalidade** entre o caminho regular $\gamma = (\alpha, \beta)$ e as projecções características da equação diferencial parcial (5.2) é

(5.4) $$(a \circ \gamma)\beta' \neq (b \circ \gamma)\alpha' \quad \text{em } J\,.$$

(5.5) **Exemplos:**

1. Considera-se a equação diferencial $\partial u/\partial t + c\,\partial u/\partial x = 0$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. As projecções características da equação são descritas por caminhos (T, X) que são soluções da equação diferencial ordinária $\dot{T} = 1,\ \dot{X} = c$, cuja solução geral é $T(s) = s + k_1,\ X(s) = cs + k_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. As soluções da equação dada são constantes sobre as projecções características, as quais têm equações cartesianas $x = ct + k_2 - ck_1$ (Figura 5.3).

Figura 5.3: Projecções características, curva de valores iniciais e exemplo de solução para o problema de Cauchy $\partial u/\partial t + c\,\partial u/\partial x = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$

Um Problema de Cauchy para a equação pode ser especificado pelos valores da solução numa curva transversal às projecções características. Uma das curvas transversais é o eixo dos xx. Especificando a solução sobre este eixo por $u(0, x) = u_0(x)$, onde $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função C^1 dada, obtém-se um Problema de Cauchy para a equação diferencial dada cuja solução é a função u constante sobre as projecções características acima determinadas.

A projecção característica da equação que passa por $(0, x_0)$ é a recta com equação cartesiana $x = ct + x_0$ e sobre esta recta a solução da equação diferencial dada tem o valor constante $u(t, ct+x_0) = u_0(x_0)$. Portanto, a solução do Problema de Cauchy $\partial u/\partial t + c\, \partial u/\partial x = 0$, $u(0, x) = u_0(x)$, é $u(t, x) = u_0(x - ct)$. Se t designa tempo, a solução da equação corresponde à propagação do gráfico da função u_0 no sentido positivo de x com velocidade constante c (Figura 5.3).

Figura 5.4: Projecções características, curva de valores iniciais e exemplo de solução para o problema de Cauchy $x\, \partial u/\partial x + y\, \partial u/\partial y = 0$, $u(x, 1) = u_0(x)$

2. Considera-se a equação diferencial parcial $x\, \partial u/\partial x + y\, \partial u/\partial y = 0$. A equação é singular na origem, isto é, não há transversais às projecções características da equação a passarem pela origem. Estas projecções características são descritas por caminhos que são soluções da equação diferencial ordinária $\dot{X} = x$, $\dot{Y} = y$, cuja solução geral é $X(t) = k_1 e^t$, $Y(t) = k_2 e^t$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Portanto, as projecções características da equação dada têm equações cartesianas $y = (k_2/k_1)x$, se $k_1 \neq 0$, $x = 0$ e $y > 0$ se $k_2 > 0$, $x = 0$ e $y < 0$ se $k_2 < 0$ (Figura 5.4).

   Considera-se o Problema de Cauchy para a equação diferencial dada com condições sobre a transversal às projecções características com equação cartesiana $y = 1$, onde se especifica o valor da solução $u(x, 1) = u_0(x)$ por uma função u_0 que é C^1 em $\mathbb{R}$. Como a solução u é constante sobre as projecções características, $u(x, cx) = u_0(1/c)$ se $x, c \neq 0$, e $u(0, y) = u_0(0)$ se $y > 0$. Portanto, a solução do Problema de Cauchy $x\, \partial u/\partial x + y\, \partial u/\partial y = 0$, $u(x, 1) = u_0(x)$, é $u(x, y) = u_0(x/y)$ para $x \in \mathbb{R}, y > 0$ (Figura 5.4).

No caso da equação linear de 1ª ordem em duas variáveis geral considerada em (5.1) pode-se proceder de forma análoga. As projecções características da equação são as mesmas. Porém, a função $U=u\circ(X,Y)$ que dá os valores de uma solução sobre a projecção característica representada pelo caminho (X,Y) solução da equação (5.3) com valor inicial $(X(0),Y(0))=(x_0,y_0)$, em vez de $\dot U=0$, satisfaz $\dot U=-c\,(X(t),Y(t))\,U+d\,(X(t),Y(t))$. A solução do problema de valor inicial desta equação diferencial linear ordinária com $U(0)=u_0(x_0,y_0)$ é

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{-\int_0^t c(X(s),Y(s))\,ds}u_0(x_0,y_0) \\ &\qquad + \int_0^t e^{-\int_s^t c(X(\tau),Y(\tau))\,d\tau} d\,(X(s),Y(s))\;ds\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Os argumentos anteriores estabelecem o resultado seguinte[1].

