Capítulo 3

Equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem

3.1 Introdução

Ao estudar equações ordinárias escalares no capítulo 1 observou-se que as equações que se podem resolver em termos de funções elementares são muito especiais. Há, no entanto, uma importante classe de equações ordinárias para as quais existe uma teoria quantitativa satisfatória em forma definitiva: as equações diferenciais lineares.

Em geral, diz-se que uma equação é linear se é equivalente a uma equação do tipo $Tx = b$, onde T é uma transformação linear. Como se considera que as soluções de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem são funções C^1 num intervalo J, as equações diferenciais lineares de 1ª ordem são as da forma geral anterior em que T é uma transformação linear definida em $C^1(J)$ e com valores em $C^0(J)$. No capítulo 1 já se considerou o caso de equações diferenciais lineares escalares de 1ª ordem. Portanto, diz-se que uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, com $t \in J \subset \mathbb{R}$ e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{C}^n$), é uma **equação diferencial linear** se é equivalente a uma equação da forma $T\mathbf{y} = \mathbf{h}$, onde $T : C^1(J) \to C^0(J)$ é uma transformação linear e $\mathbf{h} \in C^0(J)$. Como a função $\mathbf{y} \mapsto \dot{\mathbf{y}}$ de $C^1(J)$ em $C^0(J)$ é linear, conclui-se que $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ é uma equação diferencial linear se e só se $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{h}(t)$, $\mathbf{h}$ é uma função contínua em J e a função $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ é linear em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), para cada t fixo.

Atendendo a que as transformações lineares podem ser representadas por matrizes em relação a uma base do espaço, tomando a base canónica de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) conclui-se que as equações diferenciais ordinárias lineares são da forma $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$, onde A e $\mathbf{h}$ são funções de variável real que têm como valores matrizes $n \times n$ de componentes reais (ou complexas) e vectores de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), respectivamente. Diz-se que a equação tem **coeficientes constantes** se $A(t)$ é uma matriz constante.

A importância das equações diferenciais ordinárias lineares resulta de três aspectos:

- são a única grande classe de equações diferenciais ordinárias para que existe uma teoria quantitativa satisfatória;

- como as equações lineares são geralmente mais simples de analisar do que as não lineares, é conveniente adoptar modelos lineares em aplicações sempre que possível, em particular em situações de projecto em Engenharia onde haja a possibilidade de realizar o objectivo pretendido com sistemas lineares;

- uma das técnicas mais simples para análise de equações não lineares localmente em torno de soluções específicas é a linearização da equação ao longo dessas soluções, obtendo-se um sistema linear que, localmente, pode constituir uma boa aproximação do sistema não linear considerado se forem satisfeitas condições apropriadas.

O estudo de equações diferenciais lineares baseia-se em métodos gerais de Álgebra Linear. São propriedades gerais das equações lineares não homogéneas $Tx=b$ que todas as soluções se obtêm adicionando a uma solução particular da equação não homogénea todas as soluções da equação homogénea associada, $Tx=0$, e que as soluções de uma equação homogénea linear formam um espaço linear. Em particular, é válido o **princípio da sobreposição** para soluções de equações lineares homogéneas: a soma de soluções é uma solução e múltiplos de soluções são soluções. Se o espaço das soluções da equação homogénea tem dimensão finita, então todas as soluções desta equação são combinações lineares de um conjunto finito de soluções que forma uma base do espaço.

De forma a facilitar a leitura, estes e outros aspectos gerais da Álgebra Linear que podem não ter sido tratados numa disciplina elementar nesse tópico são referidos no apêndice E.

3.2 Equações com coeficientes constantes

Consideram-se nesta secção equações da forma

$$\boxed{\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)}\ ,$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de componentes reais (ou complexas) e $\mathbf{h}$ é uma função definida num intervalo $J \in \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Sabe-se da Álgebra Linear (ver apêndice E) que a solução geral de uma equação linear pode ser obtida adicionando a uma solução particular da equação a solução geral da equação diferencial linear homogénea correspondente, neste caso

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \, .$$

Portanto, tratam-se separadamente estas duas questões: primeiro o cálculo da solução geral de equações homogéneas e depois o cálculo de uma solução particular de equações não homogéneas.

As soluções de equações lineares homogéneas de coeficientes constantes podem ser expressas em termos de exponenciais de matrizes. Uma maneira de definir exponenciais de matrizes é pela generalização da fórmula que dá a exponencial de números reais por uma série de potências $e^a = \sum_{k=0}^{\infty} a^k/k!$. Assim, a **exponencial da matriz** A $n\times n$ de componentes reais (ou complexas) é a matriz $n\times n$ definida por $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$. É óbvio que se 0 é a matriz nula $n\times n$, então $e^0 = I$ é a matriz identidade $n\times n$. Para estudar outras propriedades de exponenciais de matrizes é necessário começar por esclarecer alguns aspectos relativos a séries de matrizes.

Dada uma sucessão $\{C_k\}$ de matrizes $m\times n$ com $C_k = [(c_k)_{js}]$, diz-se que $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ é uma **série de matrizes convergente** se cada uma das séries numéricas $\sum_{k=0}^{\infty} (c_k)_{js}$ correspondentes a uma mesma componente-js da matriz é convergente e, então, a **soma da série de matrizes** é a matriz $m\times n$ cuja componente-js é a soma da séria numérica anterior. Se $A = [a_{js}]$ é uma matriz $m\times n$ de componentes reais ou complexas, considera-se a **norma da matriz** A definida por $\|A\| = \sum_{j,s} |a_{js}|$.

(3.1) **Proposição:** *Se A, B são matrizes de componentes reais (ou complexas) e c é um escalar real (ou complexo) então:*

1. $\|A\| = 0$ *se e só se* $A = 0$ *;*
2. $\|cA\| = |c|\,\|A\|$ *;*
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *;*
4. $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Dem. Deixa-se como exercício. *Q.E.D.*

(3.2) **Proposição:** *Se $\{C_k\}$ é uma sucessão de matrizes $m\times n$ de componentes reais (ou complexas) tal que a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \|C_k\|$ converge, então a série de matrizes $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ também converge.*

Dem. Se $C_k = [(c_k)_{js}]$, então $|(c_k)_{js}| \leq \|C_k\|$. Como a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \|C_k\|$ é convergente, também as séries numéricas $\sum_{k=0}^{\infty} (c_k)_{js}$ são absolutamente convergentes e, portanto, a série de matrizes $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ converge. *Q.E.D.*

Resulta das duas últimas proposições que a série que define a exponencial e^A é convergente qualquer que seja a matriz quadrada A.

(3.3) **Proposição:** *Se A é uma matriz quadrada de componentes reais (ou complexas), então a série em $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ é convergente e* $\left\|e^A\right\| \leq e^{\|A\|}$.

