

## Capítulo 2

# Existência, unicidade, prolongamento e dependência contínua de soluções de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem

### 2.1 Introdução

Nas duas últimas seções do capítulo anterior tornou-se clara a necessidade de estabelecer condições suficientes para existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias. De acordo com as observações nesse capítulo, só esperamos poder estabelecer um resultado geral de existência de soluções locais definidas numa vizinhança do instante inicial, pois pode não existir solução global. Interessa, também, esclarecer em que condições uma solução local pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição e saber como determinar tal intervalo. Também consideramos neste capítulo a questão da dependência contínua de soluções em relação às condições iniciais.

Não há razão para nos restringirmos a equações escalares. Por isso consideram-se aqui problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias vectoriais de primeira ordem

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

onde  $\mathbf{f}$  é uma função contínua que tem como valores vectores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) e definida num conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) e  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ .

## 2.2 Existência e unicidade de soluções

Para provar a existência de uma solução sem a determinar explicitamente, pode-se pensar no seguinte esquema geral:

1. obter uma sucessão de aproximações para a possível solução,
2. provar que a sucessão (ou uma sua subsucessão) tem limite,
3. provar que o limite é uma solução.

O método de Euler apresentado no capítulo anterior para a resolução numérica de problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias sugere uma forma de obter uma sucessão de aproximações para uma possível solução local do problema de valor inicial (2.1), definida num intervalo  $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , com  $\alpha > 0$  apropriado. Esta possibilidade é explorada no apêndice A para estabelecer a existência de soluções com toda a generalidade ao mesmo tempo que se justifica o método de Euler, ou seja, prova-se que o limite de uma sucessão convergente de aproximações de soluções num intervalo compacto obtida pelo método de Euler é uma solução do problema de valor inicial considerado e que a sucessão de funções obtida por este método tem sempre subsucessões convergentes.

Nesta secção considera-se uma outra sucessão de aproximações que, embora em condições mais restritivas, permite obter mais facilmente a existência e também a unicidade de soluções do problema de valor inicial.

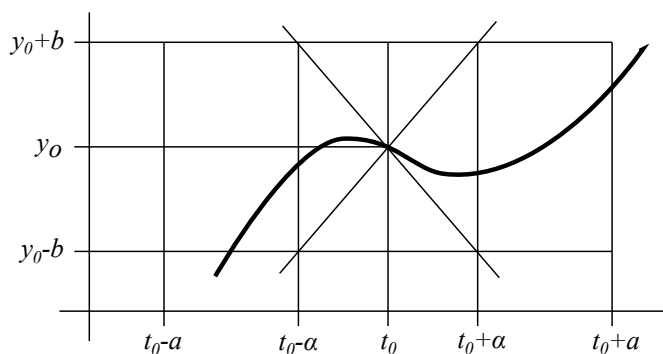


Figura 2.1: Escolha de  $\alpha > 0$  de modo a ser sempre  $\mathbf{y}_i(I_\alpha) \subset R$

Como, por definição, uma solução  $\mathbf{y}$  do problema de valor inicial (2.1) é uma função  $C^1$  definida num intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ), conforme o caso, do Teorema Fundamental do Cálculo conclui-se que o problema de valor inicial considerado é equivalente à equação que se obtém

integrando ambos os lados da equação em intervalos  $[t_0, t]$ ,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds .$$

Assim, considera-se a sucessão definida recursivamente por

$$(2.2) \quad \mathbf{y}_{j+1}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_j(s)) ds , \quad \mathbf{y}_0(t) = \mathbf{y}_0 ,$$

para  $t \in I_\alpha$ , com  $\alpha > 0$  apropriado, e procura-se definir condições para que a sucessão  $\{\mathbf{y}_j\}$  seja convergente. Para garantir que a sucessão está bem definida há que escolher  $\alpha$  de forma a cada função  $\mathbf{y}_j$  não sair do domínio  $D$  de definição de  $\mathbf{f}$ . Começa-se por tomar um conjunto centrado em  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  e contido em  $D$  da forma  $R = I_\alpha \times B_b$ , onde  $I_\alpha = [t_0 - a, t_0 + a]$  e  $B_b = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$ , o que é sempre possível porque  $D$  é um conjunto aberto. O conjunto  $R$  é limitado e fechado em  $\mathbb{R}^{n+1}$  (ou  $\mathbb{C}^{n+1}$ ) e, portanto, é compacto. Como  $\mathbf{f}$  é contínua, o Teorema de Weierstrass<sup>1</sup> garante que  $\mathbf{f}$  é limitada em  $R$ , pelo que existe  $M > 0$  tal que  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M$  para  $(t, \mathbf{y}) \in R$ . Assim, se o gráfico de  $\mathbf{y}_j$  está contido em  $R$  verifica-se  $\|\mathbf{y}_{j+1}(t) - \mathbf{y}_0\| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha$  (Figura 2.1). Para ter a certeza que  $\mathbf{y}_{j+1}$  pode ser definida em  $I_\alpha$  e tem o gráfico contido em  $R$ , basta tomar  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .

Uma forma de provar que uma sucessão em  $\mathbb{R}^n$  é convergente quando se desconhece um candidato para o limite é provar que é uma **sucessão de Cauchy**<sup>2</sup>. Para provar que  $\{\mathbf{y}_j(t)\}$  é uma sucessão de Cauchy para  $t \in I_\alpha$  convém obter uma estimativa para  $\|\mathbf{y}_{j+k}(t) - \mathbf{y}_j(t)\|$ . Esta quantidade pode ser majorada pela soma das normas de diferenças entre termos consecutivos

$$\|\mathbf{y}_{j+k}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| \leq \sum_{m=j}^{j+k-1} \|\mathbf{y}_{m+1}(t) - \mathbf{y}_m(t)\| .$$

É preciso mostrar que se pode fazer  $\|\mathbf{y}_{j+k}(t) - \mathbf{y}_j(t)\|$  arbitrariamente pequeno tomando  $j$  suficientemente grande, o que se pode conseguir se as distâncias  $\|\mathbf{y}_{m+1}(t) - \mathbf{y}_m(t)\|$  contraírem à medida que  $m$  cresce. Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_{m+1}(t) - \mathbf{y}_m(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_m(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_{m-1}(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_m(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_{m-1}(s))\| ds \right| , \text{ para } t \in I_\alpha , \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Weierstrass, Karl (1815-1897).

<sup>2</sup>Cauchy, Augustin Louis (1789-1857). Diz-se que uma sucessão  $\{\mathbf{v}_j\}$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma sucessão de Cauchy se qualquer que seja  $\epsilon > 0$  verifica-se  $\|\mathbf{v}_{j+k} - \mathbf{v}_j\| < \epsilon$  para  $j \in \mathbb{N}$  suficientemente grande e todo  $k \in \mathbb{N}$ . Toda a sucessão de Cauchy em  $\mathbb{R}^n$  é convergente.

de forma a assegurar que estas distâncias contraem é natural exigir que exista  $L > 0$  tal que

$$(2.3) \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*)\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|, \text{ para } (t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{y}^*) \in R,$$

e tomar  $\alpha > 0$  mais pequeno se necessário para que  $\alpha L < 1$ , pois então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_{m+1}(t) - \mathbf{y}_m(t)\| &\leq (\alpha L) \max_{s \in I_\alpha} \|\mathbf{y}_m(s) - \mathbf{y}_{m-1}(s)\| \\ \|\mathbf{y}_{j+1}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| &\leq (\alpha L)^j \max_{s \in I_\alpha} \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_0\| \\ \|\mathbf{y}_{j+k}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| &\leq \left[ 1 + (\alpha L) + (\alpha L)^2 + \dots + (\alpha L)^{k-1} \right] \|\mathbf{y}_{j+1}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| \\ &\leq \frac{1 - (\alpha L)^k}{1 - \alpha L} (\alpha L)^j b < \frac{(\alpha L)^j}{1 - \alpha L} b, \end{aligned}$$

para  $j, m, k \in \mathbb{N}_0, t \in I_\alpha$ . Seja  $\epsilon > 0$ . Resulta da última desigualdade anterior que se pode fazer  $\|\mathbf{y}_{j+k}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| \leq \epsilon$  tomando  $j$  suficientemente elevado. Em consequência, para cada  $t \in I_\alpha$ ,  $\{\mathbf{y}_j(t)\}$  é uma sucessão de Cauchy e, portanto, converge para um ponto de  $\mathbb{R}^n$  que se designa por  $\mathbf{y}(t)$ . Então,  $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}_{j+k}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| \leq \epsilon$ , para  $t \in I_\alpha$ . Para  $t, t^* \in I_\alpha$  verifica-se

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t^*)\| \leq \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_j(t)\| + \|\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_j(t^*)\| + \|\mathbf{y}_j(t^*) - \mathbf{y}(t^*)\|.$$

Como  $\mathbf{y}_j(t) \rightarrow \mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{y}_j(t^*) \rightarrow \mathbf{y}(t^*)$  quando  $j \rightarrow +\infty$  e  $\mathbf{y}_j$  é contínua em  $I_\alpha$ , pode-se fazer  $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t^*)\| < \epsilon$  tomando  $j$  suficientemente grande e  $t, t^*$  suficientemente próximos. Concluiu-se que a função  $\mathbf{y}$  é contínua em  $I_\alpha$ .