(5.7) **Teorema:** *Seja $S\subset\mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $a,b:S\to\mathbb{R}$ funções localmente lipschitzianas em S, $c,d:s\to\mathbb{R}$ funções contínuas em S, γ^* uma curva regular em S descrita por um caminho regular $\gamma=(\alpha,\beta)$ em S definido num intervalo aberto $J\subset\mathbb{R}$, e u_0 uma função C^1 na curva γ^* e com valores em $\mathbb{R}$. Se a condição de transversalidade (5.4) entre o caminho γ e as projecções características da equação diferencial parcial linear de 1ª ordem (5.1) é satisfeita, então o Problema de Cauchy para esta equação diferencial com a Condição de Cauchy $u=u_0$ na curva γ^* tem solução local única, isto é, existe numa vizinhança V da curva $\gamma^*\subset S$ tal que o problema tem uma solução única definida em V.*

Cada ponto $(x,y)\in V$ pertence a uma e só uma projecção característica da equação diferencial, que é descrita pelo caminho (X,Y) solução da equação diferencial ordinária (5.3) com $(X(0),Y(0))=(x_0,y_0)$. O valor $u(x,y)$ da solução neste ponto é igual a $U(t)$, onde U é a função em (5.6) e t é tal que $(X(t),Y(t))=(x,y)$. A correspondente característica da equação dada é a curva $t\mapsto(X(t),Y(t),U(t))$.

No caso de equações lineares homogéneas, em que $c=d=0$, e, portanto, da forma (5.2), as soluções são constantes sobre as projecções características (Figura 5.2).

(5.8) **Exemplo:** Considera-se a equação diferencial $x\,\partial u/\partial x+y\,\partial u/\partial y=cu$, onde $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ é uma constante (o caso $c=0$ foi considerado no exemplo

[1] Como a solução do problema de Cauchy é obtida a partir de soluções de equações diferenciais ordinárias, podem ser estabelecidas do teorema de dependência contínua de soluções destas equações nas condições iniciais e nos parâmetros propriedades análogas para a equação diferencial parcial considerada, concluindo-se que o problema de Cauchy para equações diferenciais parciais lineares de 1ª ordem é bem posto no sentido de Hadamard sob condições gerais de continuidade dos coeficientes da equação e convergência uniforme em conjuntos compactos das funções envolvidas.

anterior. As projecções características desta equação são as mesmas da equação desse exemplo. Portanto, têm equações cartesianas *(i)* $y = kx$ com $k \in \mathbb{R}$, *(ii)* $x = 0$ e $y > 0$, *(iii)* $x = 0$ e $y < 0$ (Figura 5.4).

Tal como no exemplo anterior, considera-se o Problema de Cauchy para a equação dada com condições sobre a transversal às projecções características que tem equação cartesiana $y = 1$, onde se especifica o valor da solução $u(x, 1) = u_0(x)$ por uma função u_0 que é C^1 em $\mathbb{R}$. A projecção característica com equação cartesiana $y = kx$ que intersecta a transversal $y = 1$ é representada pelo caminho definido por $(X(t), Y(t)) = (t, kt)$ com $kt > 0$. Os valores da solução u sobre esta característica são dados pela função $U = u \circ (X, Y)$ que satisfaz a equação diferencial $\dot{U} = (c/t)U$ e a condição inicial $U(1/k) = u_0(1/k)$, cuja solução é

$$U(t) = e^{\int_{1/k}^{t} c/s \, ds} u_0(1/k) = e^{c \ln kt} u_0(1/k) = (kt)^c u_0(1/k) \; .$$

Portanto, a solução do Problema de Cauchy satisfaz $u(t, kt) = (kt)^c u_0(1/k)$, para $kt > 0$. A projecção característica com equação cartesiana $x = 0$ que intersecta a transversal de equação $y = 1$ é representada pelo caminho definido por $(X(t), Y(t)) = (0, t)$ com $t > 0$. Os valores da solução u sobre esta característica são dados pela função $U = u \circ (X, Y)$ que satisfaz a equação diferencial $\dot{U} = (c/t)U$ e a condição inicial $U(1) = u_0(0)$, cuja solução é $U(t) = t^c u_0(0)$. Portanto, a solução do Problema de Cauchy satisfaz $u(0, t) = t^c u_0(0)$, para $t > 0$. Em conclusão, a solução do Problema de Cauchy em $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ definido por $x \, \partial u/\partial x + y \, \partial u/\partial y = c \, u$, $u(x, 1) = u_0(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, onde $c \neq 0$, é $u(x, y) = y^c u_0(x/y)$. Esta função satisfaz $u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^c u(x, y)$ para todo $\lambda > 0$, pelo que é uma **função homogénea** de grau c.