Dem. A Proposição (3.1) implica $\left\|A^k/k!\right\| \leq \|A\|^k/k!$. Como se verifica $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k/k! = e^{\|A\|}$, concluiu-se que $\sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^k/k!\right\|$ converge. A Proposição (3.2) garante que também $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ converge. É claro que $\left\|e^A\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^k/k!\right\| = e^{\|A\|}$. *Q.E.D.*

A continuidade, as derivadas e os integrais de funções matriciais de variável real definem-se, respectivamente, pela continuidade, derivadas e integrais de cada uma das componentes das matrizes. Mais precisamente, se P é uma função definida num conjunto de números reais cujos valores são matrizes $m \times n$ de componentes reais (ou complexas), $P(t) = [p_{js}(t)]$, diz-se que P é **contínua** num ponto t se todas as componentes p_{js} são contínuas em t; diz-se que P é **diferenciável** em t se todas as componentes p_{js} são diferenciáveis em t e define-se a derivada de P como sendo a matriz cujas componentes são as derivadas das componentes correspondentes de P, isto é, $\dot{P} = [\dot{p}_{js}(t)]$; diz-se que P é integrável num intervalo $J \subset \mathbb{R}$ se todas as suas componentes p_{js} são integráveis nesse intervalo e define-se o integral de P em J como sendo a matriz cujas componentes são os integrais em J das componentes correspondentes de P, isto é, $\int_J P = \left[\int_J p_{js}\right]$.

Para obter a solução geral da equação diferencial vectorial $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, onde A é uma matriz $n \times n$, em termos de exponenciais de matrizes, convém considerar primeiro a equação diferencial matricial $\dot{Y} = AY$, onde Y é uma função de variável real cujos valores são matrizes $n \times n$ de componentes reais (ou complexas).

(3.4) **Teorema:** *Seja A uma matriz $n \times n$ de componentes reais (ou complexas). Então a função matricial definida em $\mathbb{R}$ por $E(t) = e^{At}$ satisfaz os problemas de valor inicial para equações matriciais*

$$\dot{Y} = A\,Y, \quad Y(0) = I, \qquad\qquad \dot{Y} = Y A, \quad Y(0) = I\,.$$

Dem. Seja $E(t)=e^{At}$ e $[(c_k)_{js}]=A^k$. Então

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \ .$$

A componente-js de $E(t)$ é $\sum_{k=0}^{\infty} (c_k)_{js}\, t^k/k!$. Esta é uma série de potências em t convergente em todo $t \in \mathbb{R}$ cuja derivada em ordem a t existe e é dada pela série obtida derivando-a termo a termo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_k)_{js} \frac{k\, t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (c_{k+1})_{js} \frac{t^k}{k!} \ .$$

Logo

$$\dot{E}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = AE(t) \ ,$$

pelo que E satisfaz a primeira equação diferencial matricial no enunciado. Obviamente $E(0) = I$. Como também

$$\dot{E}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) A = E(t)A \ ,$$

a função E também satisfaz o segundo problema de valor inicial. *Q.E.D.*

Para resolver um problema de valor inicial para a equação diferencial homogénea convém saber calcular inversas de exponenciais de matrizes.

(3.5) **Proposição:** *Se A é uma matriz $n \times n$ de componentes reais (ou complexas), então e^A é invertível e $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.*

Dem. Como

$$\left(e^{At} e^{-At}\right)' = \left(e^{At}\right)' e^{-At} + e^{At} \left(e^{-At}\right)' = e^{At} A\, e^{-At} + e^{At} (-A)\, e^{-At} = 0 \ ,$$

$e^{At}e^{-At}$ é constante e igual a $e^{A0}e^{-A0} = I$. Com $t = 1$ obtém-se $e^A e^{-A} = I$. Trocando A com $-A$ nesta equação obtém-se $e^{-A} e^A = I$. Conclui-se que e^A é invertível e a sua inversa é e^{-A}. *Q.E.D.*

Pode-se agora resolver a equação diferencial linear homogénea considerada.

(3.6) **Teorema:** *Seja A uma matriz $n\times n$ de componentes reais (ou complexas), $t_0\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{y_0}\in\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbf{y_0}\in\mathbb{C}^n$). Então a solução do problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}\ ,$$

existe e é única. Esta solução é global e é dada por

$$\mathbf{y}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{y_0}, \quad \text{para } t\in\mathbb{R}\ .$$

Além disso, o espaço linear das soluções da equação $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$ tem dimensão n e uma base constituída pelas colunas da função matricial $t\mapsto e^{At}$.

Dem. Derivando $\mathbf{y}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{y_0}$ obtém-se $\dot{\mathbf{y}}(t)=A\,e^{A(t-t_0)}\mathbf{y_0}=A\,\mathbf{y}(t)$. É claro que $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}$. Conclui-se que $\mathbf{y}$ satisfaz o problema de valor inicial considerado. Para provar que a solução é única supõe-se que $\mathbf{y}$ é uma solução de $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$, define-se $\mathbf{z}(t)=e^{-At}\mathbf{y}(t)$ e calcula-se

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=e^{-At}\dot{\mathbf{y}}-e^{-At}A\mathbf{y}(t)=e^{-At}\left[\dot{\mathbf{y}}-A\mathbf{y}(t)\right]=0\ ,$$

pelo que $\mathbf{z}$ é constante. Se $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}$, conclui-se que o valor constante de $\mathbf{z}$ é $\mathbf{z}(t_0)=e^{-At_0}\mathbf{y_0}$. Portanto $e^{-At}\mathbf{y}(t)=e^{-At_0}\mathbf{y_0}$ e, multiplicando ambos os membros por e^{At}, obtém-se $\mathbf{y}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{y_0}$.

Como $e^{At}\mathbf{c}$, com $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n$) é a combinação linear das n colunas de e^{At} cujos coeficientes são as componentes de $\mathbf{c}$, fazendo variar $\mathbf{y_0}$ em todo $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) conclui-se que o espaço das soluções de $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$ é gerado pelas colunas da função $t\mapsto e^{At}$. Com $t=0$ em $e^{At}\mathbf{c}=0$ obtém-se $\mathbf{c}=0$, pelo que aquelas n colunas são linearmente independentes e, portanto, são uma base do espaço das soluções da equação, o qual tem dimensão n. *Q.E.D.*

Também é útil o resultado seguinte relativo a soluções exponenciais.

(3.7) **Teorema:** *Seja A uma matriz $n\times n$ de componentes reais ou complexas. A equação diferencial $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$ tem uma solução da forma $\mathbf{y}(t)=e^{\lambda t}\mathbf{v}$ com $\lambda\in\mathbb{C}$ e $\mathbf{v}\in\mathbf{C}^n\backslash\{0\}$ se e só se $(\lambda,\mathbf{v})\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ é um par de valor e vector próprios associados de A.*

Dem. Se $\mathbf{y}(t)=e^{\lambda t}\mathbf{v}$ com $\lambda\in\mathbb{C}$ e $\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ é solução da equação, então $\lambda\,e^{\lambda t}\mathbf{v}=\dot{\mathbf{y}}(t)=A\,\mathbf{y}(t)=A\,e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Multiplicando por $e^{-\lambda t}$ obtém-se $\lambda\mathbf{v}=A\mathbf{v}$. Portanto λ é um valor próprio de A associado ao vector próprio $\mathbf{v}$.

