Capítulo 4

Equações diferenciais ordinárias escalares de ordem maior do que 1

4.1 Introdução

Consideram-se neste capítulo equações escalares de ordem $n > 1$ da forma

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right)}\ ,$$

onde f é uma função contínua com valores em $\mathbb{R}$ definida num conjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Diz-se que uma função y com valores reais e definida num intervalo $J \in \mathbb{R}$ é **solução da equação diferencial** considerada se é C^n em J e satisfaz a equação considerada.

Como é de esperar do que se viu no Capítulo 1, a resolução de equações deste tipo em termos de funções elementares é em geral difícil. Neste capítulo consideramos essencialmente três questões:

- resolução de equações escalares lineares;
- existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial, prolongamento de soluções a intervalos máximos de definição, e dependência contínua de condições iniciais e de parâmetros para equações não lineares escalares;
- redução de ordem de equações diferenciais escalares.

Começa-se com equações de 2ª ordem cuja discussão é notacionalmente mais simples e que se generaliza imediatamente a ordem superior.

4.2 Equações lineares de 2ª ordem

Como as soluções de uma equação escalar de 2ª ordem $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ num intervalo $J \in \mathbb{R}$ são funções C^2 de J em $\mathbb{R}$, esta equação é uma equação linear se e só se existe uma transformação linear T de $C^2(J;\mathbb{R})$ em $C^0(J;\mathbb{R})$ e uma função $h \in C^0(J;\mathbb{R})$ tais que a equação é equivalente a $Ty = h$, isto é, se e só se existe $h \in C^0(J;\mathbb{R})$ tal que as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ por $(y_1, y_2) \mapsto f(t, y_1, y_2) - h(t)$ são lineares para cada t fixo. Estas funções lineares são da forma $f(t, \mathbf{y}) = B(t)\mathbf{y} + h(t)$, onde cada $B(t)$ é uma matriz linha e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, pelo que as equações ordinárias lineares escalares de 2ª ordem consideradas são da forma

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = h(t) ,$$

onde a_0, a_1, h são funções reais definidas e contínuas num intervalo $J \in \mathbb{R}$.

As equações deste tipo podem-se escrever na forma de equações vectoriais de primeira ordem em $\mathbb{R}^2$

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) , \qquad \text{com } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}.$$

Assim, as equações diferenciais escalares lineares de 2ª ordem podem ser vistas como casos particulares das equações diferenciais lineares vectoriais de primeira ordem consideradas anteriormente.

Dos resultados estabelecidos na secção **??** resulta que o problema de valor inicial para a equação diferencial vectorial de primeira ordem $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$, tem solução única para cada $t_0 \in J$, $\mathbf{y_0} \in \mathbf{R}^2$, que pode ser prolongada a todo o intervalo J. Em consequência, para cada $t_0 \in J$ e $\mathbf{y_0} = (y_{01}, y_{02})$, a solução do problema de valor inicial para a equação diferencial escalar de 2ª ordem considerada, com $y(t_0) = y_{01}$, $\dot{y}(t_0) = y_{02}$, existe, é única e pode ser prolongada a todo o intervalo J.

Como sempre para equações lineares, a solução geral da equação considerada pode-se obter somando a uma solução particular da equação a solução geral da equação homogénea correspondente, obtida na equação dada com $h(t) = 0$ para todo $t \in J$, e as soluções satisfazem o **Princípio da Sobreposição**, isto é, uma combinação linear com coeficientes c_1 e c_2 de soluções de equações do tipo indicado com termos independentes $h = h_1$ e $h = h_2$ é solução da equação com o termo independente igual à correspondente combinação linear dos termos independentes das duas equações, $h = c_1h_1 + c_2h_2$.

As soluções da equação diferencial escalar homogénea de 2ª ordem podem ser obtidas a partir de uma solução matricial fundamental Y da equação vectorial de 1ª ordem associada. De facto, a solução geral da equação vectorial de 1ª ordem é $\mathbf{y}(t) = Y(t)\,\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ é uma constante arbitrária, as soluções correspondentes da equação escalar são as primeiras componentes das soluções da equação vectorial e as suas derivadas sucessivas são as componentes seguintes das soluções da equação vectorial. Assim, para cada duas soluções da equação diferencial escalar homogénea de 2ª ordem convém considerar a função matricial 2×2 em que a primeira linha consiste nessas soluções e a seguinte nas suas derivadas.

De modo geral, chama-se **matriz Wronskiana**[1] de duas funções u_1, u_2 diferenciáveis num intervalo aberto de números reais a

$$W(u_1, u_n) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{bmatrix}.$$

A relação entre as soluções matriciais fundamentais da equação vectorial e as soluções da equação escalar pode ser expressa em termos de matrizes Wronskianas da forma seguinte.

(4.1) **Proposição:** *Uma função Y definida num intervalo $J \subset \mathbb{R}$ cujos valores são matrizes 2×2 é uma solução matricial fundamental da equação diferencial linear vectorial associada a uma equação diferencial linear escalar homogénea de 2ª ordem cujos coeficientes são funções contínuas no intervalo J se e só se é uma matriz Wronskiana de duas soluções linearmente independentes $u_1, u_2 : J \to \mathbb{R}$ da equação linear escalar, isto é, $Y = W(u_1, u_2)$. Soluções $u_1, u_2 : J \to \mathbb{R}$ da equação diferencial linear escalar homogénea são independentes se e só se a matriz Wronskiana $W(u_1, u_2)(t)$ é não singular para algum instante $t \in J$.*

Dem. Se $u_1, u_2 : J \to \mathbb{R}$ são soluções independentes da equação diferencial escalar de 2ª ordem e $Y = W(u_1, u_2)$, é claro da correspondência com a equação vectorial associada que as colunas da matriz Y são soluções da equação vectorial. Para provar que Y é uma solução matricial fundamental desta equação resta verificar que é não singular em algum instante $t \in J$. Se $Y(t)\,\mathbf{c} = 0$, com $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, é $c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0$ e, como u_1, u_2 são linearmente independentes, $\mathbf{c} = 0$. Assim, $\mathbf{c} = 0$ é o único vector de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $Y(t)\mathbf{c} = 0$, pelo que $Y(t)$ é uma matriz não singular.

Se Y é uma solução matricial fundamental da equação vectorial, é claro da correspondência com a equação escalar de 2ª ordem associada que, sendo as colunas de Y soluções da equação vectorial, as suas primeiras componentes, ou seja, os elementos na primeira linha de Y, são soluções da equação escalar e cada uma das outras linhas é a derivada da linha anterior. Portanto $Y = W(u_1, u_2)$, onde u_1, u_2 são soluções da equação escalar. Resta provar que estas funções são independentes. Se $c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0$, obtém-se derivando esta expressão k vezes $c_1 u_1^{(k)} + c_2 u_2^{(k)} = 0$, pelo que para $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ é $Y\mathbf{c} = 0$. Como Y é uma solução matricial fundamental, $Y(t)$ é não singular

[1] Wronski, Josef (1778-1853).

para algum $t \in J$ e, portanto, $\mathbf{c} = 0$, o que prova que as funções u_1, u_2 são linearmente independentes.

A última afirmação resulta da correspondente afirmação provada para o caso geral na secção **??**. *Q.E.D.*

A proposição precedente estabelece que a matriz Wronskiana W de soluções linearmente independentes u_1, u_2 da equação escalar de 2^{a} ordem homogénea é uma solução matricial fundamental da equação vectorial associada. Por outro lado, as soluções da equação escalar homogénea são as primeiras componentes das soluções da equação vectorial associada.

Como a solução geral da equação vectorial homogénea é $\mathbf{y}(t) = W(t)\,\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ é uma constante arbitrária, a **solução geral da equação escalar de 2ª ordem homogénea** é $y(t) = c_1 u_1 + c_2 u_2$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Por isso, diz-se que as soluções independentes u_1, u_2 são um **conjunto fundamental de soluções** da equação escalar homogénea.

A solução do problema de valor inicial para a equação vectorial homogénea $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$, é $\mathbf{y}(t) = W(t)\,W^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0}$.Portanto, com $(y_0, v_0) = \mathbf{y_0}$, o problema de valor inicial correspondente para a equação escalar de 2^{a} ordem homogénea é

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0\,, \quad y(t_0) = y_0\,,\ \dot{y}(t_0) = v_0\,, \tag{4.2}$$

ou seja é um problema com dados iniciais do tipo posição e velocidade.

É fácil ver que

$$W^{-1} = \frac{1}{u_1\dot{u}_2 - \dot{u}_1 u_2}\begin{bmatrix} \dot{u}_2 & -u_2 \\ -\dot{u}_1 & u_1 \end{bmatrix},$$

$$W(s)^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{u_1(s)\,\dot{u}_2(s) - \dot{u}_1(s)\,u_2(s)}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(s)\,a - u_2(s)\,b \\ u_1(s)b - \dot{u}_1(s)\,a \end{bmatrix}.$$

Portanto, a **solução do problema de valor inicial para a equação escalar de 2ª ordem** (4.2) é

$$y(t) = \frac{[\dot{u}_2(t_0)\,y_0 - u_2(t_0)\,v_0]\,u_1(t) + [\,u_1(t_0)\,v_0 - \dot{u}_1(t_0)\,y_0]\,u_2(t)}{u_1(t_0)\,\dot{u}_2(t_0) - \dot{u}_1(t_0)\,u_2(t_0)}\,,$$

onde os coeficientes da combinação linear das soluções fundamentais u_1, u_2 estão calculados em termos das condições iniciais e dos valores das soluções fundamentais e das suas derivadas no instante inicial.

Por outro lado, a fórmula de variação das constantes para a equação vectorial não homogénea é

$$\mathbf{y}(t) = W(t)\,W^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} W(t)\,W^{-1}(s)\,\mathbf{h}(s)\,ds\,,$$

pelo que a **fórmula de variação das constantes para a equação escalar de 2ª ordem não homogénea** é

$$y(t) = \frac{[\dot u_2(t_0)\, y_0 - u_2(t_0)\, v_0]\, u_1(t) + [\, u_1(t_0)\, v_0 - \dot u_1(t_0)\, y_0]\, u_2(t)}{u_1(t_0)\, \dot u_2(t_0) - \dot u_1(t_0)\, u_2(t_0)}$$

$$+ \frac{-\int_{t_0}^t u_2(s)\, h(s)\, ds}{u_1 \dot u_2 - \dot u_1 u_2}\; u_1(t) + \frac{\int_{t_0}^t u_1(s)\, h(s)\, ds}{u_1 \dot u_2 - \dot u_1 u_2}\; u_2(t)\ .$$

A solução **solução particular da equação escalar não homogénea** obtida desta fórmula com $y_0 = v_0 = 0$, é

$$y(t) = c_1(t)\, u_1(t) + c_2(t)\, u_2(t)\ ,$$

com

$$c_1(t) = \frac{-\int_{t_0}^t u_2(s)\, h(s)\, ds}{u_1 \dot u_2 - \dot u_1 u_2}\ , \qquad c_2(t) = \frac{\int_{t_0}^t u_1(s)\, h(s)\, ds}{u_1 \dot u_2 - \dot u_1 u_2}\ .$$

Assim, tanto a solução geral da equação não homogénea como esta sua solução particular são semelhantes a combinações lineares das soluções fundamentais da equação homogénea associada, excepto que os coeficientes não são constantes, mas sim variáveis dependentes de t de acordo com as fórmulas anteriores, o que está na origem da designação de fórmula de variação das constantes que tem sido usada.