Para completar o esquema indicado no início da secção para estabelecer a existência de solução resta provar o terceiro passo, isto é, que a função  $\mathbf{y}$  definida em  $I_\alpha$  é solução do problema de valor inicial (2.1). Para  $j$  suficientemente grande verifica-se

$$\left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_j(s)) ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}_j(s) - \mathbf{y}(s)\| ds \right| \leq (\alpha L) \epsilon.$$

Fazendo o limite  $j \rightarrow +\infty$  em ambos os termos da igualdade (2.2), obtém-se

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds, \quad \text{para } t \in I_\alpha.$$

Segue-se do Teorema Fundamental do Cálculo que  $\mathbf{y}$  é  $C^1$  em  $I_\alpha$  e satisfaz o problema de valor inicial (2.1). Está estabelecida a existência de solução deste problema.

Para provar a unicidade de solução definida em  $I_\alpha$ , nota-se que se  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  forem soluções definidas em  $I_\alpha$ , então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{z}(s)\| ds \right| \leq (\alpha L) \max_{s \in I_\alpha} \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{z}(s)\|. \end{aligned}$$

Do Teorema de Weierstrass, a função contínua  $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$  definida no intervalo compacto  $I_\alpha$  tem um máximo num ponto  $\tau \in I_\alpha$ . Então  $\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{z}(\tau)\| \leq (\alpha L) \|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{z}(\tau)\|$ . Como  $\alpha L < 1$ , é  $\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{z}(\tau)\| = 0$ . Logo para todo  $t \in I_\alpha$  é

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \max_{s \in I_\alpha} \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{z}(s)\| = \|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{z}(\tau)\| = 0 ,$$

pelo que  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ , e a unicidade de solução do problema de valor inicial (3.1) fica estabelecida.

Na argumentação anterior a única condição adicional exigida foi (2.3). Se  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) e  $\mathbf{f}$  está definida em  $D$  e tem valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) diz-se que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é **lipschitziana** em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$  se  $\mathbf{f}$  é contínua em  $D$  e existe uma constante  $L \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*)\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\| , \quad \text{para } (t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{y}^*) \in D .$$

Neste caso diz-se ainda que  $L$  é uma **constante de Lipschitz**<sup>3</sup> de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$ . Diz-se que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é **localmente lipschitziana** em relação a  $\mathbf{y}$  num conjunto  $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) se  $\mathbf{f}$  é contínua em  $S$  e  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em cada conjunto compacto  $K \subset S$ .

Pode-se agora enunciar o resultado de existência e unicidade de solução local do problema de valor inicial (2.1) estabelecido com o argumento anterior, conhecido por Teorema de de Picard-Lindelöf<sup>4</sup>, com a hipótese de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  ser localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$ .

(2.4) **Teorema de Picard-Lindelöf:** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  uma função definida em  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) tal que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$ , e  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ . Então, a solução do problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) , \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 ,$$

*existe e é única num intervalo  $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , com  $\alpha > 0$ .*

*Se  $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$  e  $B_b = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$  são tais que  $I_a \times B_b \subset D$ ,  $M$  é o máximo de  $\|\mathbf{f}\|$  em  $I_a \times B_b$  e  $L$  é uma constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  em relação a  $\mathbf{y}$  em  $I_a \times B_b$ , então pode-se tomar  $\alpha = \min \{a, b/M, 1/L\}$ .*

Como se viu no capítulo anterior a propósito do estudo de equações separáveis da forma  $\dot{y} = y^\alpha$ , um problema de valor inicial do tipo considerado pode ter soluções sem que sejam únicas, nomeadamente se  $0 < \alpha < 1$ , como

<sup>3</sup>Lipschitz, Rudolf (1832-1903).

<sup>4</sup>Lindelöf, Ernst Leonard (1870-1946).

se verificou nos exemplos que consideraram os casos particulares  $\dot{y} = \sqrt[3]{y^2}$  e  $\dot{y} = \sqrt{y}$ . Se  $0 < \alpha < 1$ , a função  $f(t, y) = y^\alpha$  tem variações arbitrariamente elevadas para pequenas variações de  $y$  na vizinhança de zero, pois  $(\partial f / \partial y)(t, y) \rightarrow \infty$  quando  $y \rightarrow 0$  (Figura 2.2), o que permite a soluções com valores próximos de zero variarem suficientemente rapidamente para poderem intersectar a solução nula, isto é, para chegarem a zero em tempo finito. Uma tal situação não pode acontecer para  $\dot{y} = f(t, y)$  se  $f(t, y)$  é localmente lipschitziana em relação a  $y$  com constante de Lipschitz  $L$ , visto que, então, para  $t$  fixo os acréscimos de  $f(t, y)$  são limitados por  $L$  vezes os acréscimos em  $y$ .

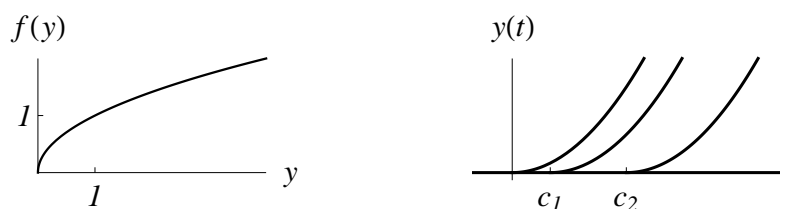


Figura 2.2: Gráfico de  $y \mapsto \sqrt{y}$  e não unicidade de soluções de  $\dot{y} = \sqrt{y}$ ,  $y(t_0) = 0$

A designação "localmente lipschitziana" pode parecer à primeira vista estranha, já que se refere à função ser lipschitziana em conjuntos compactos, mas é natural adoptá-la devido ao resultado seguinte.

(2.5) **Proposição:** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  uma função definida e contínua em  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ). Então  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$  se e só se todo  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$  tem uma vizinhança  $V_{(t_0, \mathbf{y}_0)}$  onde  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$ .*

*Dem.* Como  $D$  é um conjunto aberto, para todo o ponto  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$  existe um subconjunto compacto de  $D$  que contém uma vizinhança desse ponto, pelo que a necessidade é imediata.

Seja  $K \subset D$  um conjunto compacto,  $\mathcal{U}$  uma cobertura de  $K$  por intervalos abertos da forma  $R = I_1 \times \cdots \times I_{n+1} \subset D$  centrados em cada ponto de  $K$ , onde cada  $I_k$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , nos quais  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$ . Da propriedade de Heine<sup>5</sup>-Borel<sup>6</sup> de conjuntos compactos,  $\mathcal{U}$  tem uma subcobertura finita  $\mathcal{V}$  do conjunto compacto  $K$  cuja união é um conjunto aberto  $V \supset K$ . Consideramos a partição de  $V$  em

<sup>5</sup>Heine, Heinrich Eduard (1821-1881).

<sup>6</sup>Borel, Félix-Édouard-Justin-Émile (1871-1856).

todos os subintervalos definidos por extremos consecutivos de arestas dos intervalos em  $\mathcal{V}$  e designamos o conjunto dos correspondentes subintervalos abertos por  $\{R_j: j=1, \dots, N\}$  (Figura 2.3). Cada um destes subintervalos unido a qualquer um dos subintervalos adjacentes e à sua fronteira comum está contido num dos elementos de  $\mathcal{V}$ , no qual  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$ . Designa-se por  $L_j$  o máximo das constantes de Lipschitz nas uniões de  $R_j$  com cada um dos subintervalos abertos adjacentes e com a sua fronteira comum e designa-se por  $A_j$  a união dos subintervalos abertos adjacentes a  $R_j$ . Define-se a função definida no conjunto compacto  $K$  pelas razões incrementais de  $\mathbf{f}$  consideradas na definição da derivada de  $\mathbf{f}$  por  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*) = \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*)\| / \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|$  para  $(t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{y}^*) \in K$  com  $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*$ . A função  $\mathbf{g}$  é majorada por  $L_j$  em  $\{(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*) : (t, \mathbf{y}^*) \in R_j, (t, \mathbf{y}) \in \overline{R_j} \cup A_j, \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*\}$ . Por outro lado, como  $\mathbf{g}$  é contínua no conjunto compacto  $\{(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*) : (t, \mathbf{y}^*) \in \overline{R_j}, (t, \mathbf{y}) \in K \setminus (\overline{R_j} \cup A_j)\}$ , resulta do Teorema de Weierstrass que  $\mathbf{g}$  tem um máximo  $M_j$  neste conjunto. Com  $L = \max\{L_j, M_j: j=1, \dots, N\}$ , para todo  $(t, \mathbf{y}^*) \in B_j, (t, \mathbf{y}) \in K$  com  $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*$  verifica-se  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}^*) \leq L$ , ou seja  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*)\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|$ . Esta desigualdade também é (trivialmente) verificada no caso  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ . Portanto,  $L$  é uma constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  em relação a  $\mathbf{y}$  em  $K$ . Fica assim estabelecida a suficiência da condição enunciada. Q.E.D.

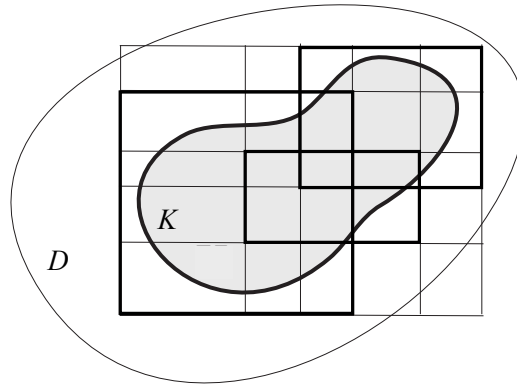


Figura 2.3: Ilustração de apoio à prova da Proposição (2.5)

A condição de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  ser localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$  corresponde a exigir que as correspondentes razões incrementais relativas a  $\mathbf{y}$  sejam limitadas na vizinhança de cada ponto, pelo que é mais fraca que a diferenciabilidade e mais forte que a continuidade em  $\mathbf{y}$ . Em caso de diferenciabilidade, a norma da derivada de  $\mathbf{f}$  em ordem a  $\mathbf{y}$  é limitada em cada ponto pela correspondente constante de Lipschitz. Assim, é de esperar que  $\mathbf{f}$  seja automaticamente localmente lipschitziana se é contínua e  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$  existe e é contínua em  $D$ , como se estabelece a seguir.