Se λ é um valor próprio de A associado a um vector próprio $\mathbf{v}$, então $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, pelo que se obtém para $\mathbf{y}(t)=e^{\lambda t}\mathbf{v}$

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}=e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v}=e^{\lambda t}A\mathbf{v}=Ae^{\lambda t}\mathbf{v}=A\mathbf{y}(t)\ ,$$

pelo que $\mathbf{y}=e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é solução da equação com $\lambda\in\mathbb{C}$ e $\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$. *Q.E.D.*

Se A é uma matriz $n \times n$ de componentes reais, a relação entre soluções de componentes reais e soluções de componentes complexas de equações diferenciais lineares $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ é fácil de estabelecer.

(3.8) **Proposição:** *Se A é uma matriz $n \times n$ de componentes reais, uma função $\mathbf{y}$ definida num intervalo e com valores em $\mathbb{C}^n$ é solução da equação diferencial $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ se e só se as funções $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ que se obtêm tomando para cada componente, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da correspondente componente de $\mathbf{y}$ são soluções da mesma equação diferencial.*

Dem. Como $\mathbf{y} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, verifica-se a equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ se e só se se verificam as equações $\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$ e $\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v}$. *Q.E.D.*

(3.9) **Exemplos:**

1. Considera-se a equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} .$$

   O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, pelo que os valores próprios de A são $1 \pm \sqrt{1+3}$, isto é, são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Os vectores próprios associados a estes valores próprios são da forma, respectivamente, $\mathbf{v_1} = a(1,2)$ e $\mathbf{v_2} = b(1,-2)$, onde $a, b \neq 0$ são escalares. Assim, $\mathbf{u}(t) = e^{3t}(1,2)$ e $\mathbf{v}(t) = e^{-t}(1,-2)$ são soluções da equação diferencial dada. Como $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} = 0$ implica, em $t = 0$, $c_1(1,2) + c_2(1,-2) = 0$, e estes dois vectores são linearmente independentes, segue-se que $c_1 = c_2 = 0$, pelo que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são soluções independentes da equação. Do teorema (3.6) sabe-se que a dimensão do espaço de soluções desta equação é 2. Portanto, as soluções $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formam uma base para o espaço de soluções e, em consequência, a solução geral da equação é $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{3t}(1,2) + c_2 e^{-t}(1,-2)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ou $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, conforme se pretenda a solução geral cujas componentes têm valores reais ou complexos.

2. Considera-se a equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} .$$

   O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$, pelo que os valores próprios complexos de A são dados por $-1 \pm \sqrt{1-5}$, isto é, são $\lambda_1=-1+2i$ e $\lambda_2=-1-2i$. Os vectores próprios associados a estes valores próprios são, respectivamente, os vectores $\mathbf{v_1}=a(1,2i)$ e $\mathbf{v_2}=b(1,-2i)$, onde $a,b\neq 0$ são escalares. Assim, $\mathbf{u}(t)=e^{(-1+2i)t}(1,2i)$ e $\mathbf{v}(t)=e^{-(1+2i)t}(1,-2i)$ são soluções da equação diferencial dada cujas componentes têm valores complexos. Como $c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=0$ implica, em $t=0$, $c_1(1,2i)+c_2(1,-2i)=0$, e estes dois vectores de $\mathbb{C}^2$ são linearmente independentes, segue-se que $c_1=c_2=0$, pelo que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são soluções independentes da equação. Do teorema (3.6) sabe-se que a dimensão do espaço de soluções desta equação é 2. Portanto, as soluções $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formam uma base para o espaço de soluções com valores em $\mathbb{C}^2$ e, em consequência, a solução geral da equação considerada com valores em $\mathbb{C}^2$ é

$$\mathbf{y}(t)=c_1e^{(-1+2i)t}(1,2i)+c_2e^{-(1+2i)t}(1,-2i), \quad \text{com } c_1,c_2\in\mathbb{C}\,.$$

As partes reais de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são ambas $\mathbf{a}(t)=e^{-t}(\cos 2t, 2\sin 2t)$ e as partes imaginárias são, respectivamente, $\mathbf{b_1}(t)=e^{-t}(\sin 2t, 2\cos 2t)$, $\mathbf{b_2}(t)=e^{-t}(-\sin 2t, 2\cos 2t)$. Da proposição (3.8) sabe-se que $\mathbf{a},\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}$ são soluções com valores em $\mathbb{R}^2$ da equação considerada. Como $c_1\mathbf{a}+c_2\mathbf{b_1}=0$ implica, em $t=0$, $c_1(1,0)+c_2(0,2)=0$ e estes dois vectores são linearmente independentes, segue-se que $c_1=c_2=0$, pelo que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b_1}$ são soluções da equação com valores em $\mathbb{R}^2$ e são linearmente independentes. Do teorema (3.6) sabe-se que a dimensão do espaço de soluções da equação é 2. Portanto, as soluções $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b_1}$ formam uma base do espaço das soluções com valores em $\mathbb{R}^2$ e a solução geral com valores em $\mathbb{R}^2$ da equação considerada é

$$\mathbf{y}(t)=c_1e^{-t}(\cos 2t, 2\sin 2t)+c_2e^{-t}(\sin 2t, 2\cos 2t), \quad \text{com } c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Como ficou estabelecido no teorema (3.6), a resolução de equações ordinárias lineares homogéneas de coeficientes constantes ficou reduzida ao cálculo de exponenciais de matrizes. Convém, portanto, dispor de métodos práticos para este cálculo.

Há alguns casos simples. Se A é uma **matriz diagonal**, isto é, $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, então $e^{At}=\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t})$. Se A é uma **matriz diagonalizável**, então existe uma matriz não singular S tal que $A=S\Lambda S^{-1}$, onde $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, pelo que $A^k=S\Lambda^k S^{-1}$ e $e^{At}=Se^{\Lambda t}S^{-1}$. Quando A é uma matriz diagonalizável existem n vectores próprios de A linearmente independentes, pelo que o método usado nos exemplos anteriores permite concluir que nesse caso a solução geral da equação com valores em $\mathbb{C}^n$ é uma combinação linear arbitrária de soluções da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$, onde $\mathbf{v}$ é um de n vectores próprios independentes de A e λ é o valor próprio associado a $\mathbf{v}$.

É claro que nem todas as matrizes são semelhantes a uma matriz diagonal, mas todas são semelhantes a uma matriz em **forma canónica de Jordan**[1]

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & J_N \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix},$$

onde os espaços em branco representam zeros, cada J_k é um **bloco de Jordan** de dimensão $n_k \times n_k$, com $n_1 + \cdots + n_N = n$, e os λ_k são os valores próprios complexos de A. É fácil verificar que $e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_N t}\right)$ e

$$e^{J_k t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & t\, e^{\lambda_k t} & \frac{t^2}{2!}\, e^{\lambda_k t} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\, e^{\lambda_k t} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \frac{t^2}{2!}\, e^{\lambda_k t} \\ & & & & & \cdot & t\, e^{\lambda_k t} \\ & & & & & & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix},$$

onde os espaços em branco representam zeros. Se A é semelhante a uma matriz em forma canónica de Jordan J, então existe uma matriz não singular S tal que $A = SJS^{-1}$, e $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$.