4.3 Equações lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes

Como se viu, a resolução completa de uma equação diferencial linear escalar de 2ª ordem depende exclusivamente da determinação de duas soluções linearmente independentes da equação homogénea associada. No caso de equações escalares homogéneas de coeficientes constantes

$$\ddot y + a_1\, \dot y + a_0\, y = 0\ ,$$

com $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, podem-se obter facilmente soluções u_1, u_2 linearmente independentes a partir de uma factorização do **polinómio característico** da equação

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

em monómios elementares. Na verdade, as raízes complexas deste polinómio são dadas por $(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\,)/2$, pelo que são um de três casos:

(i) dois números reais distintos se $a_1^2 - 4a_0 > 0$,

(ii) dois números complexos conjugados distintos se $a_1^2 - 4a_0 < 0$,

(iii) um único número real que é uma raíz dupla do polinómio se $a_1^2–4a_0=0$.

Designando as raízes por λ_1, λ_2, no primeiro e no segundo caso $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$, e no terceiro caso $\lambda_1=\lambda_2$ e $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2$. Designando por $Dy=\dot{y}$ o operador derivação, é fácil ver que a equação diferencial homogénea considerada pode ser escrita como

$$(D^2+a_1D+a_0I)\, y = 0 \ .$$

Assim, nos dois primeiros casos a equação diferencial considerada é equivalente a $(D-\lambda_1 I)\,(D-\lambda_2 I)\, y=0$ com a ordem de factorização arbitrária, e no terceiro caso é equivalente a $(D-\lambda_1 I)^2 y=0$. Portanto, uma maneira de obter soluções da equação homogénea de 2ª ordem nos dois primeiros casos é resolver cada uma das equações $(D-\lambda_j I)\, y = 0$ para $j=1,2$, e no terceiro caso resolver a equação $(D-\lambda_1 I)^2 y = 0$.

A equação $(D-\lambda I)\, y=0$ tem solução complexa $y_1(t)=e^{\lambda t}$ e a equação $(D-\lambda_1 I)^2 y = 0$ tem soluções $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = t\, e^{\lambda t}$. Estas soluções são também reais sempre que λ é real. Se as raízes do polinómio são complexos conjugados distintos $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $(D-\lambda_1 I)\,(D-\bar{\lambda}_2 I)y = 0$ é equivalente a $[D^2-(\lambda_1+\bar{\lambda}_1)D+\lambda_1\bar{\lambda}_1 I]\, y = 0$, ou seja a $[\, D^2-2aD+(a^2+b^2)I\,]\, y = 0\,$. É fácil verificar que esta equação admite as soluções reais obtidas das partes reais e imaginárias das soluções complexas de $(D-\lambda_1 I)y=0\,$, ou seja $y_1(t) = e^{at}\cos bt$ e $y_2(t) = e^{at}\sin bt$.

Portanto, a equação diferencial de 2ª ordem homogénea tem soluções complexas e^{λ_1}, e^{λ_2} nos dois primeiros casos e e^{λ_1}, $t\, e^{\lambda_1}$ no terceiro caso. Tem, também, os seguintes pares de soluções reais em cada um dos três casos considerados:

$$(i)\ \ e^{\lambda_1 t},\ \ e^{\lambda_2 t}, \qquad (ii)\ \ e^{at}\cos bt,\ \ e^{at}\sin bt, \qquad (iii)\ \ e^{\lambda_1 t},\ \ t\, e^{\lambda_1 t}\ .$$

Deixa-se como exercício provar que cada par de soluções é independente e, portanto, é um conjunto fundamental de soluções. Por isso, chama-se a λ_1, λ_2 **valores característicos** da equação diferencial.

A partir destas soluções pode-se obter uma matriz Wronskiana W apropriada à resolução da equação colocando o correspondente par de soluções na primeira linha e as suas derivadas na segunda linha. A solução geral da equação homogénea, a solução de um problema de valor inicial, a solução geral de uma equação não homogénea correspondente, e uma solução particular de uma dessas equações não homogéneas podem todas ser obtidas de W como foi indicado acima. Por exemplo, a solução geral da equação homogénea é simplesmente uma combinação linear do par de soluções independentes identificadas para cada caso com coeficientes reais arbitrários.

(4.3) **Exemplo (Oscilações lineares de 2ª ordem com e sem amortecimento):** Considera-se o movimento rectilíneo de um corpo de massa

m com posição em cada instante de tempo dada por $y(t)$ em relação a um ponto tomado como origem de coordenadas na recta onde se dá o movimento, obedecendo à Lei de Newton do movimento (força=massa×aceleração) e à acção da soma de três forças: *(i)* uma força linear de restituição à origem, ou seja uma força proporcional e de sentido contrário ao desvio do corpo em relação à origem; *(ii)* uma força de atrito linear proporcional à velocidade e retardando o movimento; *(iii)* uma força aplicada dada em cada instante t pelo valor de uma função $F(t)$. Considera-se também o caso do movimento sem atrito.

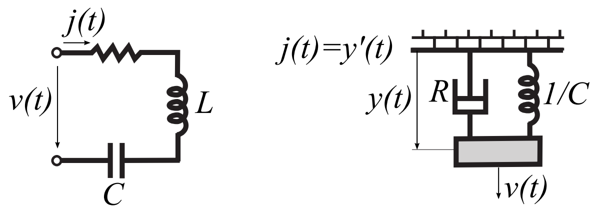

Figura 4.1: Circuito eléctrico RLC e sistema mecânico linear de massa-mola-amortecedor

A Lei de Newton dá $m\,\ddot{y} = -2b\,\dot{y} - c\,y + F(t)$, onde $m > 0$ é a massa, $2b > 0$ é o coeficiente de atrito e $c > 0$ é o coeficiente de restituição da mola. Portanto, temos uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$a\,\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + c\,y = F(t)\ , \tag{4.4}$$

onde $a = m$. Esta equação é um bom modelo para pequenas vibrações mecânicas, considerando a força como sobreposição de uma mola, um amortecedor e uma força aplicada que depende do tempo num sistema que se costuma representar esquematicamente como na Figura 4.1.

A equação também modela um circuito eléctrico com uma resistência R, um condensador de capacidade C e uma bobina de indutância L em série, o chamado circuito RLC esquematizado na Figura 4.1, onde $v(t)$ é a diferença de potencial eléctrico nos terminais do circuito no instante t e $j(t)$ é a corrente eléctrica no circuito no instante t, com $m = L$, $2b = R$, $c = 1/C$. Na verdade, a diferença de potencial eléctrico nos terminais de uma resistência R é $v_R = Rj$, nos terminais de um condensador de capacidade C com carga q é $v_c = q/C$ e como a corrente eléctrica é a velocidade da carga eléctrica $j = q'$ é $v_C' = j/C$, e nos terminais de uma bobina com indutância L é $v_L = Lj'$, pelo que a diferença de potencial eléctrico nos terminais do circuito RLC satisfaz $v' = (v_R + v_C + v_L)' = Rj' + j/C + Lj''$, isto é, a corrente no circuito satisfaz $Lj'' + Rj' + j/C = v'$, onde v é a força electromotriz aplicada nos terminais do circuito.

A dualidade entre sistemas mecânicos que envolvem a interrelação de massas, molas e amortecedores lineares e circuitos eléctricos com resistências, condensadores e bobinas também se verifica para sistemas mais complicados, pelo que uns e outros são modelados pelas mesmas equações e têm propriedades duais.

O polinómio característico da equação (4.4) é $p(\lambda)=\lambda^2+(2b/a)\lambda+c/a$, pelo que os valores característicos da equação são $\lambda=(-b\pm\sqrt{b^2-ac}\,)/a$. Com $\omega_0=\sqrt{|b^2-ac|}/a$, pode-se escrever as solução geral da equação homogénea, obtida como indicado antes deste exemplo, na forma

$$y(t)=\begin{cases} e^{-bt/a}\left(A\,e^{\omega_0 t}+B\,e^{-\omega_0 t}\right)\,, & \text{se } b^2-ac>0\\ e^{-bt/a}\,(A+Bt)\,, & \text{se } b^2-ac=0\\ e^{-bt/a}\,(A\,\cos\omega_0 t+B\,\sin\omega_0 t)\,, & \text{se } b^2-ac<0\,,\end{cases}$$

onde $A,B\in\mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

As constantes A, B de uma solução concreta podem ser especificadas com dados adicionais, por exemplo pela posição e pela velocidade iniciais $y(t_0)=y_0$, $\dot y_0=v_0$, o que no caso do circuito eléctrico RLC corresponde a especificar o valor da corrente eléctrica e da sua variação no instante inicial. Para cada um dos três casos obtém-se, respectivamente,

$$y(t)=\begin{cases} e^{-b(t-t_0)/a}\left(\frac{(\omega_0+b/a)y_0+v_0}{2\omega_0}\;e^{\omega_0(t-t_0)}+\frac{(\omega_0-b/a)y_0-v_0}{2\omega_0}\;e^{-\omega_0(t-t_0)}\right)\\ e^{-b(t-t_0)/a}\left(y_0+\left(\frac{b}{a}\,y_0+v_0\right)(t-t_0)\right)\\ e^{-b(t-t_0)/a}\left(y_0\,\cos\omega_0(t-t_0)+\frac{(b/a)y_0+v_0}{\omega_0}\;\sin\omega_0(t-t_0)\right)\,.\end{cases}$$

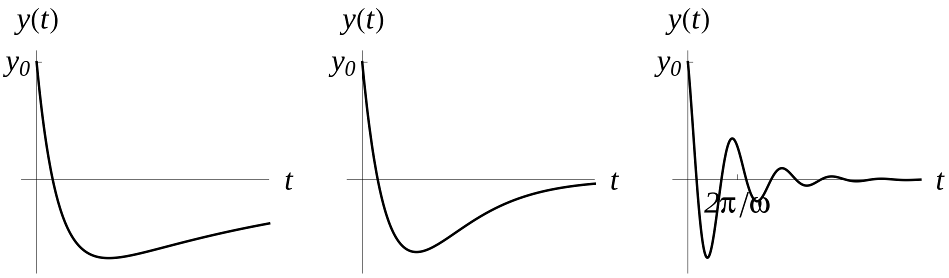

Figura 4.2: Oscilações sobreamortecidas, criticamente amortecidas e subamortecidas

Em qualquer dos três casos com amortecimento ($b>0$) as soluções da equação homogénea tendem para zero quando $t\to+\infty$. Os três casos indicados, conforme b^2-ac é positivo, nulo ou negativo, são conhecidos por **sobreamortecido**, **criticamente amortecido** e **subamortecido**, respectivamente (Figura 4.2). No terceiro caso a fórmula pode ser reescrita notando que $A\,\cos\omega_0 t+B\,\sin\omega_0 t=M\sin(\omega_0 t-\varphi)$, com $M=\sqrt{A^2+B^2}$ chamada **amplitude** e $\varphi=\arctan(-A/B)$, com $\sin\varphi=-A/M$, chamada **desfasagem** da função sinusoidal, pelo que o movimento sobreamortecido corresponde a uma função sinusoidal amortecida exponencialmente (Figura 4.2). Neste caso, chama-se a ω_0 **frequência angular** da solução ou **frequência angular própria** ou **natural** da equação diferencial (4.4). A função $C\sin(\omega_0 t – \varphi)$ é periódica de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, a que se chama o **período próprio** ou **natural** da equação diferencial. Há tanto mais oscilações num intervalo de tempo quanto maior for ω_0, logo quanto maior for $\omega_0^2 = c/a – (b/a)^2$. Em termos dos parâmetros do sistema de massa-mola-amortecedor, há tanto mais oscilações quanto maior for a diferença entre o coeficiente de restituição da mola e o quadrado do coeficiente de atrito, ambos normalizados a massa unitária. Por exemplo, para uma dada massa e em condições de atrito idênticas a frequência das oscilações é maior para uma maior força de restituição da mola. Para o circuito eléctrico RLC verifica-se $\omega^2 = 1/(LC) - [(R/(2L)]^2$ e podem-se fazer considerações semelhantes.