(2.6) **Proposição:** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  uma função definida e contínua em  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ). Se  $(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y})(t, \mathbf{y})$  existe e é contínua em todo  $(t, \mathbf{y}) \in D$ , então  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$ .*

*Dem.* Devido ao resultado anterior, basta provar que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em toda a bola fechada  $\bar{B} \subset D$ . Considera-se primeiro o caso  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . O Teorema de Weierstrass garante que as derivadas parciais das componentes de  $\mathbf{f}$  são limitadas no conjunto compacto  $\bar{B}$ , isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|\partial f_k / \partial y_j| \leq M$  em  $\bar{B}$ , para  $k, j = 1, \dots, n$ . Para  $(t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{y}^*) \in \bar{B}$  com  $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*$ , resulta do Teorema do Valor Intermédio aplicado a cada componente  $f_j$  de  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  que existe um ponto  $\mathbf{z}_j^*$  no segmento de recta que une  $(t, \mathbf{y})$  a  $(t, \mathbf{y}^*)$ , tal que

$$|f_j(t, \mathbf{y}) - f_j(t, \mathbf{y}^*)| = |\nabla f_j(\mathbf{z}_j^*) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)| \\ \leq \|\nabla f_j(\mathbf{z}_j^*)\| \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\| \leq \sqrt{n}M \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\| .$$

Portanto  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*)\| \leq nM \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|$  para  $(t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{y}^*) \in \bar{B}$ . Conclui-se que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $\bar{B}$ , com constante de Lipschitz  $nM$ . Para  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$  aplica-se uma argumentação análoga às partes real e imaginária das componentes de  $\mathbf{f}$ . *Q.E.D.*

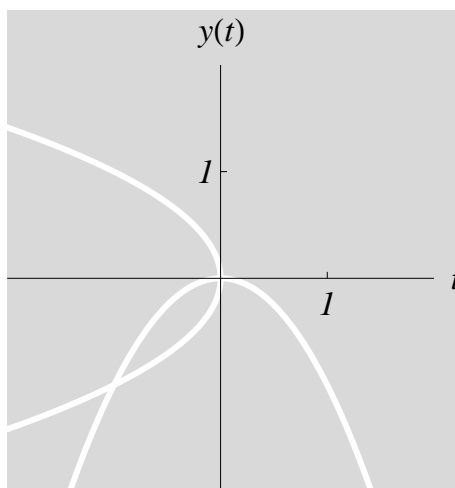


Figura 2.4: Conjunto onde  $f(t, y) = \sqrt[3]{t+y^2}/(t^2+y)$  é localmente lipschitziana em relação a  $y$



## (2.7) Exemplos:

1. A equação diferencial  $\dot{y} = \sqrt[3]{t+y^2}/(t^2+y)$  é da forma  $\dot{y} = f(t, y)$ , com  $f(t, y) = \sqrt[3]{t+y^2}/(t^2+y)$  definida no conjunto  $A = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -t^2\}$ . Os métodos de resolução de equações diferenciais do capítulo anterior não permitem resolver esta equação. Apesar disso, como  $f$  é  $C^1$  em  $D = A \setminus \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t = -y^2\}$  (Figura 2.4), sabe-se da proposição anterior que  $f(t, y)$  é localmente lipschitziana em relação a  $y$  em  $D$ . Portanto, o Teorema de Picard-Lindelöf garante que os problemas de valor inicial  $y(t_0) = y_0$  para a equação dada, com  $y_0 \neq -t_0^2$  e  $t_0 \neq -y_0^2$ , têm solução local única, definida num intervalo que contém  $t_0$  no interior<sup>7</sup>.
2. A equação diferencial  $\ddot{y} + (y^2 + \dot{y}^2 - 1)\dot{y} + y = 0$  pode ser escrita na forma de um sistema de primeira ordem  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ , com  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ,  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$  e  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (y_2, -(y_1^2 + y_2^2 - 1)y_2 - y_1)$ . A função  $\mathbf{f}$  é  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , pelo que a proposição anterior e o Teorema de Picard-Lindelöf garantem que os problemas de valor inicial  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ , com  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^3$ , têm solução única  $\mathbf{y}$  definida num intervalo que contém  $t_0$  no interior. Assim, os problemas de valor inicial  $y(t_0) = y_0$ ,  $\dot{y}(t_0) = v_0$ , com  $t_0, y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ , para a equação escalar de segunda ordem dada têm solução única  $y$  definida num intervalo que contém  $t_0$  no interior.

O Teorema de Picard-Lindelöf estabelece a existência e unicidade de solução local de problemas de valor inicial  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ , sob a hipótese de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  ser localmente Lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  numa vizinhança de  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$ . Porém, para garantir existência local de solução do problema de valor inicial basta que  $\mathbf{f}$  seja contínua numa vizinhança de  $(t_0, \mathbf{y}_0)$ . A demonstração deste resultado, conhecido por **Teorema de Peano**<sup>8</sup>, pode ser feita com base em aproximações obtidas pelo método de Euler como se mostra no apêndice A.

É de notar que, ao contrário da sucessão de aproximações obtidas pelo método de Euler, a sucessão de aproximações utilizadas na prova do Teorema de Picard-Lindelöf, a que se chama **aproximações de Picard**, é muito má do ponto de vista de cálculo numérico. De facto, não só exige executar uma integração em cada passo e actualizar os valores da aproximação ao longo de todo o intervalo, como os intervalos têm de ser suficientemente pequenos para se obter convergência e só depois se pode passar a um intervalo seguinte.

<sup>7</sup>Apesar de  $f(t, y)$  não ser localmente lipschitziana em relação a  $y$  em  $A$ , é contínua neste conjunto, pelo que do Teorema de Peano considerado no apêndice A todo o problema de valor inicial em  $A$  tem solução.

<sup>8</sup>Peano, Giuseppe (1858-1932).

## 2.3 Prolongamento de soluções a intervalos máximos

Sabe-se da secção anterior que o problema de valor inicial (2.1) tem solução local única quando  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  num conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) que contém  $(t_0, \mathbf{y}_0)$ . Este resultado é importante por si só, mas o seu grande interesse resulta de uma solução definida num intervalo  $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , com  $\alpha > 0$ , poder ser prolongada a um intervalo máximo de definição e das únicas limitações ao prolongamento serem as que já foram observadas no capítulo anterior para equações separáveis, nomeadamente: ser atingida a fronteira do domínio de definição de  $\mathbf{f}$ , ou a solução explodir.

É o que se estabelece no resultado seguinte, onde  $(t, \mathbf{y}(t)) \rightarrow \partial D$  quando  $t \rightarrow a^+$  ou  $t \rightarrow b^-$  significa que todos os pontos limite de  $t \mapsto (t, \mathbf{y}(t))$  quando  $t \rightarrow a^+$  ou  $t \rightarrow b^-$  pertencem a  $\partial D$ , ou seja, o limite de qualquer sucessão  $\{(t_k, \mathbf{y}(t_k))\}$  convergente, com a sucessão  $\{t_k\} \subset ]a, b[$  a convergir para  $a$  ou  $b$ , pertence a  $\partial D$ .

(2.8) **Teorema:** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  uma função definida em  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) tal que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$ . Então, toda a solução  $\mathbf{y}$  de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  num intervalo  $J$  tem uma extensão a um intervalo máximo de definição  $]a, b[ \supset J$  e verifica-se  $(t, \mathbf{y}(t)) \rightarrow \partial D$  ou  $\|(t, \mathbf{y}(t))\| \rightarrow \infty$ , quando  $t \rightarrow a^+$  ou  $t \rightarrow b^-$ .*

*Dem.* Prova-se o prolongamento para a direita (para a esquerda é análogo). Sem perda de generalidade supõe-se que  $J$  é um intervalo fechado  $[c, b_0]$  (caso contrário toma-se um seu subintervalo fechado).

Seja  $K$  um conjunto compacto e  $V$  um conjunto aberto limitado tais que  $(b_0, \mathbf{y}(b_0)) \in K \subset V \subset \bar{V} \subset D$ . Designa-se por  $d$  a distância de  $K$  à fronteira de  $V$ ,  $d = \inf\{\|\mathbf{k} - \mathbf{v}\| : \mathbf{k} \in K, \mathbf{v} \in \partial V\}$ , por  $M$  o máximo da função contínua  $\|\mathbf{f}\|$  no compacto  $\bar{V}$  e por  $L$  uma constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  em relação a  $\mathbf{y}$  em  $\bar{V}$ . É claro que  $d > 0$  e existem  $\alpha, \beta > 0$  com  $M\alpha < \beta$  e  $L\alpha < 1$  tais que  $\{(t, \mathbf{y}) : |t - b| \leq \alpha, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \beta\} \subset \bar{V}$  para todo  $(b, \mathbf{x}) \in K$ . Segue-se do Teorema de Picard-Lindelöf que a solução  $\mathbf{y}$  que satisfaz  $\mathbf{y}(b) = \mathbf{x}$ , com  $(b, \mathbf{x}) \in K$ , pode ser definida no intervalo  $[b - \alpha, b + \alpha]$ . Assim, a solução  $\mathbf{y}$  definida em  $[c, b_0]$  pode ser prolongada ao intervalo  $[c, b_0 + \alpha]$ . Se  $(b_0 + \alpha, \mathbf{y}(b_0 + \alpha)) \in K$ , repete-se o prolongamento anterior um número finito de vezes até obter  $\mathbf{y}$  definida num intervalo  $[c, b_1]$  tal que  $(b_1, \mathbf{y}(b_1)) \notin K$ .