Conclui-se das observações anteriores que as soluções de $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ com valores em $\mathbb{C}^n$ têm componentes que são combinações lineares de funções do tipo $t^j e^{\lambda t}$, onde λ é um valor próprio complexo de A e j é um inteiro não negativo menor do que o número de linhas do maior bloco de Jordan associado a λ numa forma canónica de A, número este que nunca é superior à multiplicidade algébrica de λ como solução da equação característica de A. Se A tem componentes reais, obtém-se da proposição (3.8) que as soluções de $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ têm componentes que são combinações lineares das partes reais e imaginárias das funções $t^j e^{\lambda t}$, ou seja, são combinações lineares de funções do tipo $t^j e^{\lambda t}$, onde λ é um valor próprio real de A, com funções do tipo $t^j e^{at}\cos(bt)$ e $t^j e^{at}\sin(bt)$, onde a, b são, respectivamente, as partes real e imaginária de um valor próprio complexo de A. De forma a ajudar a visualização gráfica destas funções apresenta-se na Figura 3.1 a forma dos gráficos de algumas destas funções.

[1] Jordan, Marie Ennemond Camille (1838-1922).

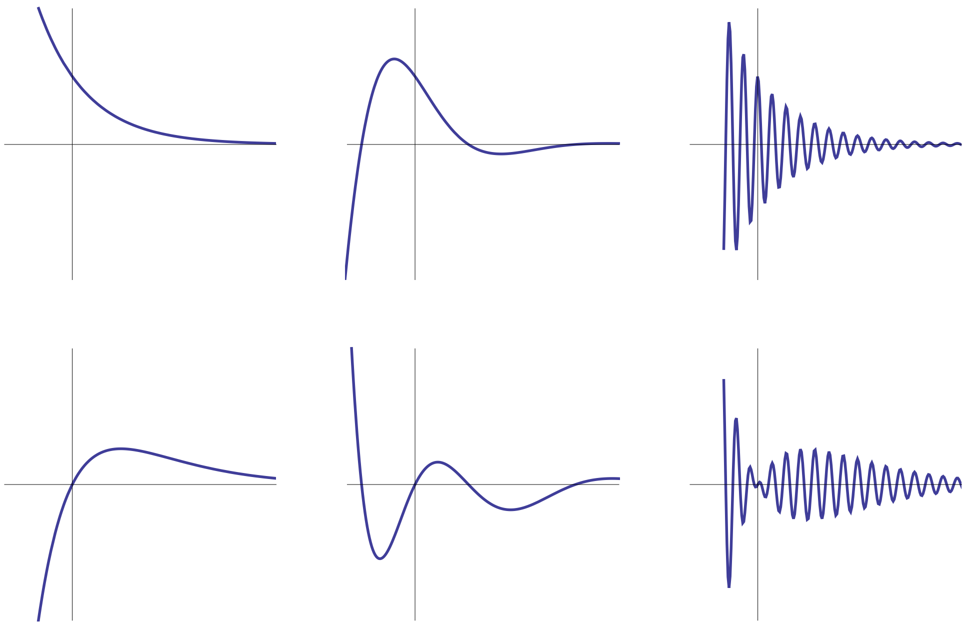

Figura 3.1: Gráficos de e^{at}, $t\,e^{at}$, $e^{at}\cos(at)$, $t\,e^{at}\cos(at)$, $e^{at}\cos(bt)$, $t\,e^{at}\cos(bt)$, para $a<0$, $0<b<|a|$

(3.10) **Exemplos:**

1. Considera-se a equação do exemplo (3.9.1) $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$ com

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Viu-se nesse exemplo que os valores próprios de A são $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=-1$ e que $(1,2)$ e $(1,-2)$ são vectores próprios associados a cada um desses valores próprios. A matriz de mudança da base canónica para a base dos vectores próprios $(1,2)$, $(1,-2)$ é

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad S^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\Lambda=S^{-1}AS=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{bmatrix} (e^{3t}+e^{-t})/2 & (e^{3t}-e^{-t})/4 \\ e^{3t}-e^{-t} & (e^{3t}+e^{-t})/2 \end{bmatrix}.$$

A solução de problemas de valor inicial para a equação dada, com $\mathbf{y}(t_0)=(a,b)$, é

$$e^{A(t-t_0)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[(2a+b)e^{3(t-t_0)} + (2a-b)e^{-(t-t_0)}\right]/4 \\ \left[(2a+b)e^{3(t-t_0)} - (2a-b)e^{-(t-t_0)}\right]/2 \end{bmatrix}.$$

2. Considera-se a equação do exemplo (3.9.2) $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$ com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Viu-se nesse exemplo que os valores próprios complexos de A são $\lambda_1=-1+2i$ e $\lambda_2=-1-2i$ e que $(1,2i)$ e $(1,-2i)$ são vectores próprios associados a cada um desses valores próprios. A matriz de mudança da base canónica para a base dos vectores próprios $(1,2i)$, $(1,-2i)$ é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -2i \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad S^{-1} = -\frac{1}{4i}\begin{bmatrix} -2i & -1 \\ -2i & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\Lambda = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}, \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{(-1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{-(1+2i)t} \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos 2t & (\sin 2t)/2 \\ -2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

A solução de problemas de valor inicial para a equação dada, com $\mathbf{y}(t_0) = (a,b)$, é

$$e^{A(t-t_0)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{-(t-t_0)} \begin{bmatrix} a\cos 2(t-t_0) + b\,(\sin 2(t-t_0))/2 \\ -2a\sin 2(t-t_0) + b\cos 2(t-t_0) \end{bmatrix}.$$

3. Considera-se a equação $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^2-4\lambda+4$, pelo que os valores próprios de A são dados por $2\pm\sqrt{4-4}$, isto é, A tem apenas um valor próprio $\lambda=2$. Os vectores próprios associados a este valor próprio são da forma $a(-2,1)$, onde $a\neq 0$ é um escalar arbitrário. Assim, a matriz A não é diagonalizável e a sua forma canónica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz obtém-se de A com uma mudança da base canónica para uma base formada por um vector próprio, por exemplo $\mathbf{v}=(-2,1)$ e um vector $\mathbf{w}$ tal que $A\mathbf{w}=1\mathbf{v}+2\mathbf{w}$, ou seja, $(A-2I)\mathbf{w}=\mathbf{v}$. Resolvendo esta equação, obtêm-se para $\mathbf{w}$ vectores da forma $b(-2,1)+(-1,0)$, onde b é um escalar arbitrário, pelo que se pode tomar $\mathbf{w}=(-1,0)$. A matriz de mudança da base canónica para a base dos vectores próprios $\mathbf{v},\mathbf{w}$ é

$$S = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

pelo que $J = S^{-1}AS$,

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & t\,e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} (1+2t)e^{2t} & 4te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-2t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

A solução de problemas de valor inicial para a equação dada, com $\mathbf{y}(t_0) = (a,b)$, é

$$e^{A(t-t_0)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{2(t-t_0)} \begin{bmatrix} a + (2a+4b)(t-t_0) \\ b - (a+2b)(t-t_0) \end{bmatrix}.$$

Embora a passagem para forma canónica de Jordan seja uma maneira de calcular e^{At} e seja sempre possível calcular formas canónicas de matrizes, não há processos verdadeiramente eficientes para este cálculo. Assim, é conveniente dispor de métodos alternativos. No apêndice E incluem-se alguns aspectos do cálculo de exponenciais de matrizes.