A atenuação exponencial da amplitude quando $t \to +\infty$ no primeiro caso é $b/a - \omega_0$ se $A \neq 0$ e $b/a + \omega_0$ se $A = 0$ e $B \neq 0$, e nos dois outros casos é b/a excepto se a solução é nula com $A = B = 0$. Por exemplo, no caso subamortecido a taxa exponencial de atenuação da amplitude é directamente proporcional ao coeficiente de atrito e inversamente proporcional à massa, e para o circuito eléctrico RLC é directamente proporcional à resistência e inversamente proporcional à indutância.

No caso sem atrito ($b = 0$), verifica-se unicamente o terceiro caso, mas sem amortecimento, e a solução geral da equação homogénea é

$$u(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\sin(\omega_0 t - \varphi) .$$

A solução é sinusoidal e, portanto, é limitada e não tende para zero quando $t \to +\infty$: as oscilações permanecem sem amortecimento (Figura 4.3).

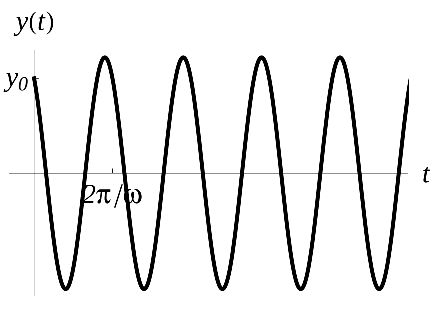

Figura 4.3: Oscilação harmónica

Apesar da fórmula de variação das constantes obtida anteriormente dar um método geral para calcular soluções particulares de equações não homogéneas, é possível usar métodos de cálculo mais simples para certos tipos de equações. Apresenta-se aqui um método bastante simples, primeiro para obter soluções complexas de equações não homogéneas em que o termo independente é uma exponencial complexa $h(t) = e^{\sigma t}$, com $\sigma \in \mathbb{C}$, isto é, consideram-se equações não homogéneas da forma

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = e^{\sigma t}$$

com $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ constantes.

Como as derivadas e primitivas de exponenciais $e^{\sigma t}$ são proporcionais a estas mesmas exponenciais, é natural procurar obter uma solução particular da equação não homogénea na forma $y_p(t) = k\, e^{\sigma t}$. Como se verifica

$$\ddot{y}_p(t) + a_1\dot{y}_p(t) + a_0 y_p(t) = k\, e^{\sigma t}\big(\sigma^2 + a_1\sigma + a_2\big)\,,$$

obtém-se que y_p satisfaz a equação diferencial se e só se $k\,(\sigma^2 + a_1\sigma + a_2) = 1$. Se $\sigma^2 + a_1\sigma + a_2 \neq 0$, esta equação tem uma solução única $k = 1/\big(\sigma^2 + a_1\sigma + a_2\big)$ e, com este k a função y_p é uma solução particular da equação diferencial não homogénea considerada. Este caso corresponde a σ não ser um valor característico da equação homogénea correspondente. Se $\sigma^2 + a_1\sigma + a_2 = 0$, a equação obtida para o coeficiente k é impossível, pelo que não há soluções da equação diferencial da forma indicada. Então, é natural procurar soluções da forma $y_p(t) = k\, t\, e^{\sigma t}$. Neste caso verifica-se

$$\ddot{y}_p(t) + a_1\dot{y}_p(t) + a_0 y_p(t) = k\, e^{\sigma t}\big[(\sigma^2 + a_1\sigma + a_2)\, t + 2\sigma + a_1\big] = k\, e^{\sigma t}(2\sigma + a_1),$$

pelo que y_p satisfaz a equação diferencial se e só se $k\,(2\sigma + a_1) = 1$. Se $2\sigma + a_1 \neq 0$, esta equação tem uma solução única $k = 1/(2\sigma + a_1)$ e, com este k a função y_p é uma solução particular da equação diferencial não homogénea considerada. Este caso corresponde a σ não ser um valor característico duplo da equação homogénea correspondente. Se $\sigma^2 + a_1\sigma + a_2 = 0$ e $2\sigma + a_1 = 0$, a equação obtida para o coeficiente k é impossível, pelo que não há soluções da equação diferencial da forma indicada. Então, é natural procurar soluções da forma $y_p(t) = k\, t^2\, e^{\sigma t}$. Neste caso verifica-se

$$\ddot{y}_p(t) + a_1\dot{y}_p(t) + a_0 y_p(t) = k\, e^{\sigma t}\big[(\sigma^2 + a_1\sigma + a_2)\, t^2 + 2(2\sigma + a_1)\, t + 2\big] = 2\, k\, e^{\sigma t},$$

pelo que y_p satisfaz a equação diferencial se e só se $2k = 1$, ou seja $k = 1/2$. Na verdade, a inexistência de soluções da equação não homogénea da forma $k\, e^{\sigma t}$ quando σ é um valor característico da equação homogénea correspondente podia ter sido antecipada porque neste caso as funções da forma indicada são soluções da equação homogénea e, consequentemente, para serem soluções o termo independente teria de ser zero. De igual modo, também se poderia concluir a inexistência de soluções da equação não homogénea das formas $k\, e^{\sigma t}$ ou $k\, t\, e^{\sigma t}$ quando σ é um valor característico de multiplicidade 2 da equação homogénea correspondente, da observação de nesse caso estas funções serem ambas soluções da equação diferencial homogénea.

Em resumo, a equação não homogénea com termo independente $e^{\sigma t}$ tem solução particular da forma $k\, e^{\sigma t}$, $k\, t\, e^{\sigma t}$ ou $k\, t^2\, e^{\sigma t}$ conforme, respectivamente, σ não é valor característico da equação diferencial homogénea, é valor característico com multiplicidade 1, ou é valor característico com multiplicidade 2. Como se viu, o valor de k pode ser obtido substituindo a função da forma indicada na equação e calculando o valor que corresponde à equação ser satisfeita. Por isso, este método de determinação de uma solução particular para uma equação diferencial linear não homogénea é conhecido por **método dos coeficientes indeterminados**.

Consideramos agora a aplicação do método dos coeficientes indeterminados para obter soluções reais no caso em que os coeficientes da equação homogénea são números reais, isto é, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ são constantes. Basta observar que das soluções complexas anteriores obtêm-se soluções reais tomando as partes real e imaginária das soluções complexas. Se σ é real, as funções obtidas acima são reais. Se $\sigma \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, digamos $\sigma = c + i\omega$ com $c, \omega \in \mathbb{R}$, considerando as partes real e imaginária no caso da solução complexa da forma $k\, e^{\sigma t}$ obtêm-se soluções reais da forma $k_1\, e^{ct} \cos \omega t + k_2\, e^{ct} \sin \omega t$ cujos coeficientes podem ser determinados substituindo estas funções na equação, e no caso da solução complexa da forma $k\, t\, e^{\sigma t}$ obtêm-se soluções reais da forma $k_1\, t\, e^{ct} \cos \omega t + k_2\, t\, e^{ct} \sin \omega t$. O caso de solução complexa da forma $k\, t^2\, e^{\sigma t}$ não pode ocorrer para uma equação diferencial de coeficientes reais pois corresponderia à equação ter um valor característico de multiplicidade 2 que não é um número real, o que é impossível.

Em resumo, ficamos a saber calcular pelo método dos coeficientes indeterminados soluções reais de equações escalares de 2ª ordem lineares não homogéneas com coeficientes reais, em que o termo independente é uma função de uma das formas

$$1, \quad t, \quad e^{ct}, \quad \cos \omega t, \quad \sin \omega t \quad e^{ct} \cos \omega t, \quad e^{ct} \sin \omega t\,,$$

onde $c, \omega \in \mathbb{R}$. É claro que também ficamos a saber obter soluções particulares de soluções de equações lineares não homogéneas de 2ª ordem com termos independentes que são combinações lineares das funções indicadas, nomeadamente tomando a combinação linear com os mesmos coeficientes mas das soluções particulares das equações com termo independente igual a cada uma das funções na combinação linear dada. Nas secções seguintes estende-se o estudo das equações diferenciais lineares escalares a ordens superiores a 2 e nesse contexto alarga-se o conjunto de termos independentes para os quais o método pode ser aplicado, mesmo no caso de equações de 2ª ordem. Mais especificamente, o método pode ser estendido para termos independentes que são combinações lineares de exponenciais, senos, cosenos e funções polinomiais de qualquer ordem, e até a combinações lineares de produtos que envolvem uma função de cada um dos três tipos referidos.

(4.5) **Exemplo (Oscilações lineares de 2ª ordem forçadas):** Considera-se a equação de 2ª ordem não homogénea obtida no exemplo (4.3) para um sistema mecânico de massa, mola e amortecedor com força aplicada sinusoidal $F(t)=F_0\sin(\omega t)$

$$a\,\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + c\,y = F_0 \sin\omega t\ ,$$

onde $a, b, c, \omega > 0$, $F_0 \in \mathbb{R}$. Como se viu nesse exemplo, esta equação também se aplica ao circuito eléctrico RLC com $a = L$, $2b = R$, $c = 1/C$, solução igual à corrente eléctrica no circuito $y(t) = j(t)$, e força electromotriz nos terminais do circuito $v(t) = -(F_0/\omega)\cos\omega t$, pois neste caso $\dot{v}(t) = F_0 \sin\omega t$.