O conjunto  $D$  pode ser aproximado, tanto quanto desejado, por conjuntos abertos limitados  $V_k = \{(t, \mathbf{y}) \in D : |t| < k, \|\mathbf{y}\| < k, \text{dist}((t, \mathbf{y}), \partial D) > 1/k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $\text{dist}$  designa aqui a distância de um ponto a um conjunto, pois  $D = \cup_{k=1}^{\infty} V_k$  (Figura 2.5). Como  $\bar{V}_k$  é compacto, o argumento an-

terior garante que a solução  $\mathbf{y}$  pode ser prolongada a intervalos  $[c, b_k]$ , com  $(b_k, \mathbf{y}(b_k)) \in D \setminus V_{k-1}$ . Da definição de  $V_{k-1}$  resulta  $|b_k| \geq k-1$  ou  $\|\mathbf{y}(b_k)\| \geq k-1$  ou  $\text{dist}((b_k, \mathbf{y}(b_k)), \partial D) \leq 1/(k-1)$ , pelo que, quando  $k \rightarrow +\infty$ , ou  $b_k \rightarrow +\infty$  ou  $\|\mathbf{y}(b_k)\| \rightarrow +\infty$  ou  $(b_k, \mathbf{y}(b_k)) \rightarrow \partial D$ . A sucessão  $\{b_k\}$  é crescente e, portanto, tem limite  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Se  $b \neq +\infty$ , verifica-se  $\|\mathbf{y}(b_k)\| \rightarrow +\infty$  ou  $(b_k, \mathbf{y}(b_k)) \rightarrow \partial D$ , com  $b_k \rightarrow b$ , pelo que a solução  $\mathbf{y}$  não pode ser prolongada para além do instante  $b$ . Para provar que  $\|\mathbf{y}(t)\| \rightarrow +\infty$  ou  $(t, \mathbf{y}(t)) \rightarrow \partial D$  quando  $t \rightarrow b^-$ , é necessário verificar que nenhum ponto limite de uma sucessão  $\{(t_j, \mathbf{y}(t_j))\}$ , com  $t_j < b, t_j \rightarrow b$ , pode ser interior a  $D$ . Suponha-se, então, que  $\mathbf{y}(t_j) \rightarrow \mathbf{y}^*$ . Se  $(b, \mathbf{y}^*)$  pertencesse a  $D$  pertenceria a um dos conjuntos compactos  $\tilde{V}_k$  considerados acima e a solução  $\mathbf{y}$  seria prolongável a um intervalo  $[c, b+\alpha]$  com  $\alpha > 0$ , contrariando a impossibilidade de prolongar a solução  $\mathbf{y}$  para além do instante  $b$ . Logo  $(b, \mathbf{y}^*) \in D$  e  $(t, \mathbf{y}(t)) \rightarrow \partial D$  ou  $\|\mathbf{y}(t)\| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow b^-$ .

*Q.E.D.*

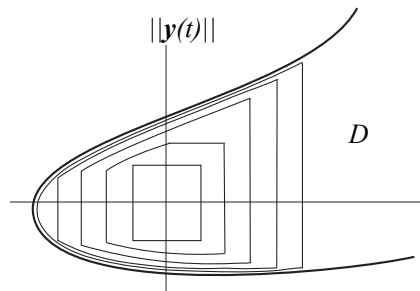


Figura 2.5: Conjunto aberto como união numerável de conjuntos compactos

Uma consequência deste teorema é que o valor de  $\alpha$  no intervalo  $I_\alpha$  de definição da solução local estabelecida no Teorema de Picard-Lindelöf  $\alpha = \min\{a, b/M, 1/L\}$  pode agora ser modificado para  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ , visto que a solução não pode deixar o conjunto  $I_a \times B_b$  para  $t \in I_\alpha$ , e, portanto, não explode nem sai de  $D$ . Assim, a restrição ao comprimento do intervalo de definição da solução relativa à constante de Lipschitz  $L$  em  $I_a \times B_b$  deixa de ter de ser considerada.

Uma forma de estabelecer em casos concretos que uma solução pode ser prolongada até que a sua trajectória sai do domínio de definição da função  $\mathbf{f}$  que define a equação consiste em majorar a norma da solução por uma função limitada em intervalos limitados. Para este efeito é útil poder comparar os valores de soluções de equações diferenciais escalares diferentes como na proposição seguinte.

(2.9) **Proposição (Método de Comparação):** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  um conjunto aberto,  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que  $f(t, y), g(t, y)$  são localmente lipschitzianas em relação a  $y$  em  $D$  e satisfazem  $f(t, y) < g(t, y)$  para  $(t, y) \in D$ . Então, se  $y$  satisfaz  $\dot{y} = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , com  $(t_0, y_0) \in D$  e  $u$  é solução de  $\dot{u} = g(t, u)$ ,  $u(t_0) = u_0 \geq y_0$ , num intervalo que contém  $t_0$  no interior, então  $y(t) \leq u(t)$  para todo  $t \geq t_0$  nesse intervalo.*

*Em particular, se  $[t_0, a]$  está contido no intervalo máximo de definição da solução  $u$  da equação diferencial considerada, então  $y$  é majorada em todos os pontos do seu domínio que pertencem àquele intervalo pelo que não explode para  $+\infty$  nesse intervalo, e se  $y$  explode para  $+\infty$  num ponto  $b \in ]t_0, +\infty[$  então o intervalo máximo de definição de  $u$  como solução da equação diferencial está contido em  $] - \infty, b[$  pelo que  $u$  explode ou atinge  $\partial D$  num ponto  $t \in ]t_0, b[$  (Figura 2.6).*

*Dem.* Suponhamos que não se verifica  $y(t) \leq u(t)$  para todo  $t$  na intersecção dos intervalos de definição das duas funções. Então existe um intervalo  $[t_1, t_2]$  contido nessa intersecção tal que  $y(t_1) = u(t_1)$  e  $y(t) > u(t)$  para  $t \in ]t_1, t_2]$ . Logo  $y(t) - y(t_1) > u(t) - u(t_1)$  para  $t \in ]t_1, t_2]$ , e

$$\begin{aligned} f(t_1, y(t_1)) = \dot{y}(t_1) &= \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{y(t) - y(t_1)}{t - t_1} \geq \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{u(t) - u(t_1)}{t - t_1} \\ &= \dot{u}(t_1) = g(t_1, u(t_1)), \end{aligned}$$

em contradição com  $f(t, y) < g(t, y)$ . Portanto, tem de verificar-se  $y(t) \leq u(t)$ . As restantes afirmações no enunciado obtêm-se com o teorema 2.8. *Q.E.D.*

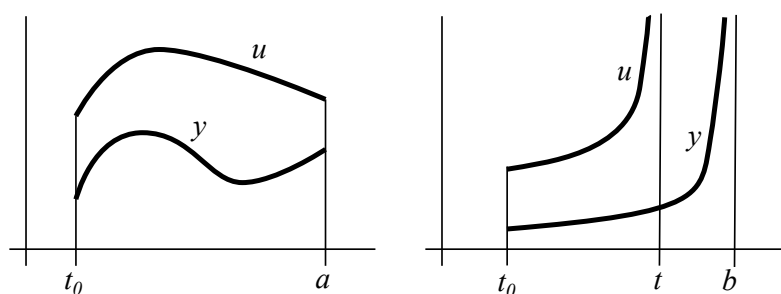


Figura 2.6: Método de Comparação

O Método de Comparação estabelecido no resultado anterior pode ser aplicado para majorar ou minorar uma solução de uma equação diferencial. Portanto, em condições apropriadas pode ser usado para assegurar que, quando o tempo cresce, a solução não explode para  $+\infty$  num dado

intervalo, mas noutras condições pode ser usado para assegurar que a solução explode para  $+\infty$ , dependendo de se considerarem funções auxiliares para comparação, respectivamente, maiores ou menores do que a solução considerada. A situação é semelhante para a explosão de soluções para  $-\infty$  trocando na afirmação anterior maiores com menores. As alterações apropriadas à consideração da possibilidade de explosão de soluções quando  $t$  decresce também são simples de obter.

Em aplicações é muitas vezes importante averiguar se as soluções explodem ou não. De facto, se a equação diferencial considerada descreve a evolução de um dado sistema físico, quando há uma explosão a evolução do sistema termina com pelo menos uma das variáveis que o descreve a tender para infinito. Este facto ou se traduz no comportamento físico do sistema ou significa que o modelo não é adequado a essa situação, o que em qualquer dos casos tem importância prática.

Aplicando a proposição anterior a majorações da norma de soluções de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) obtém-se o resultado seguinte.