A circunferência de raio 1 com centro na origem é transversal a todas as projecções características da equação diferencial parcial dada, pelo que podemos considerar o Problema de Cauchy para esta equação com condições sobre a circunferência referida. É natural adoptar coordenadas polares e especificar as condições sobre a circunferência na forma $u(\cos\theta, \cos\theta) = u_0(\theta)$, onde u_0 é uma função C^1 periódica de período 2π. Em coordenadas polares, cada projecção característica da equação dada tem equação $\theta = k$ com $k \in [0, 2\pi[$ constante, pelo que é descrita pelo caminho definido por $(X(r), Y(r)) = (r \, \cos\theta, r \, \sin\theta)$ para $r > 0$.

Os valores de u sobre esta característica são dados pela função $U = u \circ (X, Y)$ que satisfaz a equação diferencial $\dot{U} = (c/r)U$ e a condição inicial $U(1) = u_0(\theta)$, cuja solução é $U(r) = r^c u_0(\theta)$. Portanto, a solução do Problema de Cauchy satisfaz $u(r \, \cos\theta, \, r \, \sin\theta) = r^c u_0(\theta)$, para $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Em conclusão, a solução do Problema de Cauchy em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ definido por $x \, \partial u/\partial x + y \, \partial u/\partial y = c \, u$, $u(\cos\theta, \cos\theta) = u_0(\theta)$ para $\theta \in [0, 2\pi[$, onde $c \neq 0$, é $u(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{c/2} u_0\left(\Theta(x, y)\right)$, onde $\Theta(x, y)$ é o argumento $\theta \in [0, 2\pi[$ de $(x, y) \neq 0$. Esta função é homogénea de grau c em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ (Figura 5.5).

Figura 5.5: Projecções características, curva de valores iniciais e exemplos de soluções para o Problema de Cauchy $x\,\partial u/\partial x + y\,\partial u/\partial y = c\,u$, $u(\cos\theta, \sin\theta) = u_0(\theta)$ para $\theta \in [0, 2\pi[$, com $c>0$ e $c<0$

Se $c > 1$, apesar de não haver transversais às projecções características da equação a passarem na origem, a solução do último Problema de Cauchy considerado pode ser estendida por continuidade à origem definindo-a igual a zero nesse ponto, dado que neste caso a função assim definida é C^1 em $\mathbb{R}^2$ e também satisfaz a equação diferencial dada na origem. Se $0 < c \leq 1$ a solução do Problema de Cauchy pode ser estendida à origem por continuidade, mas não é C^1 na origem a não ser que seja nula em todo $\mathbb{R}^2$. Se $c < 0$ sobre projecções características onde não é identicamente nula a solução tende na origem para ∞ e, portanto, só pode ser estendida à origem de forma a ser C^1 se for identicamente nula.

Concluiu-se das observações anteriores que a equação diferencial parcial $x\,\partial u/\partial x + y\,\partial u/\partial y = cu$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qualquer que seja $c \neq 0$, assim como em $\mathbb{R}^2$ se $c > 1$, mas tem uma única solução em $\mathbb{R}^2$ ou em qualquer outro conjunto em estrela[2] em relação à origem se $c \leq 1$,

[2] Diz-se que $S \subset \mathbb{R}^n$ é um **conjunto em estrela** em relação a um ponto $\mathbf{p} \in S$ se contém todos os segmentos de recta com extremidades em $\mathbf{p}$ e em qualquer outro ponto de S.

designadamente a solução igual a zero.

Recorda-se aqui que tinha sido observado no Capítulo 1, a propósito do cálculo de factores de integração de equações diferenciais ordinárias escalares de 1ª ordem do tipo $M(t,y)+N(t,y)\,\dot{y}=0$, com M e N funções C^1 num conjunto aberto simplesmente conexo $S\subset\mathbb{R}^2$, que uma função μ com valores em $\mathbb{R}$ que não se anula e é C^1 em S é um factor de integração da equação diferencial considerada se e só se satisfaz a equação diferencial parcial (**??**), aqui repetida:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial t}N+\mu\frac{\partial N}{\partial t}\ . \tag{5.9}$$

Esta equação é da forma (5.1), com a variável x igual a t, $a=N$, $b=-M$, $c=\partial N/\partial t-\partial M/\partial y$ e $d=0$. O teorema anterior permite resolver esta equação diferencial parcial para obter factores de integração μ, embora o cálculo possa ser difícil pois requer resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem do tipo (5.3) que podem ser difíceis de resolver. Contudo, em casos em que seja possível calcular soluções de (5.9) por aplicação do teorema anterior, obtêm-se factores de integração para a equação diferencial ordinária considerada.