A solução geral da equação obtém-se adicionando uma solução particular da equação não homogénea à solução geral da equação homogénea correspondente calculada no exemplo referido. Como $\sin\omega t = (e^{i\omega t} - e^{i\omega t})/(2i)$, o método dos coeficientes indeterminados descrito acima pode ser aplicado para obter uma solução da forma $y_p(t) = k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t$, se $\pm i\omega$ não forem valores característicos da equação homogénea, isto é, se $b \neq 0$ ou $b = 0$, $\omega \neq \omega_0$, onde $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ é a frequência angular própria da equação diferencial com $b = 0$. Substituindo a função y_p da forma anterior na equação diferencial obtém-se

$$\begin{aligned} a\,\ddot{y}_p(t) + 2b\,\dot{y}_p(t) + c\,y_p(t) &= \big[(c - a\omega^2)k_1 + 2b\omega k_2\big]\cos\omega t \\ &\quad + \big[-2b\omega k_1 + (c - a\omega^2)k_2\big]\sin\omega t = F_0 \sin\omega t\ , \end{aligned}$$

ou seja obtém-se o sistema de equações lineares $(c - a\omega^2)k_1 + 2b\omega k_2 = 0$, $-2b\omega k_1 + (c - a\omega^2)k_2 = F_0$ cuja solução é

$$k_1 = \frac{-2bF_0\omega}{(c - a\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}\ , \qquad k_2 = \frac{aF_0(c - a\omega^2)}{(c - a\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}\ .$$

Como se viu anteriormente, a combinação linear $k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t$ pode ser escrita na forma $M\sin(\omega t - \varphi)$, com $M = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ e $\varphi = \arctan(-k_1/k_2)$ com $\sin\varphi = -k_1/M$. Com estas relações e adicionando a solução particular y_p à solução geral $Ay_1 + By_2$ da equação homogénea, onde y_1, y_2 é um conjunto fundamental de soluções dessa equação e $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias, obtém-se para solução geral da equação não homogénea considerada

$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) + \frac{F_0}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}\ \sin(\omega t - \varphi)\ ,$$

onde $\varphi = \arctan\big(2b\omega/(c - a\omega^2)\big)$ com $\sin\varphi = 2b\omega/\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$ e as soluções fundamentais da equação homogénea foram obtidas no exemplo (4.3), nomeadamente

$$\begin{array}{lll} y_1(t) = e^{-(b/a - \omega_0)t}\ , & y_2(t) = e^{-(b/a + \omega_0)t}\ , & \text{se } b^2 - ac > 0 \\ y_1(t) = e^{-bt/a}\ , & y_2(t) = t\,e^{-bt/a}\ , & \text{se } b^2 - ac = 0 \\ y_1(t) = e^{-bt/a}\cos\omega_0 t\ , & y_2(t) = e^{-bt/a}\sin\omega_0 t\ , & \text{se } b^2 - ac < 0\ , \end{array}$$

onde a frequência angular própria da equação diferencial é dada por $\omega_0 = \sqrt{|c/a - (b/a)^2|}$ e, portanto, $c - a\omega^2 = a[(\omega_0^2 - \omega^2 + (b/a)^2]$. Como se viu no exemplo (4.3), estas soluções da equação homogénea convergem todas para zero quando $t \to +\infty$, pelo que a solução y da equação não homogénea aproxima-se da solução particular calculada, ou seja $y(t) - y_p(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$, onde

$$y_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{a^2\left[\omega_0^2 - \omega^2 + (b/a)^2\right]^2 + 4b^2\omega^2}} \ \sin(\omega t - \varphi) \ .$$

Por isso, diz-se que esta função é a **solução estacionária** e $Ay_1(t) + By_2(t)$ é a **solução transitória** da equação não homogénea. Podemos ver a solução transitória como a solução da equação homogénea que permite ajustar as condições iniciais da equação não homogénea à sua solução estacionária (Figura 4.4); à medida que o tempo decorre a energia fornecida ao sistema através da fixação de condições iniciais não coincidentes com os correspondentes valores da solução estacionária vai sendo dissipada devido ao amortecimento com a solução a aproximar-se da resposta do sistema à força externa $F(t)$. Sem amortecimento ($b = 0$) a diferença das condições iniciais para os valores correspondentes da solução estacionária manter-se-ia permanentemente e a chamada solução transitória constituiria um desvio permanente da solução da equação não homogénea em relação à sua solução estacionária.

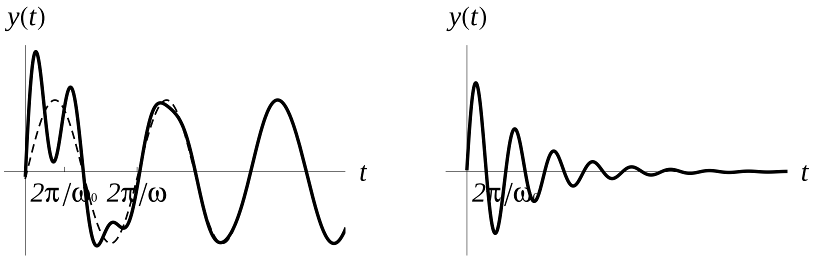

Figura 4.4: Solução, solução estacionária e solução transitória da equação $a\,\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + c\,y = F_0 \sin \omega t$

Como se referiu no exemplo do circuito RC no início do capítulo 1, a resposta $y(t)$ do sistema descrito pela equação diferencial a uma excitação por um termo independente $F(t)$ pode ser caracterizada por uma função que dá o quociente entre as respectivas amplitudes em função da frequência angular ω de um sinal de excitação sinusoidal e por uma função que dá as correspondentes desfasagens em função de ω. A este par de funções chama-se **função de transferência do sistema**. No caso presente estas funções são, respectivamente (Figura 4.5)

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2\left[\omega_0^2 - \omega^2 + (b/a)^2\right]^2 + 4b^2\omega^2}}$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \phi(\omega) & , \quad \text{se } \omega^2 < c/a \\ \phi(\omega) + \pi/2 & , \quad \text{se } \omega^2 > c/a \ , \end{cases}$$

$$\text{com } \phi(\omega) = \arctan \frac{2b\omega}{a[\omega_0^2 - \omega^2 + (b/a)^2]} \ .$$

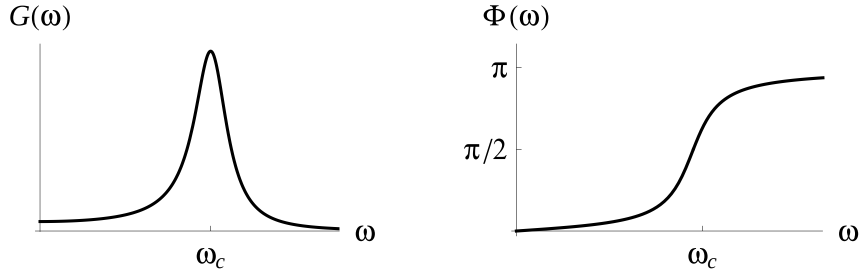

Figura 4.5: Função de transferência do sistema linear definido pela equação $a\,\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + c\,y = F(t)$

Pode-se ver que a função G que dá o **ganho de amplitude** do sistema satisfaz $G(\omega) \to 1/(c + b^2/a)$ quando $\omega \to 0$ e $G(\omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$, tem um máximo num ponto ω_c, e é crescente em $]0, \omega_c]$ e decrescente em $[\omega_c, +\infty[$. À frequência angular $\omega_c = \sqrt{|\omega_0^2 - (b/a)^2|}$ chama-se **frequência de ressonância** ou **frequência crítica** do sistema.

Quando a equação diferencial considerada é usada para modelar um circuito eléctrico RLC, o termo independente é a derivada $\dot{v}(t)$ da diferença de potencial eléctrico nos terminais do circuito, como se viu no exemplo (4.3). Ao quociente entre a amplitude da diferença de potencial nos terminais e a amplitude da corrente no circuito em regime estacionário, análogo ao valor de uma resistência no caso do circuito ser simplesmente essa resistência, chama-se **módulo da impedância** do circuito a qual se designa por $|Z|$, e à desfasagem φ entre a corrente no circuito e a diferença de potencial nos seus terminais chama-se **argumento da impedância** do circuito. A **impedância** do circuito é o número complexo $Z = |Z|e^{i\varphi}$ com o módulo e argumento referidos. Se $v(t) = -(F_0/\omega)\cos\omega t$ é $\dot{v}(t) = F_0 \sin\omega t$, e a solução estacionária da equação diferencial considerada dá a corrente estacionária no circuito com $a = L$, $2b = R$, $c = 1/C$

$$j(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(1/C - L\omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \ \sin(\omega t - \varphi) \ ,$$

onde

$$\cos\varphi = \frac{1/(\omega C)-L\omega}{\sqrt{[1/(\omega C)-L\omega]^2+R^2}}\ , \quad \sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{[1/(\omega C)-L\omega]^2+R^2}}\ ,$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi = \frac{1/(\omega C)-L\omega+iR}{\sqrt{[1/(\omega C)- L\omega]^2+R^2}}\ .$$

Como $v(t)=-(F_0/\omega)\cos\omega t=(F_0/\omega)\sin(\omega t-\pi/2)$, a impedância do circuito RLC é

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{[1/(\omega C)-L\omega]^2+R^2}\ \ e^{i(\varphi-\pi/2)} \\ &= (1/(\omega C) - L\omega + iR)\,(-i) = R + i\omega\, L + \frac{1}{i\omega\, C}\ . \end{aligned}$$

É fácil ver que a impedância de um circuito que consiste apenas numa resistência R, num condensador de capacidade C ou numa bobina de indutância L é, respectivamente, R, $i\omega\, L$, $1/(i\omega\, C)$, pelo a impedância do circuito em série RLC considerado é a soma das impedâncias de cada um dos seus componentes. O conceito de impedância facilita a análise de circuitos mais complicados e é útil não só em electrotecnia como em mecânica, acústica e noutras situações em que se considerem circuitos de sistemas lineares.

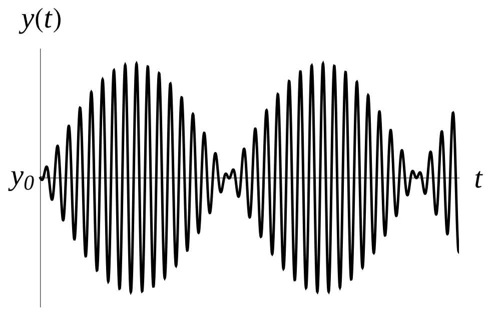

Figura 4.6: Batimento ou modulação em amplitude de soluções da equação diferencial de 2ª ordem sem amortecimento com frequência sinusoidal de excitação próxima da frequência própria da equação

Em situações em que se pretenda que o sistema funcione como detector de sinais com oscilações sinusoidais próximas de uma determinada frequência angular ω_d atenuando sinais sinusoidais com frequências angulares afastadas deste valor, os parâmetros a, b, c do sistema devem ser escolhidos de forma a $\omega_c = \omega_d$. É assim que podem ser calibrados sismógrafos mecânicos para detectar sismos numa certa gama de frequências, assim como circuitos eléctricos sintonizadores de frequências de rádio ou televisão.

Em situações em que se pretenda atenuar as amplitudes de oscilações numa gama de frequências, os parâmetros a, b, c do sistema devem ser escolhidos de forma a ω_c estar afastado desses valores.