(2.10) **Corolário:** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) e  $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  conjuntos abertos,  $\mathbf{f}$  uma função definida em  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ), e  $g : S \rightarrow \mathbb{R}^+$  tais que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  e  $g(t, u)$  são localmente lipschitzianas em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$  e a  $u$  em  $S$ , respectivamente, e satisfazem  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| < g(t, \|\mathbf{y}\|)$  para  $(t, \mathbf{y}) \in D$ . Então, se  $\mathbf{y}$  é a solução de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ , com  $(t_0, \|\mathbf{y}(t_0)\|) \in S$  para  $t_0$  no intervalo máximo de definição da solução  $\mathbf{y}$ , e  $u$  é solução de  $\dot{u} = g(t, u)$ ,  $u(t_0) = u_0$ , com  $\|\mathbf{y}_0\| \leq u_0$ , verifica-se  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq u(t)$  para todo  $t \geq t_0$  na intersecção dos intervalos máximos de definição destas soluções.*

*Em particular, se  $[t_0, t_0 + a]$  está contido no intervalo máximo de definição de  $u$ , então  $\|\mathbf{y}\|$  é majorada em todos os pontos do seu domínio que pertencem ao intervalo  $[t_0, t_0 + a]$ , pelo que não explode neste intervalo.*

*Dem.* Em todos os instantes  $t$  onde  $\mathbf{y}(t) \neq 0$ , é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}(t)\| &= \frac{d}{dt} (\mathbf{y}(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}(t))^{1/2} = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{y}(t) \cdot \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t)}{2(\mathbf{y}(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}(t))^{1/2}} \\ &\leq \frac{|\dot{\mathbf{y}}(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}(t)| + |\mathbf{y}(t) \cdot \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t)|}{2\|\mathbf{y}(t)\|} \leq \frac{2\|\dot{\mathbf{y}}(t)\| \|\mathbf{y}(t)\|}{2\|\mathbf{y}(t)\|} = \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|, \end{aligned}$$

onde  $\bar{\mathbf{y}}$  designa a função complexa conjugada de  $\mathbf{y}$ . Assim,  $v = \|\mathbf{y}\|$  satisfaz em todos os intervalos onde não se anula a desigualdade  $\dot{v} \leq \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| < g(t, v)$ . Como nos instantes  $t$  onde  $\mathbf{y}(t) = 0$  é  $\|\mathbf{y}(t)\| = 0 \leq u(t)$ , uma argumentação análoga à da demonstração da proposição anterior aplicada a intervalos com início em  $t_0$  ou em instantes onde  $\mathbf{y}$  se anula garante que também nestes intervalos  $\|\mathbf{y}(t)\| = v(t) \leq u(t)$ . A última afirmação no enunciado é consequência directa do que já foi estabelecido. Q.E.D.

## (2.11) Exemplos:

1. A equação diferencial  $\dot{y} = y \cos(t+y)/(1+2y^2)$  é da forma  $\dot{y} = f(t, y)$ , com  $f(t, y) = y \cos(t+y)/(1+2y^2)$ . Esta função está definida e é  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , pelo que é localmente lipschitziana. Do Teorema de Picard-Lindelöf, os problemas de valor inicial  $y(t_0) = y_0$  para a equação dada têm solução local única para todos  $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ .

Como

$$|f(t, y)| = \frac{|y| |\cos(t+y)|}{1+2y^2} < \frac{|y|}{2y^2} = \frac{1}{2|y|},$$

verifica-se  $|f(t, y)| < g(t, |y|)$ , com  $g(t, u) = 1/(2u)$ . A equação  $\dot{u} = 1/(2u)$  é separável e a sua solução com  $u(t_0) = u_0 > 0$  é  $u(t) = (t + u_0^2 - t_0)^{1/2}$ , definida no intervalo  $]t_0 - u_0^2, +\infty[$ . Do corolário anterior obtém-se que cada solução  $y$  da equação dada satisfaz  $|y(t)| \leq u(t)$  para  $t \geq t_0$ , com  $u_0 = y(t_0)$ .

Para analisar o caso  $t \leq t_0$  aplicando o corolário anterior pode-se fazer a mudança de variáveis que corresponde a trocar o sentido do  $t$  na vizinhança de  $t_0$ , mais especificamente  $z(t) = y(t_0 - (t - t_0))$ , obtendo-se  $\dot{z} = -f(t_0 - (t - t_0), z)$ . Como  $|-f(t_0 - (t - t_0), z)| < 1/(2|z|) = g(t, |z|)$ , resulta do corolário acima que cada solução satisfaz  $|z(t)| \leq u(t)$  para  $t \geq t_0$ , com  $u_0 = z(t_0)$ , pelo que  $|y(t)| \leq |z(t_0 - (t - t_0))| \leq u(t_0 - (t - t_0))$  para  $t \leq t_0$ .

Portanto, todas as soluções da equação dada são globais. Por exemplo, o gráfico da solução com valor inicial  $y(0) = 1$  está contido na conjunto indicado na Figura 2.7.

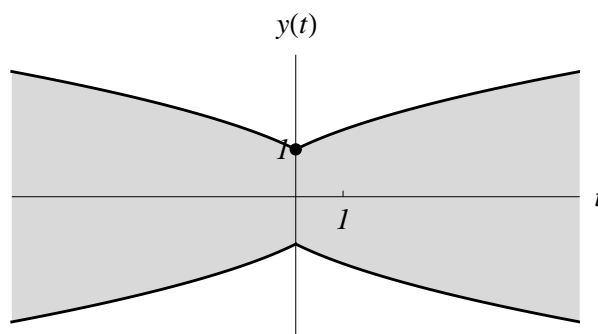


Figura 2.7: Conjunto que contém o gráfico da solução de  $\dot{y} = y \cos(t+y)/(1+2y^2)$ ,  $y(0) = 1$

2. Considera-se o problema de valor inicial  $\dot{y} = (1+t)^3 + y^{5/3}$ ,  $y(0) = 1$ . A equação é da forma  $\dot{y} = f(t, y)$ , com  $f(t, y) = (1+t)^3 + y^{5/3}$ . A função  $f$  está definida e é  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , logo  $f(t, y)$  é localmente lipschitziana

em relação a  $y$  em  $\mathbb{R}^2$  e o teorema de Picard-Lindelöf assegura que o problema de valor inicial considerado tem solução local única.

Para  $t > 0$  é  $f(t, y) > g(t, y)$ , com  $g(t, u) = u^{5/3}$ . A equação  $\dot{u} = u^{5/3}$  é separável e a sua solução com  $u(0) = 1$  é  $u(t) = [-2(t-3/2)/3]^{-3/2}$ , definida no intervalo  $] -\infty, 3/2[$ , e explode para  $+\infty$  no ponto  $3/2$ . Da Proposição (2.9) obtém-se  $y(t) \geq u(t)$  para  $t \geq 0$ , pelo que  $y$  explode num ponto do intervalo  $]0, 3/2]$ .

Para aplicar a Proposição (2.9) para estudar o intervalo de definição da solução  $y$  para  $t < 0$  convém considerar a mudança de variáveis  $z(t) = y(-t)$ . Então  $z$  satisfaz  $\dot{z} = h(t, z)$ ,  $z(0) = 1$  com  $h(t, z) = (t-1)^3 - z^{5/3}$ . Para  $0 < t < a$  é  $-1 - z^{5/3} < h(t, z) < (a-1)^3 - z^{5/3}$ . Assim, para  $a \in [0, 1]$ ,  $z > 0$ ,  $0 < t < a$  é  $\dot{z} = h(t, z) < 0$ , pelo que  $z(t) < 1$  para  $0 < t < a$ . Analogamente, para  $a > 1$ ,  $z > a^{9/5}$ ,  $0 < t < a$  é  $\dot{z} = h(t, z) < a^3 - z^{5/3} < 0$ , pelo que  $z(t) \leq a^{9/5}$ . Portanto,  $z$  não explode para  $+\infty$  para  $t \geq 0$ . Por outro lado, para  $0 < t < a$ ,  $z < -1$  é  $\dot{z} = h(t, z) > 1 - z^{5/3} > 0$ , pelo que  $z(t) \geq -1$ . Assim,  $z$  não explode para  $-\infty$  para  $t \geq 0$ . Conclui-se que o intervalo máximo de definição de  $z$  inclui  $[0, +\infty[$  e o intervalo máximo de definição de  $y(t) = z(-t)$  inclui  $] -\infty, 0]$ .

Segue-se do teorema 2.8 que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial considerado é da forma  $] -\infty, b[$ , com  $b \leq 3/2$ . Conclui-se, também, que o gráfico de  $y$  está contido no conjunto indicado na Figura 2.8.

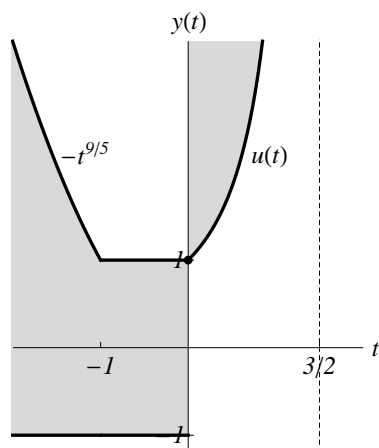


Figura 2.8: Conjunto que contém o gráfico da solução de  $\dot{y} = (1+t)^3 + y^{5/3}$ ,  $y(0) = 1$ , onde  $u(t) = (1-2t/3)^{-3/2}$

3. Considera-se a equação diferencial do Exemplo (2.7.2)

$$\ddot{y} + (y^2 + \dot{y}^2 - 1) \dot{y} + y = 0$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de primeira ordem  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ , com  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ,  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$  e

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (y_2, -(y_1^2 + y_2^2 - 1)y_2 - y_1)$$

Se  $\mathbf{y}$  é uma solução deste sistema, a função  $u(t) = \|\mathbf{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2$  tem derivada

$$\dot{u} = 2y_1\dot{y}_1 + 2y_2\dot{y}_2 = 2y_1y_2 - 2y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1)y_2 - 2y_2y_1 = 2(u - 1)y_2^2.$$

Assim, se  $u(t) > 1$  para  $t$  num intervalo  $J$ , então  $\dot{u} \leq 0$  e  $u$  é decrescente em  $J$ . Conclui-se que  $u(t) \leq \max\{1, u(t_0)\}$  para  $t \geq t_0$ , onde  $t_0$  é um ponto qualquer do intervalo de definição de  $\mathbf{y}$ , pelo que  $u$  e  $\mathbf{y}$  são limitadas para  $t \geq t_0$  no intervalo de definição destas soluções. Conclui-se que  $\mathbf{y}(t)$  não explode para  $t \geq t_0$  e obtém-se do teorema 2.8 que os intervalos máximos de definição das soluções da equação  $\dot{y} = f(t, y)$  são todos ilimitados para a direita, isto é, são do tipo  $]a, +\infty[$  com  $a$  real ou  $-\infty$ . Assim, os problemas de valor inicial para a equação escalar dada, com  $y(t_0) = y_0$ ,  $\dot{y}(t_0) = v_0$ ,  $t_0, y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ , têm solução única  $y$  definida num intervalo do tipo  $]a, +\infty[$  que contém  $t_0$ .