Uma vez resolvida a equação homogénea $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ de forma satisfatória resta considerar o problema de determinar soluções da equação não homogénea $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}+\mathbf{h}(t)$. Multiplicando ambos os lados de $\dot{\mathbf{y}}-A\mathbf{y}=\mathbf{h}(t)$ por e^{-At} e integrando num intervalo $[t_0,t]$ obtém-se

$$\begin{aligned} e^{-At}\mathbf{y}(t) - e^{-At_0}\mathbf{y}(t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left(e^{-As}\mathbf{y}(s)\right)' ds \\ &= \int_{t_0}^{t} \left(e^{-As}\dot{\mathbf{y}}(s) - e^{-As}A\mathbf{y}(s)\right) ds = \int_{t_0}^{t} e^{-As}\mathbf{h}(s)\, ds, \end{aligned}$$

pelo que fica provado o resultado seguinte.

(3.11) **Teorema (Fórmula de Variação das Constantes):** *Se A é uma matriz $n\times n$ de componentes reais (ou complexas), $\mathbf{h}$ é uma função contínua num intervalo $J\subset\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $t_0\in J$ e $\mathbf{y_0}$ é um ponto de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, então a solução do problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)\,, \quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}$$

existe, é única e está definida em J. Esta solução é dada pela fórmula de variação das constantes

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{h}(s)\,ds\,.$$

(3.12) **Exemplo:** Considera-se o problema de valor inicial para a equação diferencial linear não homogénea $\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}+\mathbf{h}(t)$, $\mathbf{y}(1)=(1\ -1)$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Sabe-se do Exemplo (3.10.1) que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (e^{3t}+e^{-t})/2 & (e^{3t}-e^{-t})/4 \\ e^{3t}-e^{-t} & (e^{3t}+e^{-t})/2 \end{bmatrix}.$$

A fórmula de variação das constantes dá

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} (e^{3(t-1)}+e^{-(t-1)})/2 & (e^{3(t-1)}-e^{-(t-1)})/4 \\ e^{3(t-1)}-e^{-(t-1)} & (e^{3(t-1)}+e^{-(t-1)})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \int_1^t \begin{bmatrix} (e^{3(t-s)}+e^{-(t-s)})/2 & (e^{3(t-s)}-e^{-(t-s)})/4 \\ e^{3(t-s)}-e^{-(t-s)} & (e^{3(t-s)}+e^{-(t-s)})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} (e^{3(t-1)}+3e^{-(t-1)})/4 \\ (e^{3(t-1)}-3e^{-(t-1)})/2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \int_1^t \begin{bmatrix} (2e^{3t-2s}+2e^{-t+2s} + e^{3t-s}-e^{-t+3s})/4 \\ (2e^{3t-2s}-2e^{-t+2s}+e^{3t-s}+e^{-t+3s})/2 \end{bmatrix}, \ ds
\end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3(e^{-1}+e^{-2}+e^{-3})e^{3t} - 4e^{2t} + (e^3-3e^2+9e)e^{-t} \\ 6(e^{-1}+e^{-2}+e^{-3})e^{3t} - 4e^{2t} - 12e^t + (-2e^3+6e^2-18e)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

3.3 Equações com coeficientes variáveis

Ao contrário do que acontece para equações lineares com coeficientes constantes, para equações de coeficientes variáveis não é em geral possível obter fórmulas explícitas para as soluções em termos dos coeficientes da equação. Assim, começamos neste caso por estabelecer existência e unicidade, e determinar intervalos máximos de definição para soluções de problemas de valor inicial.

(3.13) **Teorema:** *Se $J\subset\mathbb{R}$ é um intervalo aberto, A,$\mathbf{h}$ são funções contínuas definidas em J que têm por valores matrizes $n\times n$ de componentes reais (ou complexas) e vectores de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), respectivamente, e $t_0\in J$, então a solução do problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)\ , \quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y_0}$$

existe, é única e pode ser prolongada a todo o intervalo J de definição e continuidade dos coeficientes da equação.

Dem. A função $\mathbf{f}(t,\mathbf{y}) = A(t)\mathbf{y}+\mathbf{h}(t)$ tem derivada $(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{y})(t,\mathbf{y}) = A(t)$ contínua em $D = J\times\mathbb{R}^n$ (ou $D = J\times\mathbb{C}^n$), pelo que $\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ é localmente lipschitziana em relação a $\mathbf{y}$ em D. Do Teorema de Picard-Lindelöf resulta que a solução do problema de valor inicial considerado existe e é única no seu intervalo máximo de definição. Resta provar que este intervalo é J.

Seja J' o intervalo máximo de definição da solução $\mathbf{y}$ do problema de valor inicial considerado. Do teorema de extensão de soluções a intervalos máximos de definição do capítulo anterior, quando t tende para qualquer um dos extremos do intervalo J' verifica-se $(t,\mathbf{y}(t))\to\partial D$ ou $\|(t,\mathbf{y}(t))\|\to+\infty$. No primeiro caso, o correspondente extremo de J' também é um extremo (do mesmo lado) de J. Portanto, se for provado que a solução não explode é necessariamente $J'=J$, como se pretende.

Se $\mathbf{y}$ é solução da equação diferencial obtém-se do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} [A(s)\mathbf{y}(s)+\mathbf{h}(s)]\ ds\ .$$

Com $J=]a,b[$, $T\in\mathbb{R}$ tal que $t_0+T\in]a,b[$ e t no intervalo compacto limitado por t_0 e t_0+T, verifica-se

$$\|\mathbf{y}(t)\| \le \|\mathbf{y_0}\| + L_T\left|\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{y}(t)\|\ ds\right| + T\,H_T\ ,$$

onde L_T é a raiz quadrada do máximo da soma dos quadrados das normas das linhas da matriz $A(t)$ calculado para t no intervalo compacto de extremos t_0 e t_0+T, e H_T é o máximo da norma de $\mathbf{h}(t)$ para t no mesmo intervalo. A última desigualdade pode ser explicitada para $\|\mathbf{y}(t)\|$ por aplicação da Desigualdade de Gronwall estabelecida no capítulo anterior. Obtém-se

$\|\mathbf{y}(t)\| \leq (\|\mathbf{y_0}\| + TH_T)\ e^{TL_T}$, e conclui-se que $\|\mathbf{y}\|$ é limitada em qualquer dos intervalos compactos contidos em $]a, b[$, pelo que a solução $\mathbf{y}$ não explode, a não ser possivelmente nos extremos deste intervalo. *Q.E.D.*

Conclui-se do último teorema que as soluções de equações ordinárias lineares $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$ não explodem a não ser, possivelmente, nos extremos de intervalos máximos de continuidade das funções A e $\mathbf{h}$. Isto acontece porque o crescimento máximo da norma de soluções de equações lineares depende linearmente da norma do ponto onde são calculadas e, portanto, a norma da solução não pode crescer tão rapidamente que tenda para ∞ em tempo finito.