É com análises semelhantes, embora para equações diferenciais mais complicadas, que podem ser projectadas as características de pontes para não oscilarem excessivamente sob a acção das oscilações devidas ao tráfego ou a ventos, as características de um automóvel para não oscilar excessivamente sob a acção de oscilações do pavimento, etc. É, também, com análises deste tipo que se podem compreender fenómenos como a vibração de um automóvel a certa velocidade quando as rodas estão descalibradas por ressonância entre a frequência própria de oscilação resultante do desequilíbrio das rodas e a sua frequência de rotação proporcional à velocidade do veículo.

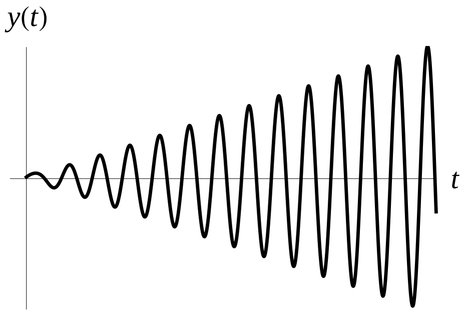

Figura 4.7: Ressonância na equação sem amortecimento com frequência sinusoidal de excitação igual à frequência própria da equação

No caso sem atrito ($b=0$), a frequência angular própria da equação diferencial é $\omega_0=\sqrt{c/a}$. Se o termo independente na equação não homogénea é $F(t)=\sin \omega t$ e $\omega\neq\omega_0$, então uma solução particular da equação é

$$y_p(t) = \frac{F_0}{a(\omega_0^2-\omega^2)} \sin \omega t \ .$$

Neste caso a solução geral da equação homogénea é $A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$, onde $A, B\in\mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. A solução da equação não homogénea com $A=0$ e $B=-F_0/[a(\omega_0^2-\omega^2)]$ é

$$y(t) = \frac{F_0(\sin\omega t-\sin\omega_0 t)}{a(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{2F_0}{a(\omega_0^2-\omega^2)} \sin\frac{(\omega-\omega_0)t}{2} \cos\frac{(\omega+\omega_0)t}{2} \ .$$

Portanto, a equação tem soluções que são proporcionais ao produto de duas sinusóides com frequências de oscilação diferentes. Se a diferença entre a frequência angular ω da excitação do sistema e a frequência própria ω_0 é pequena, esta solução é uma oscilação rápida de frequência angular $(\omega-\omega_0)/2$ com uma amplitude com variação sinusoidal lenta (Figura 4.6). Chama-se a este tipo de evolução dos valores de uma função **batimento** e diz-se que é uma **modulação em amplitude** de uma função sinusoidal. Os sinais deste tipo são audíveis por exemplo quando se afinam dois instrumentos musicais e a nota tocada em ambos é muito próxima.

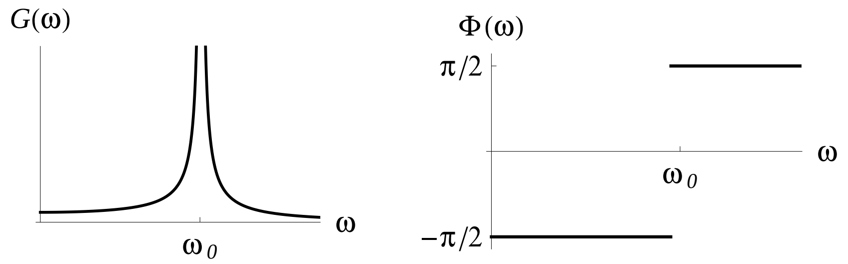

Figura 4.8: Função de transferência do sistema linear definido pela equação sem amortecimento $a\,\ddot{y}+c\,y=F(t)$

A solução particular da equação homogénea foi obtida acima no caso de $\pm i\omega$ não serem valores característicos da equação homogénea, isto é, $b\neq 0$ ou $b=0$, $\omega\neq\omega_0$, onde $\omega_0=\sqrt{c/a}$ é a frequência angular própria da equação diferencial com $b=0$. Portanto, falta obter uma solução particular para o caso da equação sem amortecimento $b=0$ quando a frequência de excitação é igual à frequência própria da equação diferencial, $\omega=\omega_0=\sqrt{c/a}$. Neste caso, o método dos coeficientes indeterminados descrito antes do presente exemplo pode ser aplicado para obter uma solução da forma $y_p(t)=k_1 t\cos\omega t+k_2 t\sin\omega t$ Substituindo a função y_p da forma anterior na equação diferencial obtém-se

$$a\,\ddot{y}_p(t)+c\,y_p(t)=2a\omega k_2\,\cos\omega t-2a\omega k_1\,\sin\omega t=F_0\sin\omega t\,,$$

ou seja obtém-se o sistema de equações lineares $2a\omega k_2=0$, $-2a\omega k_1=F_0$ cuja solução é $k_1=-F_0/(2a\omega)$, $k_2=0$. Neste caso a solução geral da equação homogénea é $A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$, onde $A,B\in\mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Como $\omega=\omega_0$, a solução geral da equação não homogénea obtida adicionando a solução particular obtida à solução geral da equação homogénea é

$$y(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t-\frac{F_0}{2a\omega_0}\,t\,\cos\omega_0 t\,.$$

Todas as soluções são ilimitadas (Figura 4.7) e diz-se que há **ressonância** entre a frequência de excitação e a frequência própria da equação. As oscilações de excitação e as oscilações próprias sobrepõem-se construtivamente dando origem a soluções oscilatórias com amplitudes que crescem linearmente ao longo do tempo.

Das observações anteriores, obtém-se que a função de transferência do sistema sem amortecimento ($b=0$) é dada pelo par de funções (Figura 4.8)

$$G(\omega)=\frac{1}{a\,|\,\omega_0^2-\omega^2|}\,,\qquad \Phi(\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\,, & \text{se }\ \omega<\omega_0\\ +\frac{\pi}{2}\,, & \text{se }\ \omega>\omega_0\,.\end{cases}$$

4.4 Equações lineares de qualquer ordem

O estudo das equações diferenciais ordinárias escalares de qualquer ordem segue os passos do estudo das equações de 2ª ordem nas duas secções anteriores.

Como as soluções de uma equação escalar $y^{(n)}=f\left(t,y,\dot{y},\ddot{y},\dots,y^{(n-1)}\right)$ num intervalo $J\in\mathbb{R}$ são funções C^n de J em $\mathbb{R}$, esta equação é uma equação linear se e só se existe uma transformação linear T de $C^n(J;\mathbb{R})$ em $C^0(J;\mathbb{R})$ e uma função $h\in C^0(J;\mathbb{R})$ tais que a equação é equivalente a $Ty=h$, isto é, se e só se existe $h\in C^0(J;\mathbb{R})$ tal que as funções definidas em $\mathbb{R}^n$ por $\mathbf{y}\mapsto f(t,\mathbf{y})-h(t)$, são lineares para cada t fixo. Estas funções lineares são da forma $f(t,\mathbf{y})=B(t)\mathbf{y}+h(t)$, onde cada $B(t)$ é uma matriz linha, pelo que as equações ordinárias lineares escalares de ordem n consideradas são da forma

$$\boxed{y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=h(t)}\ ,$$

onde a_0, a_1, …, a_{n-1}, h são funções reais de variável real definidas e contínuas num intervalo $J\in\mathbb{R}$. Os casos particulares de equações lineares de 2ª e 1ª ordem, embora incluídos no caso geral estudado nesta secção, foram considerados na secção anterior e no Capítulo, respectivamente.

As equações deste tipo podem-se escrever na forma de equações vectoriais de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$. De facto, com

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y\\ \dot{y}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y^{(n-1)}\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1}\end{bmatrix},\quad \mathbf{h}=\begin{bmatrix} 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ h\end{bmatrix},$$

onde as componentes em branco são nulas, a equação dada é equivalente a

$$\dot{\mathbf{y}}=A(t)\mathbf{y}+\mathbf{h}(t)\ .$$

Assim, as equações diferenciais escalares lineares de ordem n podem ser vistas como casos particulares das equações diferenciais lineares vectoriais de primeira ordem consideradas anteriormente.

Dos resultados estabelecidos na secção **??** resulta que o problema de valor inicial para a equação diferencial vectorial de primeira ordem $\dot{\mathbf{y}}=A(t)\mathbf{y}+\mathbf{h}(t)$, $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}$, tem solução única para cada $t_0\in J$, $\mathbf{y_0}\in\mathbf{R}^n$, que pode ser prolongada a todo o intervalo J. Em consequência, para cada $t_0 \in J$ e $\mathbf{y_0} = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$, a solução do problema de valor inicial para a equação diferencial escalar de ordem n considerada, com $y(t_0) = y_{01}$ $\dot{y}(t_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n}$, existe, é única e pode ser prolongada a todo o intervalo J.

Como sempre para equações lineares, a solução geral da equação considerada pode-se obter somando a uma solução particular da equação a solução geral da equação homogénea correspondente, obtida na equação dada com $h(t) = 0$ para todo $t \in J$, e as soluções satisfazem o **Princípio da Sobreposição**, isto é, uma combinação linear com coeficientes c_1 e c_2 de soluções de equações do tipo indicado com termos independentes $h = h_1$ e $h = h_2$ é solução da equação com o termo independente igual à correspondente combinação linear dos termos independentes das duas equações, $h = c_1 h_1 + c_2 h_2$.

As soluções da equação diferencial escalar homogénea de ordem n podem ser obtidas a partir de uma solução matricial fundamental Y da equação vectorial de primeira ordem associada. De facto, a solução geral da equação vectorial de primeira ordem é $\mathbf{y}(t) = Y(t)\,\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é uma constante arbitrária, as soluções correspondentes da equação escalar são as primeiras componentes das soluções da equação vectorial e as suas derivadas sucessivas são as componentes seguintes das soluções da equação vectorial. Assim, para cada n soluções da equação diferencial escalar homogénea de ordem n convém considerar a função matricial $n \times n$ cuja primeira linha consiste nessas soluções e cada uma das linhas seguintes é a derivada da linha imediatamente anterior.

De modo geral, chama-se **matriz Wronskiana** de n funções $u_1, \dots, u_n$ diferenciáveis num intervalo aberto de números reais a

$$W(u_1, \dots, u_n) = \begin{bmatrix} u_1 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n \\ \dot{u}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{u}_n \\ \ddot{u}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \ddot{u}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

A relação entre as soluções matriciais fundamentais da equação vectorial e as soluções da equação escalar pode ser expressa em termos de matrizes Wronskianas da forma seguinte.

(4.6) **Proposição:** *Uma função Y definida num intervalo $J \subset \mathbb{R}$ cujos valores são matrizes $n \times n$ é uma solução matricial fundamental da equação diferencial linear vectorial associada a uma equação diferencial linear escalar homogénea de ordem n cujos coeficientes são funções contínuas no intervalo J se e só se é uma matriz Wronskiana de n soluções* *linearmente independentes* $u_1, \ldots, u_n : J \to \mathbb{R}$ *da equação linear escalar, i.e.,,* $Y = W(u_1, \ldots, u_n)$*. Um conjunto de* n *soluções* $u_1, \ldots, u_n : J \to \mathbb{R}$ *da equação diferencial linear escalar homogénea é independente se e só se* $W(u_1, \ldots, u_n)(t)$ *é não singular para algum instante* $t \in J$*.*

Dem. A demonstração é análoga à da proposição 4.6, apenas passando as matrizes de 2×2 para $n\times n$ e as soluções consideradas de duas para n. *Q.E.D.*

A proposição precedente estabelece que a matriz Wronskiana W de soluções linearmente independentes $u_1, \ldots, u_n$ da equação escalar homogénea é uma solução matricial fundamental da equação vectorial associada. Por outro lado, as soluções da equação escalar homogénea são as primeiras componentes das soluções da equação vectorial associada.