## 2.4 Dependência contínua de soluções em condições iniciais e parâmetros

Nas secções anteriores estabeleceram-se condições bastante satisfatórias para existência, unicidade e prolongamento de soluções de problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias. Contudo, há uma questão de grande importância, tanto prática como teórica, que não ficou esclarecida, nomeadamente a dependência contínua dos valores das soluções nas condições iniciais. Na verdade, as equações diferenciais seriam inúteis para a grande maioria das suas possíveis aplicações em ciências experimentais se os valores das soluções num dado instante de tempo variassem drasticamente com variações arbitrariamente pequenas de condições iniciais ou de parâmetros da equação, dado que do ponto de vista experimental é impossível determinar com toda a precisão os valores das condições iniciais e dos parâmetros da equação. Por outro lado, de um ponto de vista estritamente matemático, a falta de continuidade das soluções em relação às condições iniciais seria fatal para o desenvolvimento da teoria qualitativa de equações diferenciais.

Felizmente, acontece que a dependência contínua de que estamos a falar ocorre automaticamente quando são satisfeitas as condições do Teorema de Picard-Lindelöf atrás apresentado. Nessas condições, designa-se o valor da solução do problema de valor inicial  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ , no instante  $t$  por  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ . Sabe-se que para cada  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$  existe um intervalo máximo de definição da solução,  $]a(t_0, \mathbf{y}_0), b(t_0, \mathbf{y}_0)[$ . Assim, no conjunto



$$E = \{(t, t_0, \mathbf{y}_0) : (t_0, \mathbf{y}_0) \in D, t \in ]a(t_0, \mathbf{y}_0), b(t_0, \mathbf{y}_0)[ \},$$

a que se chama **domínio de definição das soluções da equação diferencial**, as soluções dos problemas de valor inicial considerados definem uma função que dá os valores das soluções em cada instante correspondentes a cada condição inicial por  $\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ . Pretende-se estabelecer que esta função é contínua.

(2.12) **Teorema:** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  uma função definida em  $D$  com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) tal que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$ , e  $E$  o domínio de definição das soluções de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ . Então  $E$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) e  $\mathbf{Y} : (t, t_0, \mathbf{y}_0) \mapsto \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  é contínua em  $E$ .*

*Dem.* Prova-se primeiro a continuidade da função  $(h, \mathbf{z}) \mapsto \mathbf{y}(t; t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})$  com  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$  e  $t \in ]a(t_0, \mathbf{y}_0), b(t_0, \mathbf{y}_0)[$  fixo.

Como  $D$  é um conjunto aberto, para  $|h|, \|\mathbf{z}\|$  suficientemente pequenos  $(t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) \in D$ . Para todo  $s$  na intersecção dos intervalos máximos de definição das soluções com condições iniciais  $(t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})$  e  $(t_0, \mathbf{y}_0)$  verifica-se para  $|h|, \|\mathbf{z}\|$  suficientemente pequenos

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}(s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{y}(s; t_0, \mathbf{y}_0) \\ &= (\mathbf{y}_0+\mathbf{z}) + \int_{t_0+h}^s \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) \, d\tau \\ & \quad - \mathbf{y}_0 - \int_{t_0}^s \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0)) \, d\tau \\ &= \mathbf{z} + \int_{t_0+h}^s [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0))] \, d\tau \\ & \quad - \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0)) \, d\tau, \end{aligned}$$

e, com  $v(s) = \mathbf{y}(s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{y}(s; t_0, \mathbf{y}_0)$ , verifica-se

$$\begin{aligned} v(s) \leq \|\mathbf{z}\| + & \left| \int_{t_0+h}^s \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0))\| \, d\tau \right| \\ & + \left| \int_{t_0}^{t_0+h} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0))\| \, d\tau \right|. \end{aligned}$$

O conjunto  $K = \{(s, \mathbf{y}(s; t_0, \mathbf{y}_0)) : \min\{t_0, t\} \leq s \leq \max\{t_0, t\}\} \subset D$  é compacto porque é a imagem do intervalo compacto  $[\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}]$  pela função contínua  $s \mapsto (s, \mathbf{y}(s; t_0, \mathbf{y}_0))$ . Como  $D$  é aberto, existe  $\epsilon > 0$  tal que o conjunto compacto  $K_\epsilon$  dos pontos de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) a distância de  $K$  menor ou igual a  $\epsilon$  está contido em  $D$  (Figura 2.9). Devido ao Teorema de Weierstrass, a função contínua  $\|\mathbf{f}\|$  assume um valor máximo  $M$  em  $K_\epsilon$ . Por outro lado,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  é lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $K_\epsilon$ , com

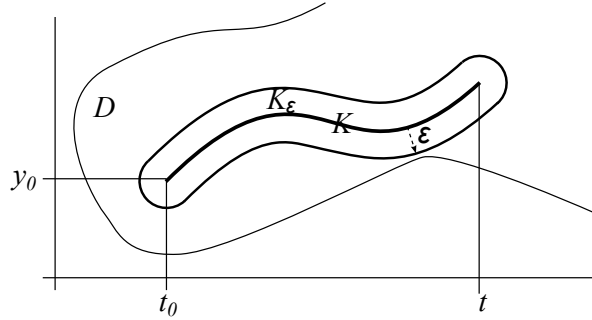


Figura 2.9: Conjunto compacto em torno de um segmento de trajetória

uma constante de Lipschitz que designamos por  $L$ . Portanto, se  $|h|$ ,  $\|\mathbf{z}\|$  são suficientemente pequenos e  $(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})) \in K_\epsilon$  para  $\tau \in J = [\min\{t_0, t_0 + h, t\}, \max\{t_0, t_0 + h, t\}]$ , então

$$v(s) \leq \|\mathbf{z}\| + M|h| + L \left| \int_{t_0+h}^s v(\tau) d\tau \right| .$$

Esta desigualdade pode ser explicitada para  $v(s)$  por aplicação de um resultado geral muito útil conhecido por **desigualdade de Gronwall**<sup>9</sup> que se prova a seguir à presente demonstração, dando

$$v(s) \leq (\|\mathbf{z}\| + M|h|) e^{L|s-t_0-h|} .$$

Tomando  $|h|$ ,  $\|\mathbf{z}\|$  suficientemente pequenos consegue-se  $v(s) \leq \epsilon$  para todo  $s \in J$ , o que garante  $(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})) \in K_\epsilon$  para  $\tau \in J$ , como tinha sido suposto acima. Em particular, para  $|h|$ ,  $\|\mathbf{z}\|$  suficientemente pequenos a solução  $t \mapsto \mathbf{y}(t; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})$  não explode nem atinge  $\partial D$  para  $t \in J$ , pelo que o intervalo máximo de definição de cada uma destas soluções contém  $J$ . Ficou provada a continuidade de  $(t_0, \mathbf{y}_0) \mapsto \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  para cada  $t \in J$  fixo.

A existência de solução local com valor inicial  $\mathbf{y}(t; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})$  no instante  $t$  implica que  $\mathbf{y}(t + s; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})$  está definida para  $|s|$  suficientemente pequeno, pelo que  $(t + s; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}) \in E$  para  $|s|$ ,  $|h|$ ,  $\|\mathbf{z}\|$  suficientemente pequenos. Portanto, o domínio de definição das soluções é um conjunto aberto. Além disso,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{y}(t + s; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| \\ & \leq \|\mathbf{y}(t + s; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}) - \mathbf{y}(t; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})\| \\ & \quad + \|\mathbf{y}(t; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| . \end{aligned}$$

O primeiro termo no lado direito pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando  $|s|$  suficientemente pequeno, pois a solução  $t \mapsto \mathbf{y}(t; t_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z})$  é  $C^1$ , e portanto contínua. Ficou estabelecido acima que o segundo termo pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando  $|h|$ ,  $\|\mathbf{z}\|$  suficientemente pequenos. Concluiu-se que  $\mathbf{Y} : (t, t_0, \mathbf{y}_0) \mapsto \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  é contínua em  $E$ . *Q.E.D.*

<sup>9</sup>Grönwall, Hakon (1877-1932). Quando imigrou para os EUA em 1904 adoptou o nome T.H. Gronwall.