5.3 Equações quasilineares de 1ª ordem em duas variáveis

Chama-se **equação diferencial quasilinear** a uma equação diferencial linear nas derivadas da incógnita de maior ordem que a equação envolve, mas que pode não ser linear nas derivadas de ordem inferior ou na própria incógnita. Assim, uma **equação diferencial parcial quasilinear de 1ª ordem em duas variáveis** é da forma

$$a(x,y,u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\;+\;b(x,y,u)\,\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u)\ , \tag{5.10}$$

onde a,b,c são funções com valores reais definidas e contínuas num conjunto aberto $D\subset\mathbb{R}^3$. Uma função $u\colon S\to\mathbb{R}$ com gráfico incluído em D e domínio $S\subset\mathbb{R}^2$ aberto é **solução** da equação diferencial (5.1) se é C^1 e satisfaz a equação em todos os pontos $(x,y)\in S$.

O método das características descrito na secção anterior para equações lineares pode ser adaptado para equações quasilineares com pequenas modificações. Na verdade, a equação diferencial ordinária (5.3) para as projecções características no plano xy é agora substituída pela equação diferencial ordinária para as próprias características da equação

$$\dot{X}=a\,(X,Y,Z)\,,\quad \dot{Y}=b\,(X,Y,Z)\,,\quad \dot{Z}=c\,(X,Y,Z)\ . \tag{5.11}$$

O Teorema de Picard-Lindelöf garante que se as funções a, b, c são localmente lipschitzianas em D, então o problema de valor inicial para esta equação com $(X(0), Y(0), Z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ para $(x_0, y_0, z_0) \in D$ tem solução local única. Dados $(x_0, y_0, z_0) \in D$ e uma função u que é C^1 numa vizinhança de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e satisfaz $u(x_0, y_0) = z_0$, designa-se por $(X(t), Y(t), Z(t))$ a solução do problema de valor inicial anterior e define-se $U(t) = u(X(t), Y(t)) - Z(t)$. Da regra de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\dot{X}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\,\dot{Y}(t) - \dot{Z}(t)\\ &= a\,(X(t), Y(t), Z(t))\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,(X(t), Y(t), Z(t))\,\frac{\partial u}{\partial y} - c\,(X(t), Y(t), Z(t))\,.\end{aligned}$$

Portanto, se $u(X(t), Y(t)) = Z(t)$, ou seja $U(t) = 0$, u é solução da equação diferencial parcial dada sobre a projecção característica representada pelo caminho (X, Y) com $u(x_0, y_0) = z_0$. De qualquer forma, U é solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned}\dot{U} = {} & a\,(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)) - U)\,\frac{\partial u}{\partial x}\\ & + b\,(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)) - U)\,\frac{\partial u}{\partial y}\\ & - c\,(X(t), Y(t), u(X(t), Y(t)) - U).\end{aligned} \tag{5.12}$$

com valor inicial $U(0) = 0$. Como a, b, c são localmente lipschitzianas em D, a função no lado direito desta equação é localmente lipschitziana em relação a U numa vizinhança de $(t, U) = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O Teorema de Picard-Lindelöf garante que este problema de valor inicial tem solução local única. A função u satisfaz a equação (5.10) sobre a projecção característica descrita por (X, Y) se e só se $U = 0$ satisfaz a equação diferencial ordinária anterior e, portanto, $Z(t) = u(X(t), Y(t))$. O gráfico da restrição da solução à projecção característica descrita por (X, Y) é a característica da equação (5.10) que passa em (x_0, y_0, z_0), descrita pelo caminho (X, Y, Z). A solução é constante sobre uma projecção característica descrita por (X, Y), i.e. a correspondente característica da equação é horizontal, se e só se $c(X, Y, Z) = 0$.

Conclui-se que para o Problema de Cauchy da equação diferencial parcial quasilinear (5.1) é válido um teorema de existência, unicidade e cálculo de solução semelhante ao teorema da secção anterior e que o contém, dado que o teorema da secção anterior respeita ao caso particular da equação (5.10) desta secção em que a, b são independentes de u, e c é a soma de uma função d independente de u com uma função linear em u, ou seja, $c(x, y, u) = d(x, y) + e(x, y)u$ (a função aqui designada por e é neste caso a função $-c$ da equação (5.1))[3].