Como a solução geral da equação vectorial homogénea é $\mathbf{y}(t) = W(t)\,\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é uma constante arbitrária, a **solução geral da equação escalar de ordem n homogénea** é $y(t) = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$, onde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias. Por isso, diz-se que as soluções independentes $u_1, \ldots, u_n$ são um **conjunto fundamental de soluções** da equação escalar homogénea.

A solução do problema de valor inicial para a equação vectorial com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$ é $\mathbf{y}(t) = W(t)W^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0}$. Portanto, com $(y_{01}, \ldots, y_{0n}) = \mathbf{y_0}$, o problema de valor inicial correspondente para a equação escalar de ordem n homogénea é

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t) y = 0 \,, \\ y(t_0) = y_{01}, \quad \ldots \,, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n} \,, \end{gathered} \tag{4.7}$$

ou seja é um problema cujos dados iniciais são os valores da função e das suas derivadas até à ordem $n-1$ no instante inicial t_0.

A **solução do problema de valor inicial para a equação escalar de ordem n** (4.7) é

$$y(t) = [u_1(t) \cdots u_n(t)]\, W^{-1}(t_0)\, \mathbf{y_0} \,.$$

isto é, a solução do problema de valor inicial é uma combinação linear do conjunto das soluções fundamentais $u_1, \ldots, u_n$ da equação, com os coeficientes especificados em termos das condições iniciais e dos valores das soluções fundamentais no instante inicial, nomeadamente pelas componentes do vector $W^{-1}(t_0)\mathbf{y_0}$.

Por outro lado, a fórmula de variação das constantes para a equação vectorial não homogénea é

$$\mathbf{y}(t) = W(t)W^{-1}(t_0)\, \mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} W(t)W^{-1}(s)\, \mathbf{h}(s)\, ds \,.$$

pelo que a **fórmula de variação das constantes para a equação escalar não homogénea**

$$y(t)=[u_1(t)\ \cdots\ u_n(t)]\, W^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0}+[u_1(t)\ \cdots\ u_n(t)]\int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 1\end{bmatrix} h(s)ds.$$

Uma **solução particular da equação escalar não homogénea**, obtida desta fórmula com $\mathbf{y_0}=0$, é

$$y(t)=c_1(t)u_1(t)+\cdots+c_n(t)u_n(t)=[u_1(t)\ \cdots\ u_n(t)]\,\mathbf{c}(t)\ ,$$

com

$$\mathbf{c}(t)=\begin{bmatrix}c_1(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_n(t)\end{bmatrix}=\int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 1\end{bmatrix} h(s)\,ds\ ,$$

onde, devido ao vector coluna que aparece no integral ter todas as componentes nulas excepto a última, basta conhecer a última coluna de $W^{-1}(s)$. Assim, esta solução particular é uma combinação linear das funções que dão a solução geral da equação homogénea associada, excepto que os coeficientes da combinação linear não são constantes, mas sim variáveis dependentes de t de acordo com a última fórmula apresentada acima, o que, como se referiu a propósito da equação escalar de 2ª ordem, está na origem da designação de fórmula de variação das constantes que tem sido usada.

4.5 Equações lineares de qualquer ordem com coeficientes constantes

Como se viu, a resolução completa de uma equação diferencial linear escalar de ordem n depende exclusivamente da determinação de n soluções linearmente independentes da equação homogénea associada. No caso de equações escalares homogéneas de coeficientes constantes

$$\boxed{y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=0}\ ,$$

com $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$, podem-se obter facilmente soluções $u_1,\dots,u_n$ linearmente independentes a partir de uma factorização do polinómio característico da equação

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

em monómios elementares. Pode-se observar que neste caso a equação vectorial associada é $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

onde as componentes em branco representam zeros, a que se chama **matriz companheira** do polinómio p por ter todas as componentes nulas excepto $a_{jk} = 1$ para $k = j + 1$ e as componentes na última linha que são os simétricos dos coeficientes do polinómio p. É fácil verificar que o polinómio característico da equação escalar é igual ou simétrico ao polinómio característico da matriz A, isto é, a $p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$, conforme n é par ou ímpar.

Supõe-se conhecida uma factorização do polinómio característico $p(\lambda)$ na forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_N)^{m_N} \;,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ são os valores próprios complexos da matriz A sem repetições, e $m_1, \ldots, m_N$ são as suas multiplicidades algébricas como raízes da equação característica. É sempre $m_1 + \ldots + m_N = n$. Designando por $Dy = \dot{y}$ o operador derivação, é fácil ver que a equação diferencial homogénea considerada pode ser escrita como

$$\left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I\right) y = 0$$

ou

$$(D - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (D - \lambda_N I)^{m_N}\, y = 0 \;,$$

onde a ordem em que aparecem os factores $(D - \lambda_j I)^{m_j}$ nesta factorização é arbitrária. Portanto, uma maneira de obter soluções da equação é resolver cada uma das equações $(D - \lambda_j I)^{m_j} y = 0$.

É fácil verificar por indução em m que a equação $(D - \lambda I)^m y = 0$ admite as soluções complexas $y_0(t) = e^{\lambda t}$, $y_1(t) = t\, e^{\lambda t}, \ldots,\, y_{m-1}(t) = t^{m-1} e^{\lambda t}$. Estas soluções são também reais sempre que λ é real. Se $\lambda = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, não é real (*i.e.*, $b \neq 0$) e se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ são números reais, então as raízes do polinómio ocorrem em pares conjugados, pelo que se λ é uma raiz também $\bar{\lambda}$ é uma raiz com a mesma multiplicidade algébrica. Associando os dois termos na factorização correspondentes a complexos conjugados obtêm-se equações $(D - \lambda I)^m (D - \bar{\lambda} I)^m y = 0$, que são equivalentes a $[(D - \lambda I)(D - \bar{\lambda} I)]^m y = 0$

e a $\left[D^2-(\lambda+\bar{\lambda})D+\lambda\bar{\lambda}I\right]^m y=0$, ou seja a $\left[D^2-2aD+(a^2+b^2)I\right]^m y=0$. É fácil verificar que esta equação admite as soluções reais obtidas das partes reais e imaginárias das soluções complexas de $(D-\lambda I)^m y=0$, nomeadamente

$$\begin{array}{llll} z_0(t)=e^{at}\cos bt\,, & z_1(t)=t\,e^{at}\cos bt\,, & \ldots, & z_{m-1}(t)=t^{m-1}e^{at}\cos bt \\ w_0(t)=e^{at}\sin bt\,, & w_1(t)=t\,e^{at}\sin bt\,, & \ldots, & w_{m-1}(t)=t^{m-1}e^{at}\sin bt\,. \end{array}$$

Assim, supondo que $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k$ são da forma $\lambda_j=a_j+ib_j$ com $a_j,\ b_j\in\mathbb{R}$ e $b_j>0$, $\lambda_{k+1}=\bar{\lambda}_1,\ \ldots,\ \lambda_{k+k}=\bar{\lambda}_k$ e $\lambda_{2k+1},\ \ldots,\ \lambda_N$ são reais, conclui-se que a equação diferencial escalar considerada admite as soluções reais

$$y_{jm}(t)=\begin{cases} t^m e^{a_j t}\cos b_j t & (j=1,\ldots,k,\ m=0,\ldots,m_j-1) \\ t^m e^{a_j t}\sin b_j t & (j=1,\ldots,k,\ m=0,\ldots,m_j-1) \\ t^m e^{\lambda_j t} & (j=2k+1,\ldots,N,\ m=0,\ldots,m_j-1)\,. \end{cases}$$

Estas funções são n soluções reais. Deixa-se como exercício provar que são linearmente independentes. A partir destas soluções pode-se obter uma matriz Wronskiana W apropriada à resolução da equação colocando estas funções por uma ordem arbitrária na primeira linha e calculando cada uma das restantes linhas por derivação da linha imediatamente anterior. A solução geral da equação homogénea, a solução de um problema de valor inicial, a solução geral de uma equação não homogénea correspondente, e uma solução particular de uma dessas equações não homogéneas podem todas ser obtidas de W como foi indicado acima. Por exemplo, a solução geral da equação homogénea é simplesmente uma combinação linear das funções y_{jm} com coeficientes reais arbitrários.

(4.8) **Exemplo:** Considera-se a equação

$$y''''' + y'''' + 8y''' + 8y'' + 16y' + 16y = t-2\,.$$

O polinómio característico da equação homogénea associada é

$$p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4+8\lambda^3+8\lambda^2+16\lambda+16$$

e pode ser factorizado na forma $p(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda^2+4)$. As funções e^{-t}, $\cos 2t$, $\sin 2t$, $t\,\sin 2t$, $t\,\cos 2t$ são soluções linearmente independentes da equação homogénea. Portanto, a solução geral da equação homogénea é

$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2\cos 2t+c_3\sin 2t+c_4\,t\,\sin 2t+c_5\,t\,\cos 2t\,,$$

onde $c_j\in\mathbb{R}$ e $j=1,2\cdots,5$. A primeira linha da matriz Wronskiana W das cinco soluções linearmente independentes consideradas consiste nessas soluções e cada uma das linhas seguintes consiste nas derivadas da linha imediatamente anterior. Pode ser obtida uma solução particular da equação não homogénea dada pela fórmula de variação das constantes

$$y(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & \cos 2t & \sin 2t & t\sin 2t & t\cos 2t \end{bmatrix}\int_{y_0}^{t} W^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} h(s)\,ds\,.$$

Note-se que para calcular a função integranda na expressão anterior basta conhecer a última coluna de W^{-1}.

A fórmula de variação das constantes obtida anteriormente dá um método geral para calcular soluções particulares de equações não homogéneas, contudo, tal como se viu a propósito da equação escalar de 2ª ordem, há certos tipos de funções que quando aparecem como termo independente da equação diferencial homogénea permitem obter uma solução particular muito mais simplesmente pelo método dos coeficientes indeterminados. Mostra-se aqui que tal é possível sempre que o termo independente é uma combinação linear de funções das formas

$$t^{m-1}e^{at}, \qquad t^{m-1}e^{at}\cos bt, \qquad t^{m-1}e^{at}\sin bt\;,$$

onde $m\in\mathbb{N}$ e $a,b\in\mathbb{R}$, ou seja é uma combinação linear de funções polinomiais, funções exponenciais, e funções seno ou coseno, ou, dito de outra forma, é uma combinação linear de produtos que envolvem uma função de cada um destes três tipos.