Como sempre para equações lineares, a solução geral da equação considerada pode ser obtida adicionando a uma solução particular a solução geral da equação homogénea correspondente $\dot{\mathbf{y}} - A(t)\mathbf{y} = 0$, e as soluções satisfazem o **Princípio da Sobreposição**, isto é, uma combinação linear com coeficientes c_1 e c_2 de soluções de cada uma das equações não homogéneas $\dot{\mathbf{y}} - A(t)\mathbf{y} = \mathbf{h}(t)$ com termos independentes $\mathbf{h} = \mathbf{h_1}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{h_2}$ são soluções da equação não homogénea com termo independente $c_1\mathbf{h_1} + c_2\mathbf{h_2}$, naturalmente desde que $A, \mathbf{h_1}, \mathbf{h_2}$ sejam contínuas num mesmo intervalo $J \subset \mathbb{R}$.

Tal como no caso de coeficientes constantes, convém considerar o problema de valor inicial para a equação diferencial matricial homogénea associada à equação considerada, isto é $\dot{Y} = A(t)\,Y,\ Y(t_0) = I$, onde $t_0 \in J$. Devido à existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial estabelecida anteriormente, este problema de valor inicial define uma função matricial Y no intervalo J. Na verdade, a coluna j da matriz $Y(t)$ é o valor no instante t da solução do problema de valor inicial para a equação considerada com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{e_j}$, onde $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Chama-se a esta função Y **solução matricial principal** da equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ para o instante inicial $t_0 \in J$. No caso de coeficientes constantes, isto é, $A(t) = A$, a solução matricial principal para o instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$ é a exponencial $e^{A(t-t_0)}$.

As soluções matriciais principais são casos especiais de soluções matriciais fundamentais. Chama-se **solução matricial fundamental** da equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ a qualquer solução matricial Y da equação definida em J que tem como valores matrizes $n \times n$, tal que $Y(t)$ é uma matriz não singular para algum $t \in J$. É fácil verificar que para uma solução matricial fundamental Y as matrizes $Y(t)$ são não singulares para todo $t \in J$. De facto, se $Y(t')$ fosse singular existiria $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $Y(t')\mathbf{b} = 0$ e, como $\dot{Y}(t)\mathbf{b} = A(t)Y(t)\mathbf{b}$, a função $Y(t)\mathbf{b}$ seria uma solução da equação igual a zero no instante t'. Da unicidade de solução do problema de valor inicial teria de ser $Y(t)\mathbf{b} = 0$ para todo $t \in J$ e, como $\mathbf{b} \neq 0$, a matriz $Y(t)$ seria singular para todo $t \in J$.

(3.14) **Teorema:** *Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A uma função definida e contínua em J que tem como valores matrizes $n \times n$ de componentes reais (ou complexas) e Y uma solução matricial fundamental da equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$. Se $t_0 \in J$ e $\mathbf{y_0}$ é um vector em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), então a solução do problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} \,, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0} \,,$$

é

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0} \,, \quad \text{para } t \in J \,.$$

A solução geral da equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ é $Y(t)\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vector constante arbitrário. O espaço linear das soluções da equação tem dimensão n e uma base é constituída pelas colunas da função matricial $t \mapsto Y(t)$.

Dem. A função $\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0}$ satisfaz

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0} = A(t)Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0} = A(t)\mathbf{y}(t)$$

e $\mathbf{y}(t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0} = \mathbf{y_0}$, pelo que $\mathbf{y}$ é solução do problema de valor inicial considerado. Como do teorema anterior se sabe que este problema tem solução única, obtém-se o primeiro resultado.

Se $\mathbf{y}$ é uma solução arbitrária da equação, com $\mathbf{c} = Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}(t_0)$ obtém-se do que já ficou estabelecido que $\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{c}$. Portanto, todas as soluções da equação são desta forma. As restantes afirmações no enunciado são de verificação imediata. *Q.E.D.*

As soluções de equações não homogéneas podem ser obtidas por uma fórmula de variação das constantes semelhante à estabelecida na secção anterior para equações de coeficientes constantes.

(3.15) **Teorema (Fórmula de Variação das Constantes):** *Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, A e $\mathbf{h}$ funções definidas e contínuas em J que têm como valores matrizes $n \times n$ de componentes reais (ou complexas) e vectores em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), respectivamente, $t_0 \in J$ e $\mathbf{y_0}$ pertencente a $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Então, a solução do problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \,, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0} \,,$$

é

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds \,, \quad \text{para } t \in J \,,$$

onde Y é uma solução matricial fundamental da equação homogénea associada $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$.

Dem. Como $Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y_0}$ é a solução da equação homogénea que tem o valor $\mathbf{y_0}$ no instante t_0, basta verificar que o integral na fórmula dada é uma solução particular da equação não homogénea considerada que se anula no instante $t = t_0$. Este último facto é óbvio porque neste instante o integral tem extremos de integração iguais. Para provar que

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds$$

satisfaz a equação não homogénea considerada, basta derivar esta função usando a regra da derivação do produto e o Teorema Fundamental do Cálculo. De facto,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= \dot{Y}(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds + Y(t)Y^{-1}(t)\mathbf{h}(t)\\ &= A(t)Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds + \mathbf{h}(t) = A(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{h}(t)\ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

A solução matricial principal Y de uma equação para um instante inicial $t_0 \in J$ é facilmente obtida de qualquer solução matricial fundamental X por $Y(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$.

Embora o teorema anterior dê uma fórmula explícita para as soluções de uma equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem geral em termos de uma solução matricial fundamental da equação homogénea correspondente, muitas vezes não é fácil determinar uma solução matricial fundamental para esta equação. A situação de coeficientes variáveis é, neste aspecto, muito diferente da de coeficientes constantes, pois para coeficientes constantes é sempre possível transformar a resolução de uma equação linear homogénea vectorial na resolução sucessiva de equações diferenciais lineares escalares não homogéneas obtidas a partir de uma forma canónica de Jordan da matriz dos coeficientes. Em geral tal não é possível para coeficientes variáveis. Um caso de coeficientes variáveis em que um método desse tipo pode ser aplicado é quando a matriz dos coeficientes é triangular superior ou inferior, ou pode ser transformada nestes casos por mudança de variáveis.

3.4 Equações com coeficientes periódicos

Para equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes periódicos é possível ter mais informação geral sobre as soluções, conhecida por **Teoria de Floquet**[2]. O caso particular de coeficientes constantes já foi considerado, pelo que aqui estamos interessados apenas no caso periódico não constante.

[2]Floquet, Gaston (1847-1920).

Estas equações podem ser transformadas em equações lineares de coeficientes constantes por mudanças de variáveis, como se estabelece no resultado seguinte.