[3] Tal como referido a propósito do teorema anterior, o problema de Cauchy para equa-

(5.13) **Teorema:** *Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $a, b, c : D \to \mathbb{R}$ funções localmente lipschitzianas em D, $(x_0, y_0, z_0) \in D$, $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto que contém o ponto (x_0, y_0) e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto tais que $S \times I \subset D$, γ^* uma curva regular em S descrita por um caminho regular $\gamma = (\alpha, \beta)$ em S definido num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$, e u_0 uma função C^1 na curva γ^* com valores em I tal que $u_0(x_0, y_0) = z_0$. Se a condição de transversalidade (5.4) entre o caminho γ e as projecções características da equação (5.10) é satisfeita, então o Problema de Cauchy para esta equação com a condição $u = u_0$ na curva γ^* tem solução local única, isto é, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ da curva γ^* tal que o problema tem uma solução única definida em V.*

Cada ponto $(x, y) \in V$ pertence a uma e só uma projecção característica da equação diferencial, a qual intersecta a curva γ^* num único ponto (α, β) e é descrita pelo caminho (X, Y) tal que (X, Y, Z) é a característica da equação diferencial que satisfaz a equação diferencial ordinária (5.11) e tem o valor inicial $(X(0), Y(0), Z(0)) = (\alpha, \beta, u_0(\alpha, \beta))$. O valor $u(x, y)$ da solução no ponto (x, y) é a componente z do ponto (x, y, z) da característica considerada que se projecta em (x, y), mais explicitamente, é igual a $U(t)$, onde U é a solução da equação diferencial ordinária (5.12) com condição inicial $U(0) = 0$ e t é tal que $(X(t), Y(t)) = (x, y)$.

Os valores da solução do Problema de Cauchy considerado são constantes sobre cada projecção característica, ou seja as correspondentes características que passam em pontos de $\{(x, y, z) \in D : \ (x, y) \in V\}$ são horizontais, se e só se $c = 0$ neste conjunto e, portanto, a equação é uma equação diferencial linear homogénea da forma (5.2).

(5.14) **Exemplo:** Considera-se a equação **equação de Burgers**[4] $u\,\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = 0$, também conhecida por **equação de Euler**. As características são descritas por caminhos (X, Y, Z) que são soluções da equação diferencial ordinária $\dot{X} = Z$, $\dot{Y} = 1$, $\dot{Z} = 0$. A solução geral desta equação é $(X(t), Y(t), Z(t)) = (z_0 t + x_0, t + y_0, z_0)$, onde $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Como Z é constante, as características da equação são horizontais e as projecções características são linhas de nível das soluções.

A condição de transversalidade (5.4) entre um caminho regular $\gamma = (\alpha, \beta)$ em $\mathbb{R}^2$ definido num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e as projecções características da equação dada é $u(\alpha, \beta)\, \beta' \neq \alpha'$ em J. Em particular, o eixo dos xx é representado pelo caminho $(\alpha(s), \beta(s)) = (s, 0)$ que é transversal às

ções diferenciais parciais quasilineares de 1ª ordem é bem posto no sentido de Hadamard em condições gerais de continuidade dos coeficientes da equação e convergência uniforme em conjuntos compactos das funções envolvidas.

[4] Burgers, J. (1895-1981).

projecções características da equação. Para que os caminhos (X, Y, Z) que foram obtidos acima para descreverem as características da equação passem no eixo dos xx no valor do parâmetro $t = 0$ tem de ser $y_0 = 0$. Em consequência, o Problema de Cauchy para a equação dada com condição sobre o eixo dos xx especificada por $u(x, 0) = u_0(x)$, onde u_0 é uma função com valores reais definida e C^1 em $\mathbb{R}$, tem solução local única u. A projecção característica correspondente à característica acima obtida intersecta o eixo dos xx no ponto $(x_0, 0, z_0)$, pelo que $z_0 = u_0(x_0)$. Portanto os valores $u(x, y)$ da solução satisfazem para cada valor do parâmetro t a equação $(u(x, y)t + x_0, t, u_0(x_0)) = (x, y, u(x, y))$, ou seja a solução u satisfaz a equação implícita $u = u_0\,(x - u\,y)$. Apesar de não se ter obtido uma fórmula explícita para a solução considera-se a equação diferencial dada resolvida localmente, como se convencionou em capítulos anteriores.