A equação escalar de ordem n com coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = h(t) \tag{4.9}$$

pode ser escrita em termos do operador derivação na forma

$$\big(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I\big)\, y = h\;.$$

Se o termo independente h é solução de uma outra equação diferencial homogénea de ordem m com coeficientes constantes

$$\big(D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0 I\big)\, h = 0\;,$$

as soluções da equação não homogénea de ordem n dada são soluções da equação homogénea de ordem $n+m$

$$\big(D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \cdots + b_0 I\big)\,\big(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 I\big)\, y = 0\;.$$

Logo, podem ser obtidas soluções particulares da equação não homogénea dada como combinações lineares de certas funções de um conjunto de soluções fundamentais desta equação homogénea de ordem $n+m$.

No caso em que os polinómios característicos das equações homogéneas

$$\begin{aligned} &\big(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 I\big)\, y = 0 \,, \\ &\big(D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \cdots + b_0 I\big)\, z = 0 \,, \end{aligned} \tag{4.10}$$

não têm raízes comuns, a solução geral da equação de ordem $m{+}n$ acima é uma combinação linear $ay+bz$ das soluções gerais das equações homogéneas de ordem n e m. Como ay é solução da equação homogénea da equação dada, substituindo-a no lado esquerdo da equação dada (4.9) dá zero, pelo que uma solução particular desta equação não homogénea deve ser procurada a partir da solução geral da última equação em (4.10). Assim, uma vez obtida a solução geral desta equação homogénea de ordem m como combinação linear de um conjunto de soluções fundamentais, pode-se substitui-la na equação não homogénea dada (4.9) e obter os coeficientes da combinação linear que fazem com que a equação seja satisfeita, isto é, se $u_1,\ldots,u_m$ for um conjunto fundamental de soluções da equação de ordem m e, portanto, a solução geral desta equação for $z=k_1u_1+\cdots+k_mu_m$, substitui-se esta expressão na equação (4.9) e determinam-se os coeficientes $k_1,\ldots,k_m$ que fazem com que esta equação se verifique.

No caso em que os polinómios característicos das equações homogéneas (4.10) têm raízes comuns, a factorização em monómios do polinómio característico da equação de ordem $m{+}n$ acima envolve monómios que aparecem nos polinómios característicos das duas equações homogéneas em (4.10). Se um monómio correspondente a uma determinada raiz λ_j aparece com multiplicidade n_j e m_j no polinómio característico respectivamente da primeira e da segunda das equações homogéneas, então o correspondente monómio na factorização do polinómio característico da equação homogénea de ordem $m+n$ acima aparece com multiplicidade $n_j+ m_j$. Como se viu acima, se λ_j é um valor característico real da equação dada com multiplicidade n_j, um conjunto fundamental de soluções para a equação $(D-\lambda_j)^{n_j}=0$ é $t^s e^{\lambda_j t}$ com $s=0,1,\ldots,n_j-1$, e se $\lambda_j=a_j+ib_j$ com $a_j\in\mathbb{R}, b_j\in\mathbb{R}^+$ é um valor característico que não é real com multiplicidade n_j, então o complexo conjugado de λ_1 também é um valor característico da mesma multiplicidade para a mesma equação e um conjunto fundamental de soluções para a equação $\big[(D-\lambda_j)(D-\bar\lambda_j)\big]^{n_j}=0$ é $t^s e^{a_j t}\cos b_j t,\ t^s e^{a_j t}\sin b_j t$ com $s=0,1,\ldots,n_j-1$. Portanto, os termos correspondentes a este valor característico que interessam para obter uma solução particular da equação não homogénea dada (4.9) são os termos das formas indicadas com $s=n_j, n_j+1\ldots, n_j+m_j-1$. Por outras palavras, procura-se uma solução da equação não homogénea dada (4.9) como combinação linear com coeficientes indeterminados do conjunto fundamental de soluções da segunda equação homogénea (4.10) das formas indicadas, onde as soluções que também são soluções da equação homogénea da equação linear dada são substituídas pelas funções que se obtêm multiplicando-as por t^r, onde r é a multiplicidade do correspondente valor característico da equação homogénea da equação dada.

Como se sabe, $t^{k-1}e^{at}$ é solução de equações cujo polinómio característico tem raíz a de multiplicidade k, e as funções $t^{k-1}e^{at}\cos bt$, $t^{k-1}e^{at}\sin bt$ são soluções de equações cujos polinómios característicos têm raízes complexas $a\pm bi$ com multiplicidade k. Portanto, como se referiu no início, este processo pode ser aplicado para determinar soluções particulares de equações não homogéneas cujo termo independente seja uma combinação linear de funções destes tipos pelo método dos coeficientes indeterminados.

(4.11) **Exemplos:**

1. Pretende-se determinar uma solução particular da equação diferencial $y''''+9y=t^3+t+1$. Observa-se que $h(t)=t^3+t+1$ satisfaz a equação $D^4h=0$ e esta não tem valores característicos comuns com a equação dada. A solução geral de $D^4z=0$ é $z(t)=c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3$. Procurando uma solução da forma de z para a equação não homogénea dada, obtém-se $9(c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3)=t^3+t+1$, de onde $c_1=1/9$, $c_2=1/9$, $c_3=0$, $c_4=1/9$. Portanto, uma solução particular da equação considerada é $y(t)=(1+t+t^3)/9$.

2. Pretende-se determinar uma solução particular da equação diferencial $y'''+4y''+y=(1+t)\,e^t+t\,e^{2t}\cos t$. Define-se $h_1(t)=(1+t)\,e^t$ e $h_2(t)=t\,e^{2t}\cos t$, e considera-se separadamente o cálculo de soluções particulares das equações com termo independente h_1 ou h_2.

   A função h_1 satisfaz a equação $(D-I)^2h_1=0$ cuja solução geral é $z(t)=c_1e^t+c_2te^t$. A função e^t não é solução da equação homogénea da equação dada, pelo que as equações não têm valores característicos comuns. Uma solução da equação não homogénea dada da forma de z tem de satisfazer $[(6c_1+11c_2)+6c_2t]\,e^t=(1+t)\,e^t$, de onde $c_2=1/6$, $c_1=-5/36$. Logo, uma solução particular da equação não homogénea com termo independente h_1 é $y_1(t)=(-5+6t)\ e^t/36$.

   Por outro lado, a função $h_2(t)=t\,e^{2t}\cos t$ satisfaz $(D^2-4D+5I)^2h_2=0$. A solução geral de $(D^2-4D+5I)^2z=0$ é

   $$z(t)=[\ (c_1+c_2t)\sin t+(c_3+c_4)\ t\ \cos t\ ]\ e^{2t}\ .$$

   A função complexa $e^{(2+i)t}$ não é solução da equação homogénea da equação dada, pelo que as duas equações não têm valores característicos comuns. Para uma função da forma de z tem de ser

$$\begin{aligned}&[(15c_1+25c_2-27c_3-6c_4)+(15c_2-27c_4)\,t\,]\,e^{2t}\sin t\\ &\qquad+[(27c_1+20c_2+15c_3+25c_4)+(27c_2+15c_4)\,t\,]\,e^{2t}\cos t = t\,e^{2t}\cos t.\end{aligned}$$

Logo, z é uma solução particular da equação não homogénea com termo independente h_2 se e só se os coeficientes c_j na última equação obtida satisfazem o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{rrrr} 15c_1+25c_2 & -27c_3 & -6c_4 & =0\\ 27c_1+20c_2 & +15c_3 & +25c_4 & =0\\ 15c_2 & & -27c_4 & =0\\ 27c_2 & & +15c_4 & =1 \end{array}\ .$$

Este sistema tem como solução $c_2=3/106$, $c_4=5/318$, $c_1=310/8427$, $c_3=115/50562$, pelo que uma solução particular da equação homogénea com termo independente h_2 é

$$y_2(t)=\left[\left(-\frac{310}{8427}+\frac{3}{106}\,t\right)\sin t+\left(\frac{115}{50562}+\frac{5}{318}\,t\right)\cos t\right]e^{2t}\ .$$

Adicionando as soluções particulares y_1, y_2 obtidas para as equações não homogéneas com termos independentes h_1 e h_2, respectivamente, obtém-se uma solução particular para a equação dada no início.

Por razões que são óbvias ao analisar os exemplos anteriores, este último método de cálculo de soluções particulares apresentado é conhecido por **método dos coeficientes indeterminados**.

4.6 Existência, unicidade, prolongamento e dependência contínua de condições iniciais e parâmetros

Como na secção anterior para equações lineares, uma equação escalar da forma $y^{(n)}=f\left(t,y,\dot y,\dots,y^{(n-1)}\right)$ pode ser escrita como uma equação vectorial de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$. Na verdade, com $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)$, $y_1=y$, $y_2=\dot y$, $y_3=\ddot y$, $\dots,y_n=y^{(n-1)}$ e $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})=(y_2,y_3,\dots,f(t,\mathbf{y}))$, a equação diferencial escalar dada é equivalente à equação diferencial vectorial de primeira ordem $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$.

O Teorema de Picard-Lindelöf garante que se $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $(t_0,\mathbf{y_0})\in D$ e $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ é localmente lipschitziana em relação a $\mathbf{y}$ em D, então a solução do problema de valor inicial $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}$, existe e é única. Por outro lado, o teorema de prolongamento de soluções a intervalos máximos de definição considerado no capítulo **??** garante que nessas condições a solução pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição $]a, b[\subset \mathbb{R}$ tal que quando t tende para a ou b então $(t, \mathbf{y}(t)) \to \partial D$ ou $\|(t, \mathbf{y}(t))\| \to +\infty$. É fácil observar que $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ é localmente lipschitziana relativamente a $\mathbf{y}$ em D se e só se $f(t, \mathbf{y})$ for localmente lipschitziana relativamente a $\mathbf{y}$ em D. Portanto, temos, o resultado seguinte.

(4.12) **Teorema:** *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f: D \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(t, \mathbf{y})$ é localmente lipschitziana em relação a $\mathbf{y}$ em D, e $(t_0, y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in D$. Então a solução do problema de valor inicial*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

$$y(t_0) = y_{01}, \quad \dot{y}(t_0) = y_{02}, \quad \ddot{y}(t_0) = y_{03}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n},$$

existe e é única num intervalo máximo de definição $]a, b[\in \mathbb{R}$ tal que quando t se aproxima de cada um dos extremos do intervalo verifica-se

$$\left(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right) \to \partial D \text{ ou } \left\|\left(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)\right\| \to +\infty.$$

Do mesmo modo, os resultados de dependência contínua em relação aos dados estabelecidos no capítulo **??**, nomeadamente em relação a condições iniciais e a parâmetros da equação diferencial, podem ser aplicados às equações diferenciais vectoriais de primeira ordem equivalentes a equações diferenciais escalares para obter resultados idênticos para estas equações.

4.7 Redução de ordem

Já se observou que não é de esperar conseguir resolver em termos de funções elementares senão uma classe bastante restrita de equações diferenciais. No caso de equações diferenciais de 1ª ordem escalares viu-se no capítulo 1 que se conseguem resolver as equações exactas ou redutíveis a exactas por multiplicação por um factor de integração ou mudança de variáveis, quando uma função potencial associada à equação exacta pode ser expressa em termos de funções elementares. É muitas vezes útil tentar tirar partido deste facto para equações de ordem maior do que 1, procurando reduzi-las a 1ª ordem para depois aplicar os métodos disponíveis para resolução destas equações.