(2.13) **Lema (Desigualdade de Gronwall):** Se  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo,  $C \geq 0$ ,  $L > 0$  e  $u: J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é uma função contínua não negativa tal que

$$u(t) \leq C + L \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|, \quad \text{para } t \in J,$$

então

$$u(t) \leq C e^{L|t-t_0|}, \quad \text{para } t \in J.$$

*Dem.* Considera-se primeiro  $t \geq t_0$ . Com  $v(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds$ , resulta do Teorema Fundamental do Cálculo que  $\dot{v}(t) = u(t) \leq C + Lv(t)$ . Ou seja, obtém-se a inequação diferencial  $\dot{v} \leq C + Lv$  que só difere da equação diferencial linear  $\dot{v} = C + Lv$  pela igualdade ser uma desigualdade. Considerando o factor de integração usado para esta equação linear, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{-L(t-t_0)} v(t) \right] = e^{-L(t-t_0)} [\dot{v}(t) - Lv(t)] \leq C e^{-L(t-t_0)}.$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$ , obtém-se

$$e^{-L(t-t_0)} v(t) - v(t_0) \leq \frac{C}{L} \left[ 1 - e^{-L(t-t_0)} \right].$$

Como  $v(t_0) = 0$ , é  $v(t) \leq (C/L) [e^{L(t-t_0)} - 1]$ . Logo

$$u(t) \leq C + Lv(t) \leq C e^{L(t-t_0)} = C e^{L|t-t_0|}, \quad \text{para } t \in J, \text{ com } t \geq t_0.$$

Para  $t < t_0$  considera-se uma mudança de variável que transforma  $t < t_0$  em  $\tau > t_0$  à mesma distância de  $t_0$ ,  $\tau = 2t_0 - t$  e  $w(\tau) = u(2t_0 - \tau)$ , para obter  $w(\tau) \leq C e^{L|\tau-t_0|}$  e, portanto,  $u(t) \leq C e^{L|t-t_0|}$ . Q.E.D.

O teorema seguinte estabelece um resultado de dependência contínua na função que define a equação diferencial, nomeadamente quando esta é aproximada uniformemente por outras funções. Diz-se que uma sucessão  $\{\mathbf{f}_j\}$  de funções definidas num conjunto  $S \subset \mathbb{R}^k$  (ou  $S \subset \mathbb{C}^k$ ) e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) **converge uniformemente em subconjuntos compactos** de  $S$  para uma função  $\mathbf{f}$  também definida em  $S$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ), e escreve-se  $\mathbf{f}_j \rightarrow \mathbf{f}$  **uniformemente em subconjuntos compactos** de  $S$ , se quaisquer que sejam o conjunto compacto  $K \subset S$  e  $\delta > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\mathbf{f}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| < \delta$  para todos  $j > N$  e  $\mathbf{x} \in K$ .

(2.14) **Teorema:** Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ou  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , funções definidas e contínuas em  $D$  com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) tais que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  e  $\mathbf{f}_j(t, \mathbf{y})$  são localmente lipschitzianas em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D$ , respectivamente  $E$  e  $E_j$  os domínios de definição das soluções destas equações, e  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Y}_j$  as funções definidas nestes conjuntos que dão os valores das soluções em cada instante correspondentes a cada condição inicial. Se  $\mathbf{f}_j \rightarrow \mathbf{f}$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $D$ , então  $\mathbf{Y}_j \rightarrow \mathbf{Y}$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $E$ .

*Dem.* A demonstração é semelhante à do Teorema (2.12), considerando termos adicionais com acréscimos respeitantes à aproximação de  $\mathbf{f}$  por  $\mathbf{f}_j$ , pelo que se omitem alguns detalhes que podem ser preenchidos com base nessa demonstração. Assim, para  $|h|, |z|$  suficientemente pequenos, toma-se  $v(s) = \|\mathbf{Y}_j(s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{Y}(s, t_0, \mathbf{y}_0)\|$  e desenvolve-se

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_j(s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{Y}(s, t_0, \mathbf{y}_0) \\ &= (\mathbf{y}_0+\mathbf{z}) + \int_{t_0+h}^s \mathbf{f}_j(\tau, \mathbf{Y}_j(\tau, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) d\tau \\ & \quad - \mathbf{y}_0 - \int_{t_0}^s \mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}(\tau, t_0, \mathbf{y}_0)) d\tau \\ &= \mathbf{z} + \int_{t_0+h}^s [\mathbf{f}_j(\tau, \mathbf{Y}_j(\tau, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}(\tau, t_0, \mathbf{y}_0))] d\tau \\ & \quad - \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}(\tau, t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0)) d\tau, \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} v(s) \leq & \|\mathbf{z}\| + \left| \int_{t_0+h}^s \|\mathbf{f}_j(\tau, \mathbf{Y}_j(\tau, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}_j(\tau, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}))\| d\tau \right| \\ & + \left| \int_{t_0+h}^s \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}_j(\tau, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}(\tau, t_0, \mathbf{y}_0))\| d\tau \right| \\ & + \left| \int_{t_0}^{t_0+h} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}(\tau, t_0, \mathbf{y}_0))\| d\tau \right|. \end{aligned}$$

Analogamente à prova do teorema (2.12) e tendo em conta que  $\mathbf{f}_j \rightarrow \mathbf{f}$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $D$ , qualquer que seja  $\delta > 0$ , para  $j$  suficientemente grande obtém-se

$$v(s) \leq \|\mathbf{z}\| + |s - (t_0+h)| \delta + L \left| \int_{t_0+h}^s v(\tau) d\tau \right| + M|h|.$$

Neste caso a desigualdade de Gronwall dá

$$v(s) \leq (\|\mathbf{z}\| + |s - (t_0+h)| \delta + M|h|) e^{L|s-t_0-h|}.$$

Prossegue-se de forma semelhante à da prova desse teorema. *Q.E.D.*

No caso em que a função que define a equação diferencial depende continuamente de um número finito de parâmetros reais (ou complexos), o resultado de dependência contínua em relação a parâmetros assume a forma seguinte.

(2.15) **Corolário:** *Seja  $D^* \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  (ou  $D^* \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ ) um conjunto aberto,  $\mathbf{f}$  uma função definida e contínua em  $D^*$  com valores em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) e  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \lambda)$  localmente lipschitziana em relação a  $\mathbf{y}$  em  $D^*$ , e  $E^* = \{(t, t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0) : (t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0) \in D^*, t \in ]a(t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0), b(t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0)[\}$ , onde o intervalo é o intervalo máximo de definição da solução de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \lambda_0)$  com condição inicial  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ . Então  $E^*$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  (ou  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ ) e a função  $(t, t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0) \mapsto \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0)$  é contínua em  $E^*$ .*

*Dem.* Qualquer que seja a sucessão  $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}^m$  (ou  $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}^m$ ) tal que  $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$ , definindo  $\mathbf{f}_j(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \lambda_j)$  verifica-se para  $j$  suficientemente grande que  $\mathbf{f}_j \rightarrow \mathbf{f}_0$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $D = \{(t, \mathbf{y}) : (t, \mathbf{y}, \lambda_0) \in D^*\}$ . O teorema anterior garante que  $\mathbf{Y}_j \rightarrow \mathbf{Y}_0$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $D$ , onde a notação é a introduzida nesse teorema. Qualquer que seja  $\lambda > 0$ , para  $j$  suficientemente grande é

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{Y}_j(t+s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{Y}_0(t+s, t_0, \mathbf{y}_0)\| \\ & \leq \|(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_0)(t+s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z})\| \\ & \quad + \|\mathbf{Y}_0(t+s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{Y}_0(t+s, t_0, \mathbf{y}_0)\| \\ & \leq \lambda + \|\mathbf{Y}_0(t+s, t_0+h, \mathbf{y}_0+\mathbf{z}) - \mathbf{Y}_0(t+s, t_0, \mathbf{y}_0)\|. \end{aligned}$$

Como  $\lambda > 0$  é arbitrário e  $\mathbf{Y}_0$  é contínua, tem-se o resultado. *Q.E.D.*

Dada a importância das propriedades de existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação aos dados (instante e valor iniciais, parâmetros, e instantes de tempo onde as soluções estão definidas) para que equações diferenciais possam ser modelos úteis em ciências experimentais e, também, para o próprio estudo matemático das soluções, J. Hadamard<sup>10</sup> introduziu a noção de **problema bem posto** para referir exactamente um problema que satisfaz as propriedades indicadas.

Convém observar que, apesar da dependência contínua das soluções nas condições iniciais, as soluções podem ter grande sensibilidade a pequenas variações de condições iniciais, como é ilustrado no exemplo seguinte.

(2.16) **Exemplo (Equações de Lorenz<sup>11</sup>):** O sistema de três equações diferenciais escalares

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) \\ \dot{y} &= bx-y-xz, \\ \dot{z} &= xy-cz, \end{aligned}$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  são constantes foi considerado pelo investigador em meteorologia E. Lorenz em 1963, como modelo do movimento de ar na atmosfera

<sup>10</sup>Hadamard, Jacques (1865-1963).

<sup>11</sup>Edward Lorenz (1917-).

com o objectivo de analisar a possibilidade de previsão meteorológica por resolução computacional de equações que descrevem o movimento de fluidos.

O sistema pode ser escrito na forma  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , com  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbf{f}(x, y, z) = (a(y-x), bx-y-xz, xy-cz)$ . A função  $\mathbf{f}$  é  $C^1$  e portanto localmente lipschitziana em  $\mathbb{R}^3$ . O Teorema de Picard-Lindelöf garante que cada problema de valor inicial  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$  para esta equação diferencial tem solução única e o último teorema anterior garante que a solução depende continuamente da condição inicial  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  e dos parâmetros da equação  $a, b, c$ .