A projecção característica que intersecta xx em $(x_0, 0)$ satisfaz $x = u_0(x_0)y + x_0$, pelo que é uma recta de declive $1/u_0(x_0)$ se $u_0(x_0) \neq 0$ e é o eixo dos yy se $u_0(x_0) = 0$. Sobre pontos desta recta que pertencem ao domínio de definição da solução esta tem o valor constante $u_0(x_0)$.

No caso em que a variável y é interpretada como tempo, a equação obtida para as características mostra que a evolução da solução corresponde a propagar cada valor $u_0(x_1)$ da condição inicial ao longo da correspondente característica com velocidade igual a esse valor, ou seja, valores mais altos da condição inicial propagam-se com velocidade maior do que valores mais baixos, pelo que valores mais altos tendem a aproximar-se de valores mais baixos que estejam à frente (*i.e.,* com coordenada x maior) e eventualmente a colidir com eles, assim como a afastar-se de valores mais baixos que estejam atrás. Em particular, é de esperar que ao longo de cada característica que passe num ponto onde a derivada da condição inicial seja negativa a derivada parcial $\partial u/\partial x$ decresça com o tempo e convirja para $-\infty$ num certo instante de tempo positivo, e analogamente trocando "negativa" por "positiva", "decresça", por "cresça" $-\infty$ por $+\infty$ e "positivo"por "negativo". Também é de esperar que o primeiro instante depois do inicial em que ocorram colisões deste tipo, com $\partial u/\partial x \to -\infty$, se observe em características de pontos iniciais em que a derivada da condição inicial assuma o mínimo absoluto negativo da derivada da condição inicial u_0,assim como se espera que ao longo de características de pontos iniciais em que a derivada da condição inicial tem um mínimo relativo negativo (em particular em pontos de inflexão da condição inicial onde esta decresce) haja um primeiro instante depois do inicial a partir do qual se verificam colisões do tipo indicado na vizinhança do correspondente ponto da característica. Estas afirmações têm análogos naturais trocando "depois" por "antes", $-\infty$ por $+\infty$, "mínimo" por "máximo" e "negativo" por "positivo".

Mais detalhadamente, se a função u_0 que especifica a Condição de Cauchy sobre o eixo dos xx assume valores diferentes em pontos $x_1,\ x_2$, então as correspondentes projecções características intersectam-se num ponto (x, y)

com ordenada $y=(x_2-x_1)\,/\,(u_0(x_1)-u_0(x_2))$. A solução não pode ser estendida a um conjunto que inclua intersecções de projecções características porque sobre elas teria de assumir valores constantes diferentes (Figura 5.6). Esta situação só não ocorre quando a Condição de Cauchy é dada por uma função constante $u_0(x)=k$, caso em que a solução é constante $u=k$ em $\mathbb{R}^2$.

As derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ da solução u sobre a projecção característica com equação cartesiana $x=u_0(x_0)y+x_0$ podem ser calculadas a partir da equação implícita $u=u_0\,(x-u\,y)$ calculada para a solução, obtendo-se em cada ponto (x,y) desta projecção característica

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(x,y)=\frac{u_0'(x_0)}{1+u_0'(x_0)\,y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\,(x,y)=\frac{-u_0'(x_0)u}{1+u_0'(x_0)\,y}\;.$$

Figura 5.6: Valor inicial, projecções características e superfície gerada pelas características do Problema de Cauchy $u\;\partial u/\partial x+\partial u/\partial y=0$, $u(x,0)=u_0(x)$, com $u_0(x)=(1+4x^2)^{-1}$ se $x\geq 0$, e $u_0(x)=(1+36x^2)^{-1}$ se $x<0$. Os números m,M são tais que existem pontos da forma $(x_+,-1/m)$ e $(x_-,-1/M)$ onde as derivadas da solução explodem

Se $u_0'(x_0)\neq 0$ as derivadas $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ tendem para ∞ no ponto (x,y) da projecção característica com ordenada $y=-1/u_0'(x_0)$,e uma solução C^1

da equação não pode ser prolongada ao longo dessa projecção característica para além deste ponto. Se u_0 é limitada, o menor valor de $y>0$ onde tal acontece é $y=-1/m$, onde m é o ínfimo de $u_0'<0$, e o maior valor de $y<0$ onde tal acontece é $y=-1/M$, onde M é o supremo de $u_0'>0$ (Figura 5.6).