(3.16) **Teorema de Floquet:** *Seja A uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ cujos valores são matrizes $n\times n$ de componentes reais (ou complexas) que é periódica com período $T>0$, isto é, $A(t+T)=A(t)$ para $t\in\mathbb{R}$. Então, toda a solução matricial fundamental Y da equação diferencial linear periódica homogénea $\dot{\mathbf{y}}=A(t)\mathbf{y}$ é da forma $Y(t)=P(t)e^{Bt}$, onde $P(t)$ e B são matrizes $n\times n$ de componentes complexas, com $P(t+T)=P(t)$ para $t\in\mathbb{R}$ e B constante. A transformação de variáveis $\mathbf{y}=P\mathbf{x}$ transforma a equação periódica $\dot{\mathbf{y}}=A(t)\mathbf{y}$ na equação de coeficientes constantes $\dot{\mathbf{x}}=B\mathbf{x}$.*

Dem. Se Y é uma solução matricial fundamental, também $Y(t+T)$ é. O teorema (3.14) implica que existe uma matriz constante C tal que $Y(t+T)=Y(t)C$ para $t\in\mathbb{R}$. Como $Y(t+T)$ e $Y(t)$ são matrizes não singulares, também C é uma matriz não singular. O lema que se apresenta a seguir garante a existência de logaritmos de matrizes não singulares, pelo que existe uma matriz B tal que $C=e^{BT}$. Define-se $P(t)=Y(t)e^{-Bt}$ e $\mathbf{x}=P^{-1}\mathbf{y}$. Então

$$P(t+T)=Y(t+T)e^{-B(t+T)}=Y(t)\,e^{BT}e^{-B(t+T)}=P(t)\ ,$$

$\mathbf{y}=P\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{y}}=\dot{P}\mathbf{x}+P\dot{\mathbf{x}}$. Em particular, $\dot{\mathbf{x}}=P^{-1}(AP-\dot{P})\mathbf{x}$. Como $\dot{P}=\dot{Y}e^{-Bt}-Ye^{-Bt}B=AP-PB$, verifica-se $\dot{\mathbf{x}}=P^{-1}PB\mathbf{x}=B\mathbf{x}$. *Q.E.D.*

(3.17) **Lema (Logaritmos de Matrizes):** *Se C é uma matriz não singular, então existem matrizes B de componentes complexas tais que $C=e^{B}$.*

Dem. Se C é uma matriz não singular 1×1 é $C=[\lambda]$ para $\lambda\neq 0$. Com $B=[\ln\lambda]$ dada por qualquer dos logaritmos complexos de λ determinados a menos de múltiplos inteiros de $2\pi i$, é $C=e^{B}$.

Se Q é uma matriz não singular $n\times n$ e $C=e^{B}$, então $Q^{-1}CQ=e^{Q^{-1}BQ}$. Portanto, pode-se supor sem perda de generalidade que C está na forma canónica de Jordan, isto é, $C=\mathrm{diag}\,(C_1,\ldots,C_k)$, onde $C_j=\mathrm{diag}(\lambda_j,\ldots,\lambda_j)$ ou $Cj=\lambda_j I+R_j$, com $\lambda_j\neq 0$ e

$$R_j=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, basta mostrar que cada bloco de Jordan C_j pode ser escrito na forma $C_j = e^{B_j}$, para alguma matriz B_j.

Se $C_j = \mathrm{diag}(\lambda_j, \ldots, \lambda_j)$ com $\lambda_j \neq 0$, então qualquer matriz diagonal B com elementos na diagonal principal todos iguais a um dos logaritmos complexos de λ_j satisfaz $C_j = e^{B_j}$.

Resta tratar do caso de blocos de Jordan não diagonais. Para simplificar a notação escreve-se $C=\lambda I+R$, com $\lambda\neq 0$. Pode-se escrever $C=\lambda(I+R/\lambda)$, pelo que $C=e^B$ se e só se $B=(\ln\lambda)I+S$, onde $e^S=I+R/\lambda$. Como a série de Taylor de $\ln(1+x)$ é

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j} , \quad \text{para } |x|<1 ,$$

é de esperar que se obtenha a relação desejada com a matriz S igual à série anterior com x substituído por R/λ. É fácil verificar que $R^j = 0$ para $j \geq n$. Portanto, é natural definir $S = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R^j/(j\lambda^j)$, que é necessariamente uma soma finita com n parcelas no máximo, de onde se obtém

$$e^S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(R/\lambda)^j}{j} \right]^k .$$

Por outro lado

$$e^{\ln(1+x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\ln(1+x)]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j} \right]^k , \quad \text{para } |x|<1 .$$

Reordenando e agrupando os termos das séries por ordem crescente de potências de $(R/\lambda)^j$ e x^j, respectivamente, obtêm-se séries em que os coeficientes de $(R/\lambda)^j$ são iguais aos coeficientes de x^j. Como $e^{\ln(1+x)} = 1+x$, o coeficiente de x^j na série é nulo para $j \geq 2$ e é igual a 1 para $j = 1$. Logo, $e^S=I+R/\lambda$, e portanto, com $B=(\ln\lambda)I+ S$ obtém-se $C=e^B$. *Q.E.D.*

O Teorema de Floquet implica que as soluções complexas de sistemas lineares periódicos homogéneos são funções vectoriais em que cada componente é uma combinação linear de termos da forma $e^{\lambda t}p(t)$, onde p é semelhante a uma função polinomial definida em $\mathbb{R}$ em que os coeficientes em vez de serem números reais são funções complexas de variável real periódicas com período igual ao período de $A(t)$. Os valores λ podem ser determinados a partir da matriz M associada a uma solução matricial fundamental Y da equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, com $A(t+T) = A(t)$ para $t \in \mathbb{R}$, pela relação $Y(t+T) = Y(t)M$. Chama-se a uma matriz M com estas propriedades **matriz de monodromia** da equação.

Aos valores próprios ρ de uma matriz de monodromia chama-se **multiplicadores característicos** da equação e a qualquer λ tal que $e^{\lambda T}$ é um multiplicador característico chama-se **expoente característico** da equação, pelo que os expoentes característicos ficam apenas determinados módulo $2\pi i/T$. Porém, os multiplicadores característicos ficam univocamente determinados e são os mesmos para todas as matrizes de monodromia da equação. De facto, se X é uma outra solução matricial fundamental, então existe uma matriz C tal que $X(t) = Y(t)C$ e verifica-se $X(t+T) = Y(t+T)C = Y(t)MC = X(t)C^{-1}MC$. Logo, todas as matrizes de monodromia de uma equação diferencial linear periódica homogénea são semelhantes e, consequentemente, têm os mesmos valores próprios. Apesar da indeterminação dos expoentes característicos, para efeito de representar soluções da equação podem sempre ser escolhidos iguais aos valores próprios de qualquer matriz B tal que $C = e^{BT}$.

A relação entre expoentes característicos e soluções que são exponenciais multiplicadas por funções periódicas é análoga à relação entre valores próprios da matriz dos coeficientes e soluções exponenciais que foi obtida para o caso de equações com coeficientes constantes.

(3.18) **Teorema:** *Um número complexo λ é um expoente característico da equação linear periódica homogénea $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, com A periódica de período $T > 0$, se e só se existe uma solução complexa não nula da forma $e^{\lambda t}\mathbf{p}(t)$, onde $\mathbf{p}$ é uma função periódica de período T. Em particular, a equação tem uma solução periódica de período T (ou $2T$ mas não T) se e só se um dos multiplicadores do sistema é $+1$ (ou -1).*

Dem. Se $e^{\lambda t}\mathbf{p}(t)$ é solução da equação, com $\mathbf{p}(t+T) = \mathbf{p}(t) \neq 0$ para $t \in \mathbb{R}$, o Teorema de Floquet implica que existe $\mathbf{y_0} \neq 0$ tal que $e^{\lambda t}\mathbf{p}(t) = P(t)\, e^{Bt}\mathbf{y_0}$. Portanto,

$$P(t)\, e^{B(t+T)}\mathbf{y_0} = P(t+T)\, e^{B(t+T)}\mathbf{y_0} = e^{\lambda(t+T)}\mathbf{p}(t) = e^{\lambda T} P(t)\, e^{Bt}\mathbf{y_0} \ ,$$

pelo que $P(t)e^{Bt}\left[e^{BT} - e^{\lambda T} I\right]\mathbf{y_0} = 0$. Segue-se que $\det\left[e^{BT} - e^{\lambda T} I\right] = 0$, o que implica que λ é um expoente característico.