(4.13) **Exemplos:**

1. Uma equação diferencial linear de 2ª ordem $y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t)$, onde a, b, h são funções reais definidas e contínuas num intervalo

$J \subset \mathbb{R}$ pode ser reduzida a uma equação de 1^{a} ordem se for conhecida uma solução u da equação homogénea correspondente. Na verdade, podem-se procurar soluções para a equação dada da forma $y = uv$, onde v é uma função C^2, substituindo esta expressão para y na equação, o que dá

$$\big(u'' + a(t)u' + b(t)u\big)\, v + \big(uv'' + 2u'v' + a(t)uv'\big) = h(t)\ .$$

Como u satisfaz $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$, concluiu-se que $y = uv$ é solução da equação dada se e só se $w = v'$ é solução da equação de 1^{a} ordem $uw' + [2u' + a(t)u]\, w = h(t)$. Uma vez obtidas as soluções w desta equação de 1^{a} ordem, primitivando-as obtêm-se as funções v tais que $y = uv$ é solução da equação de 2^{a} ordem inicial, isto é, as soluções são $y(t) = u(t) \int v(t)\, dt$.

2. Uma equação da forma $\ddot{y} = f(t, \dot{y})$, onde f é C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, com substituição $v = \dot{y}$ pode ser reduzida à equação de 1^{a} ordem $\dot{v} = f(t, v)$. Se for possível obter as soluções v desta equação, primitivando-as obtêm-se as soluções da equação considerada no início $y(t) = \int v(t)\, dt$.

3. Uma equação da forma $\ddot{y} = g(y, \dot{y})$, onde g é C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, com a substituição $v = \dot{y}$ é transformada em $\dot{v}(t) = g(y(t), v(t))$. Se V for uma função tal que $v(t) = V(y(t))$, é $\dot{v}(t) = V'(y(t))\dot{y}(t)$ e, portanto, $V'(y) = g(y, V(y))/V(y)$, desde que $V(y) \neq 0$, que é uma equação de 1^{a} ordem separável. A partir de cada solução $V(y)$ desta equação obtém-se uma solução da equação de 2^{a} ordem inicial resolvendo a equação de 1^{a} ordem $\dot{y} = V(y)$, que também é separável.

Os três exemplos anteriores ilustram com equações de 2^{a} ordem vários casos de redução de ordem que se podem considerar para equações diferenciais escalares de qualquer ordem $n > 1$, isto é, equações da forma $y^{(n)} = f\big(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\big)$, onde f é C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Ficamos, assim, a poder reduzir a ordem nos três casos seguintes:

1. $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = h(t)$, onde a_j, para $j = 0, \cdots, n-1$, são funções definidas e contínuas num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, quando é conhecida uma solução u da equação homogénea associada;

2. $y^{(n)} = f\big(t, y^{(n-1)}\big)$;

3. $y^{(n)} = g\big(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}\big)$.

No primeiro caso a equação dada pode ser escrita $L(y) = h$, onde $L : C^n(J; \mathbb{R}) \to C^0(J; \mathbb{R})$ é a transformação linear definida por $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y$, e tem-se $L(u) = 0$. A substituição

$y = uv$ transforma a equação dada em $L(u)v + G(u,v) = h$ que é equivalente a $G(u,v) = h$, pois $L(u) = 0$. A função $v \mapsto G(u,v) = L(uv) - L(u)v$ é uma transformação linear. Como a função u é conhecida, é fácil verificar que a equação $G(u,v) = h$ é uma equação diferencial linear escalar de ordem menor ou igual a $n-1$.

No segundo caso a substituição $v = y^{(n-1)}$ dá a equação de 1ª ordem $\dot{v} = f(t,v)$. Uma vez obtida uma solução desta equação, podem ser obtidas soluções correspondentes da equação dada por n–1 primitivações sucessivas.

No terceiro caso a substituição $v = y^{(n-1)}$, $u = y^{(n-2)}$ dá $\dot{v}(t) = g(u(t), v(t))$. Se V for uma função tal que $v(t) = V(u(t))$, verifica-se $\dot{v}(t) = V'(u(t))\dot{u}(t)$ e, portanto, $V'(u) = g(u, V(u))/V(u)$, desde que $V(u) \neq 0$, que é uma equação de 1ª ordem separável. A partir de cada solução $V(u)$ desta equação procura-se obter derivadas $y^{(n-2)}$ de soluções da equação de ordem n dada resolvendo a equação separável de 1ª ordem $\dot{u} = V(u)$. A partir de uma solução desta equação, podem ser obtidas soluções correspondentes da equação dada por $n-2$ primitivações sucessivas.

(4.14) **Exemplos:**

1. Considera-se as **equações diferenciais de Legendre**[2]

$$(1-t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + \alpha(\alpha+1)y = 0\,, \quad \text{com } t \in]-1,1[\,,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante a que se chama a **ordem da equação de Legendre**.

Procuram-se soluções da forma $u(t) = t^\beta$. Para que u seja solução da equação tem de ser: *(i)* $\beta = 0$ e ($\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$), ou *(ii)* $\beta = 1$ e ($\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$). Substituindo $y = uv$ na equação obtém-se

$$v'[(1-t^2)2\beta t^{\beta-1} - 2t^{\beta+1}] + v''(1-t^2)t^\beta = 0\,,$$

ou seja $v'' + 2\left[(\beta/t) - t/(1-t^2)\right] v' = 0$. Logo

$$\begin{aligned} v'(t) &= e^{-\int 2\left[(\beta/t)-t/(1-t^2)\right]dt} = c_1 e^{-2\beta \ln|t| - \ln(1-t^2)} \\ &= \frac{c_1}{t^{2\beta}(1-t^2)} = c_1\left(\frac{\beta}{t^{2\beta}} + \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t}\right)\,, \end{aligned}$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, e uma solução é

$$v(t) = c_1\left[\frac{\beta\, t^{1-2\beta}}{1-2\beta} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right] + c_2\,,$$

[2] Legendre, Adrien Marie (1752-1833). As equações de Legendre aparecem naturalmente ao tentar resolver a equação de Laplace, referida na introdução, em situações de simetria esférica, em particular em mecânica, propagação de calor e electromagnetismo.

onde $c_2 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Assim, uma solução da equação inicial independente de u é

$$y(t) = u(t)v(t) = \frac{\beta\, t^{1-\beta}}{1-2\beta} + \frac{t^\beta}{2}\ \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) .$$

Como se sabe que o conjunto de soluções da equação diferencial homogénea dada é um espaço linear de dimensão dois, as funções u e y formam são uma base do espaço de soluções da equação.

2. Considera-se a equação $ty''' + y'' = 1$ para $t > 0$. Com a substituição $v = y''$ obtém-se a equação de 1ª ordem $t\dot{v} + v = 1$. A solução geral desta equação é

$$v(t) = c_1 e^{-\int 1/t\,dt} + 1 = c_1 e^{-\ln t} + 1 = \frac{c_1}{t} + 1 .$$

Então,

$$y'(t) = \int y''(t)\,dt = \int v(t)\,dt = c_1 \ln t + t + c_2 ,$$

$$y(t) = \int y'(t)\,dt = c_1 \int \ln t\,dt + \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3 = c_1 t \ln t + \frac{t^2}{2} + (c_2 - c_1)t + c_3$$

é a solução geral da equação dada, onde c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$.

3. Considera-se o problema de valor inicial $y''' + y'(y'')^3 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$. Com a substituição $v = y''$ e $u = y'$ obtém-se $v'(t) = -u(t)v^3(t)$. Procura-se uma função V tal que $v(t) = V(u(t))$. Como $v'(t) = V'(u(t))u'(t) = V'(u(t))v(t)$, segue-se que $V'(u) = -uV^3(u)/V(u) = -uV^2(u)$. Esta equação de 1ª ordem é separável em pontos onde $V(u) \neq 0$, na forma $V'(u)/V^2(u) = -u$. Integrando, obtém-se $1/V(u) = u^2/2 + c_1$. Para que a condição inicial seja satisfeita tem de ser $v(1) = y''(1) = 2$ e $u(1) = y'(1) = 1$, pelo que $V(u(1)) = v(1)$ dá $V(1) = 2$, o que só é possível com $c_1 = 0$. Portanto, desde que $u \neq 0$, é $V(u) = 2/u^2$. Note-se que $V(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

   Como $u' = v$ e $v(t) = V(u(t))$, procura-se agora resolver $u' = V(u)$, ou seja $u^2 u' = 2$. Esta equação separável pode ser integrada e dá $u^3(t)/3 = 2t + c_2$. A condição inicial $u(1) = y'(1) = 1$ exige $c_2 = -5/3$. Logo $y'(t) = u(t) = (6t-5)^{1/3}$. Integrando, obtém-se $y(t) = (6t-5)^{4/3}/8 + c_3$, e a condição inicial $y(1) = 1$ obriga a $c_3 = 7/8$. Assim, a solução do problema de valor inicial considerado é $y(t) = \left[(6t-5)^{4/3} + 7\right]/8$. Nos cálculos tinha sido considerado $u \neq 0$. Ora $u(t) = (6t-5)^{1/3}$ anula-se no ponto $t = 5/6$. Procura-se, então, verificar se a solução y obtida satisfaz a equação diferencial dada em $t = 5/6$. Verifica-se $y'(t) = (6t-5)^{1/3}$ e $y''(t) = 2(6t-5)^{-2/3}$, pelo que $y''(t) \to +\infty$ quando

$t \to 5/6$. Assim, a solução obtida não pode ser estendida como função C^2 a $t = 5/6$. Conclui-se que a solução do problema de valor inicial considerado está definida para $t \in]\, 5/6, +\infty\, [$.

Em geral, a possibilidade de redução de ordem de equações diferenciais está associada a simetrias na equação diferencial que podem ser expressas em termos de invariância sob grupos de Lie. Os casos anteriormente referidos são situação particularmente simples de simetrias. Esta perspectiva geral é muito útil, mas não será considerada neste texto.

4.8 Notas históricas

A equação linear de segunda ordem correspondente ao oscilador harmónico forçado sinusoidalmente foi resolvida por L. Euler em 1739, em particular observando a possibilidade de ressonância. A solução geral de uma equação diferencial linear escalar homogénea de ordem maior que 1 com coeficientes constantes deve-se a Euler, em 1743, que também considerou a resolução de equações lineares não homogéneas em 1750 e 1753.

Como se referiu no capítulo anterior, a noção de conjunto fundamental de soluções de uma equação linear homogénea deve-se a J.L. Lagrange, por volta de 1765. Foi também Lagrange que introduziu o método de variação das constantes em 1774-75.

A redução de ordem de uma equação diferencial linear escalar a partir de uma solução conhecida foi pela primeira vez aplicada por J. d'Alembert em 1762-65.

As soluções polinomiais de equações diferenciais de Legendre de ordem inteira são conhecidas por **polinómios de Legendre** e têm várias aplicações de interesse. Estas funções foram introduzidas por A.M. Legendre no âmbito dos seus estudos sobre a atracção entre corpos esféricos.