Se u_0 assume valores diferentes $u_0(x_1)>u_0(x_2)$ em pontos $x_1<x_2$, o Teorema de Valor Médio garante que existe um ponto $x_3\in]x_1,x_2[$ tal que $(u_0(x_2)-u_0(x_1))/(x_2-x_1)=u_0'(x_3)<0$, pelo que a ordenada do ponto (x,y) de intersecção das projecções características que passam em $(x_1,0)$ e $(x_2,0)$ é $y=(x_2-x_1)/(u_0(x_1)-u_0(x_2))=-1/u_0'(x_3)\geq -1/m>0$. O mesmo argumento e a continuidade de u_0' dão que se $u_0'(x_3)=m<0$, então para todo $\varepsilon\in]0,m[$ existem intervalos arbitrariamente pequenos $]x_1,x_2[$ contendo x_3 tais que $u_0(x_1)>u_0(x_2)$ e onde $u_0'<m+\varepsilon<0$, pelo que $-1/m\leq(x_2-x_1)/(u_0(x_1)-u_0(x_2))\geq -1/(m+\varepsilon)$; logo, as projecções características que passam em $(x_1,0)$ e $(x_2,0)$ intersectam-se num ponto de ordenada $y\in]-1/m,-1/m+\varepsilon[$ e tomando $\varepsilon\in]0,m[$ arbitrariamente pequeno conclui-se que o ínfimo das ordenadas positivas de pontos de projecções características é $-1/m$.

Por outras palavras, interpretando y como tempo, o primeiro instante em que as derivadas parciais da solução explodem é precisamente o instante em que características diferentes começam a intersectar-se. Diz-se que a **onda quebra** e que se forma nesse instante uma **onda de choque**.

Conclui-se também que a fronteira do conjunto máximo de definição da solução do problema de Cauchy com condição inicial $u(x,0)=u_0(x)$ consiste no conjunto aberto conexo que contém o eixo xx e cuja fronteira é formada por pontos fronteiros do conjunto das intersecções de projecções características diferentes que intersectam o eixo xx (Figura 5.7).

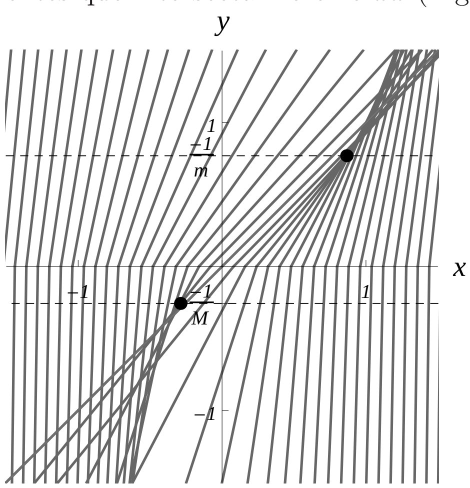

Figura 5.7: Projecções características do Problema de Cauchy considerado na figura anterior, onde é visível o conjunto onde se intersectam. O complementar do fecho deste conjunto é o conjunto máximo de definição da solução, que, como se viu, contém a faixa horizontal $\{(x,y)\colon -1/M<y<-1/m\}$

Uma possível situação física descrita pela equação de Burgers é a de um campo de velocidades para partículas livres que se deslocam rectilineamente no eixo dos xx em função do tempo y, em que $u(x,y)$ dá a velocidade de uma partícula no ponto x e no instante y. Designando a posição de uma partícula em função do tempo por uma função $y \mapsto X(y)$, a sua velocidade e aceleração são, respectivamente, $X'(y)$ e $X''(y)$ pelo que a condição do movimento da partícula obedecer ao campo de velocidades u corresponde a $u(X(y),y) = X'(y)$. Se u é C^1, a regra de derivação da função composta dá $X''(y) = u\, \partial u/\partial x + \partial u/\partial y$, onde u e as suas derivadas são calculadas na posição e instante $(X(y), y)$ da partícula em movimento. Portanto, um campo de velocidades u satisfaz a equação diferencial parcial dada se e só se a aceleração de cada partícula sujeita ao campo é nula. Concluiu-se que a equação de Burgers para um campo de velocidades é equivalente à Lei de Newton (força igual a massa vezes aceleração) para o movimento numa recta de partículas livres, isto é, partículas que não estão sujeitas à acção de forças, pelo que a validade da equação de Burgers para campos de velocidades é equivalente à validade da Lei de Newton para posições de partículas.

Como cada partícula sujeita a um campo nas condições referidas tem aceleração nula, a sua velocidade é constante. Esta observação é consistente com as soluções da equação diferencial serem constantes sobre cada uma das suas projecções características. Além disso, se duas partículas sujeitas ao campo partirem de posições diferentes no eixo xx, no sentido positivo e com a velocidade da partícula atrás superior à da partícula à frente, então acabarão por colidir em tempo finito, o que corresponde à intersecção de diferentes projecções características identificada acima[5].