Reciprocamente, se λ é um expoente característico, existe $\mathbf{y_0} \neq 0$ tal que $\left[e^{BT} - e^{\lambda T} I\right]\mathbf{y_0} = 0$. Pode-se escolher uma representação de uma solução matricial fundamental da forma $Y(t) = P(t)\, e^{Bt}$, com P periódica de período T, de tal modo que λ seja um valor próprio de B. Então $e^{Bt}\mathbf{y_0} = e^{\lambda t}\mathbf{y_0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $P(t)\, e^{Bt}\mathbf{y_0} = e^{\lambda t} P(t)\,\mathbf{y_0}$ é uma solução da forma indicada.

As últimas afirmações no enunciado são agora óbvias. *Q.E.D.*

Mesmo que C seja uma matriz não singular de componentes reais, pode acontecer que não exista nenhuma matriz B de componentes reais tal que $C=e^B$, como por exemplo acontece para $C=[-1]$. Contudo, se C é uma matriz de componentes reais pode-se estabelecer como no lema (3.17), mas a partir de uma forma canónica real para C, que existe necessariamente uma matriz B de componentes reais tal que $C^2=e^B$. Como no Teorema de Floquet, obtém-se que se A é periódica de período T e tem componentes reais, então para cada solução matricial fundamental de componentes reais Y existe uma função matricial periódica de período $2T$ com componentes reais P, e uma matriz constante de componentes reais B tais que $Y(t)=P(t)e^{Bt}$.

(3.19) **Exemplos:**

1. Considera-se a equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$, com

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t-\cos t} \end{bmatrix} .$$

A função A é periódica de período 2π. Com $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ a equação é equivalente às duas equações escalares lineares

$$\dot{y}_1 = y_1 + y_2 \, , \qquad \dot{y}_2 = \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t-\cos t} \; y_2 \, .$$

A solução geral da segunda equação é

$$y_2(t) = c\, e^{\int \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t-\cos t}\, dt} = c\, e^{\ln|2+\sin t-\cos t|} \, , \quad \text{com } c\in\mathbb{R} \, ,$$

e, portanto, $y_2(t)=a(2+\sin t-\cos t)$, com $a\in\mathbb{R}$. Substituindo esta função na primeira equação obtida e resolvendo pela fórmula da variação das constantes, obtém-se

$$y_1(t) = b\, e^t + a \int_0^t e^{t-s}(2+\sin s-\cos s)\, ds = (b+2a)e^t - a(2+\sin t) \, ,$$

com $b\in\mathbb{R}$. Obtém-se uma solução matricial fundamental para a equação dada tomando para colunas as soluções obtidas com, respectivamente, $b=1$, $a=0$ e $b=-2$, $a=1$, nomeadamente

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^t & -2-\sin t \\ 0 & 2+\sin t-\cos t \end{bmatrix} .$$

Uma matriz de monodromia é C tal que $Y(2\pi)=Y(0)C$, ou seja,

$$C = Y(0)^{-1}Y(2\pi) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{2\pi} & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Conclui-se que os multiplicadores característicos são $e^{2\pi}$, 1, e os expoentes característicos são $1+ik$, ik, com $k\in\mathbb{Z}$. Do último teorema anterior sabe-se que a equação tem soluções periódicas de período 2π. É fácil ver que estas soluções são $\mathbf{y}(t)=a(-2-\sin t, 2+\sin t-\cos t)$.

2. Considera-se a equação $\dot{\mathbf{y}}=A(t)\mathbf{y}$, com

$$A(t)=\begin{bmatrix} -1+(3\cos^2 t)/2 & 1-3(\sin t\cos t)/2 \\ -1-3(\sin t\cos t)/2 & -1+(3\sin^2 t)/2 \end{bmatrix}.$$

A função A é periódica de período 2π. É fácil verificar que $\mathbf{y}(t)=e^{t/2}(-\cos t,\sin t)$ é solução da equação. Resulta do último teorema anterior que um dos multiplicadores característicos é e^{π} e os correspondentes expoentes característicos são $(1/2)+ik$, com $k\in\mathbb{Z}$.

Os expoentes característicos obtidos têm partes reais positivas e, portanto, correspondem a soluções de amplitude exponencialmente crescente, enquanto a equação característica de $A(t)$ é $\det(A(t)-\lambda I)=\lambda^2+(1/2)\lambda+(1/2)=0$ e os valores próprios de $A(t)$ são $(-1\pm i\sqrt{7})/4$, pelo que têm parte real negativa e as soluções da correspondente equação diferencial com matriz dos coeficientes constante igual ao valor de A num instante fixo t têm amplitude exponencialmente decrescente.

Observa-se neste caso que apesar das taxas exponenciais de variação da amplitude de soluções serem dadas pelos expoentes característicos estes não têm relação directa com os valores próprios das matrizes $A(t)$ que especificariam as taxas exponenciais de variação de soluções se A fosse constante.

O último exemplo mostra que os expoentes característicos que dão as taxas exponenciais da amplitude das soluções de equações lineares periódicas não têm uma relação directa com os coeficientes da equação, nomeadamente através dos valores próprios dos valores da matriz dos coeficientes. Assim, para determinar os expoentes característicos é necessário resolver a equação homogénea, determinando uma solução matricial fundamental.

Apesar da Teoria de Floquet constituir uma forma de reduzir a resolução de equações diferenciais lineares periódicas à resolução de equações de coeficientes constantes, a sua aplicação exige o cálculo de uma solução matricial fundamental, o que em geral não é fácil como se observou na secção anterior. Além da aplicação nos casos especiais em que é possível calcular uma solução matricial fundamental, a Teoria de Floquet desempenha um papel importante na teoria qualitativa de equações diferenciais periódicas pela informação de natureza geral que fornece.

3.5 Notas históricas

A observação que uma equação diferencial escalar de ordem n é equivalente a um sistema de 1ª ordem foi feita pela primeira vez por J. d'Alembert[3].

A noção de conjunto fundamental de soluções de uma equação linear homogénea deve-se a J.L. Lagrange[4], por volta de 1765. Foi também Lagrange que introduziu o método de variação das constantes em 1775, embora se encontrem raízes deste método no trabalho de L. Euler em 1739.

A Teoria de Floquet para equações diferenciais lineares de coeficientes periódicos foi obtida por G. Floquet em 1883.

O exemplo (3.19.2) de um sistema de duas equações lineares periódicas com matriz dos coeficientes que em cada instante tem todos os valores próprios com partes reais negativas, mas tem expoentes característicos com partes reais positivas foi obtido em 1960 por L. Markus[5] e H. Yamabe[6]

[3] d'Alembert, Jean le Rond (1717-1783)
[4] Lagrange, Joseph Louis (1736-1813).
[5] Markus, Lawrence (1922-).
[6] Yamabe, Hidehiko (1923-1969).