A equação de Burgers também é utilizada em mecânica de fluidos para o movimento rectilíneo (na direcção do eixo xx) de um fluido incompressível sem viscosidade com velocidade u, em que x é a distância a um ponto fixo na recta do movimento e y é o tempo. Uma outra aplicação é como modelo simplificado de tráfego de veículos numa estrada, caso em que a densidade do tráfego é função de u, x é a distância ao longo da estrada a partir de um ponto fixo e y é o tempo.

5.4 Notas históricas

As primeiras equações diferenciais parciais a serem consideradas foram a equação das ondas unidimensional como modelo da vibração de uma corda elástica, por d'Alembert em 1749, a qual é uma equação de 2ª ordem analisada no capítulo seguinte, e as equações da hidrodinâmica de fluidos ideais

[5] De um ponto de vista físico o modelo de um movimento puramente inercial, *i.e,* sem acção de forças sobre as partículas, deixa de fazer sentido quando as partículas estão próximas uma vez que não podem ser desprezadas forças de interacção entre partículas.

baseadas na conservação de massa e de momento, por L. Euler em 1757 e 1761, das quais o caso particular de movimentos rectilíneos para fluidos incompressíveis, sem viscosidade e em que a tensão é uma pressão[6] é a equação de Burgers considerada neste capítulo que, por esta razão, também é conhecida por equação de Euler.

O processo de reduzir a resolução de uma equação diferencial parcial linear de 1ª ordem à resolução de uma equação diferencial ordinária foi iniciado por J.-L. Lagrange em 1772, na sequência de trabalho de L. Euler de 1755, e foi depois estendido pelo próprio Lagrange em 1779 e 1785, e por G. Monge[7] em 1784, A.-L. Cauchy em 1819 e Jacobi a equações não lineares e mais de duas variáveis.

A designação "curvas características" deve-se a A. Cauchy em 1842.

O método das características foi estendido para equações de 2ª ordem com duas variáveis por Monge em 1795 e A.M. Ampère[8], para mais de duas variáveis por A. Victor Bäcklund[9] em 1878 e J. Beudon[10] em 1897, e para equações de qualquer ordem por J. Hadamard em 1903 nas suas *Leçons sur la Propagation des Ondes*.

A equação de Burgers é o exemplo mais simples das chamadas **leis de conservação** não lineares, assim designadas por traduzirem princípios de conservação (de massa, carga eléctrica, energia, momento, etc.). Em aplicações da equação de Burgers e de outras equações da mecânica dos meios contínuos é útil definir soluções de forma mais fraca do que aqui considerada, nomeadamente permitindo descontinuidades que satisfaçam condições de admissibilidade apropriadas, com o objectivo de alargar os domínios de definição de soluções de acordo com o que for conveniente para as aplicações consideradas. As leis de conservação não lineares têm amplas aplicações em mecânica dos meios contínuos e são correntemente objecto de intensa investigação.

A equação de Burgers, com origem no trabalho de L. Euler em 1752-61 para a hidrodinâmica como já foi referido, reapareceu num artigo de H. Bateman[11] de 1915 como um modelo simples para leis de conservação da dinâmica de gases e, independentemente, num artigo de J. Burgers de 1940 sobre turbulência, altura a partir da qual passou a ser conhecida por equação de Burgers.

O primeiro trabalho sobre a formação ondas de choque em soluções de equações diferenciais parciais deve-se a Riemann em 1858 para um fluxo isentrópico de um fluido com simetria plana em que as equações da mecânica

[6](i.e., a tensão em cada ponto do fluido tem a direcção da deformação aplicada e a sua intensidade é independente da direcção da deformação.

[7]Monge, Gaspard (1746-1818).

[8]Ampère, André-Marie (1775-1836).

[9]Bäcklund, Albert Victor (1845-1922).

[10]Beudon, Jules.

[11]Bateman, Harry (1882-1946).

de fluidos se reduzem a um sistema de leis de conservação em duas variáveis, uma espacial e a outra tempo. A formação de ondas de choque em soluções de equações da mecânica de fluidos unidimensional veio a ter uma outra contribuição fundamental por P. Lax[12] em 1964 e 1973, e or F. John[13] em 1974, entre outros autores

O primeiro resultado sobre o problema de Cauchy para a equação de Burgers considerando soluções fracas que podem ter descontinuidades e ter existência global deve-se a H. Hopf[14], em 1950.

[12]Lax, Peter (1926-).
[13]John, Fritz (1910-1994).
[14]Hopf,Heinz (1894-1971).