É fácil calcular as soluções constantes igualando a zero a derivada da solução,  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , o que dá as condições  $y = x$ ,  $(b-1-z)x = 0$  e  $cz = x^2$ . Se  $a \neq 0$ , estas condições são satisfeitas se e só se  $(z = y = x = 0)$  e  $(z = b-1, y = x = \pm\sqrt{c(b-1)})$ . Portanto, se  $a, c, (b-1) \neq 0$  o sistema tem três soluções constantes, designadamente  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (\sqrt{c(b-1)}, \sqrt{c(b-1)}, b-1)$  e  $B = (-\sqrt{c(b-1)}, -\sqrt{c(b-1)}, b-1)$ .

Resolvendo o sistema numericamente em computador Lorenz observou que para certos valores das constantes  $a, b, c$  as soluções tinham mudanças drásticas ao longo do tempo e grandes variações para pequenas variações de condições iniciais. As soluções deste sistema têm um comportamento complexo que veio a receber o nome de **caótico** por ser experimentalmente indistinguível de um comportamento aleatório apesar do sistema ser determinístico, tendo soluções únicas para cada problema de valor inicial e dependência contínua das soluções nas condições iniciais (ver Figura 2.10).

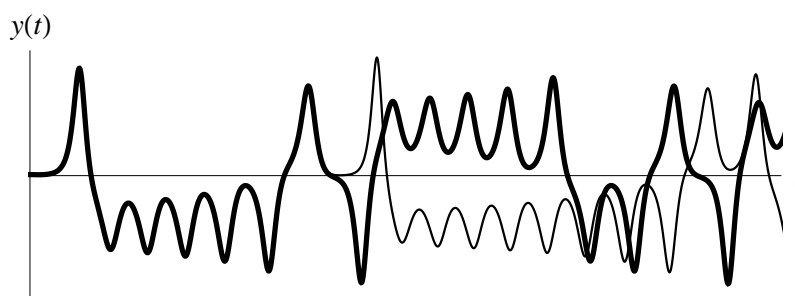


Figura 2.10: Primeira componente de duas soluções  $(x(t), y(t), z(t))$  da equação de Lorenz (com  $a = 3$ ,  $b = 26,5$  e  $c = 1$ ) de  $t = 0$  a  $t = 25$ , com condições iniciais  $(x(0), y(0), z(0)) = ((0, 1), (0, 1), 30)$  e  $(x(0), y(0), z(0)) = ((0, 1), (0, 1), (29, 9))$ . Em pouco mais do terço inicial do intervalo considerado as duas soluções consideradas são indistinguíveis neste gráfico devido à proximidade das condições iniciais, mas depois são muito diferentes

A Figura 2.11 mostra à esquerda uma parte inicial da curva descrita pela solução da equação de Lorenz cuja componente  $x$  é representada a grosso na Figura 2.10, mostrando que começa por dar quase uma volta em torno do ponto  $A$  correspondente a uma das soluções constantes para depois dar

quase cinco voltas em torno do ponto  $B$  correspondente a outra solução constante, seguindo-se quase uma volta em torno de  $A$  e depois também quase uma volta em torno de  $B$ , para seguidamente voltar a dar voltas em torno de  $A$  (comparar com o gráfico na figura 2.10).

A Figura 2.11 à direita mostra a grande sensibilidade das soluções em relação às condições iniciais pela localização dos conjuntos dos valores das soluções nos instantes em dois instantes  $t_1$  e  $t_2$ , a partir de valores iniciais no instante  $t_0 = 0$  considerados no segmento de recta vertical indicado a meio da figura. Note-se que há valores das soluções que num instante estão muito afastados, se aproximam mais tarde, e depois se voltam a afastar, e vive-versa, levando o segmento de recta inicial a deformar-se de uma forma intrincada, dando imagens sucessivas que se enovelam em si próprias.

Apesar do sistema ser determinístico, a previsão dos valores da solução a partir de uma condição inicial conhecida torna-se experimentalmente impraticável, pois pequenas modificações das condições iniciais conduzem, mais tarde, a grandes variações nos valores das soluções, embora estas sejam continuamente dependentes das condições iniciais.

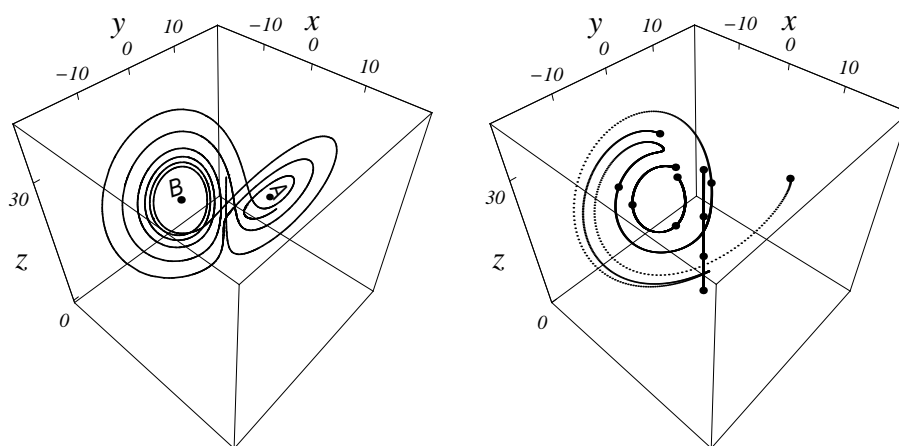


Figura 2.11: À esquerda: curva descrita pela solução da equação de Lorenz (com parâmetros  $a = 3$ ,  $b = 26,5$  e  $c = 1$ ) de  $t = 0$  a  $t = 13$ , com condição inicial  $(x(0), y(0), z(0)) = ((0, 1), (0, 1), 30)$ . À direita: segmento de recta vertical e imagens de 2000 pontos igualmente espaçados nesse segmento em  $t = 0$ , pelas equações de Lorenz nos instantes  $t = 3$  (curva no meio quase fechada) e  $t = 8$  (curva intrincada de fora)

## 2.5 Notas históricas

O teorema de existência e unicidade de Picard-Lindelöf tem raízes no trabalho de A.L. Cauchy por volta de 1820 e R. Lipschitz em 1876. A demonstra-

ção com base em aproximações sucessivas no caso geral deve-se a contribuições de E. Picard em 1890 e E.L. Lindelöf em 1894, embora o método tivesse sido considerado em 1838 por J. Liouville para equações diferenciais lineares de 2ª ordem e estendido a equações lineares de ordem  $n$  sucessivamente por L. Fuchs<sup>12</sup> em 1870 e G. Peano em 1888.

Em 1842 Cauchy provou a existência e unicidade para equações diferenciais definidas por funções analíticas.

A prova de existência de soluções de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem quando a função que define a equação é contínua (Teorema de Peano) deve-se a G. Peano, para equações escalares em 1886 e para equações vectoriais em 1890, embora tenha raízes no trabalho de Cauchy em 1820 e de Lipschitz em 1876.

O método de comparação de soluções de equações diferenciais escalares que satisfazem desigualdades ocorre no trabalho de Peano (1885-1886), P. Montel<sup>13</sup>, E. Bompiani<sup>14</sup>, L. Tonelli<sup>15</sup>, Perron<sup>16</sup> (1915) e Kamke<sup>17</sup> (1930).

A Desigualdade de Gronwall tem raízes no trabalho de G. Peano em 1885-86 e foi formulada e demonstrada num caso particular por H. Gronwall em 1919. Esta desigualdade desempenha um papel importante noutras situações, das quais apenas referimos aqui a limitação de soluções e a sua utilização em prolongamentos a intervalos máximos, e o estudo de problemas não lineares como perturbações de problemas lineares.

A dependência analítica de soluções em parâmetros foi estabelecida por H. Poincaré em 1890. A diferenciabilidade de soluções em relação a dados iniciais deve-se a I. Bendixson<sup>18</sup> em 1896 para equações escalares e a G. Peano em 1897 para sistemas de equações diferenciais. Em 1919 T. Gronwall simplificou significativamente a prova do resultado com a utilização da desigualdade com o seu nome que desenvolveu para o efeito. A dependência contínua de soluções nas condições iniciais e em parâmetros foi estabelecida por E. Kamke em 1930.

A noção de **problema bem posto** foi introduzida por J. Hadamard no final do século XIX. O estudo de condições em que problemas para equações diferenciais estão bem postos tem constituído um tema importante de investigação. Ainda hoje há importante trabalho a desenvolver-se neste âmbito, naturalmente para situações mais difíceis como as de certas equações diferenciais parciais não lineares consideradas a propósito de problemas das mais diversas áreas de aplicação em Física, Química, Biologia, Ciência de Materiais, Engenharia. As difíceis questões que se levantaram neste tipo de

---

<sup>12</sup>Fuchs, Lazarus (1833-1902).

<sup>13</sup>Montel, Paul Antoine (1876-1875).

<sup>14</sup>Bompiani, Enrico (1889-1975).

<sup>15</sup>Tonelli, Leonida (1885-1946).

<sup>16</sup>Perron, Oskar (1880-1975).

<sup>17</sup>Kamke, Erich (1890-1961).

<sup>18</sup>Bendixson, Ivar Otto (1861-1935).



estudos estiveram, mesmo, na raiz do aparecimento da importante área da matemática designada por Análise Funcional e constituem, ainda hoje, uma das motivações para o desenvolvimento desta área.

O estudo do comportamento caótico de soluções de equações diferenciais, no sentido do exemplo (2.16) onde se considerou a equação de Lorenz, é um tópico de grande actualidade em que se têm verificado grandes progressos recentes. Foram as próprias observações de E. Lorenz em 1963 que despertaram um grande interesse no estudo de sistemas caóticos, embora H. Poincaré tenha notado a possibilidade deste tipo de comportamento em 1890, a propósito do movimento dos três corpos em mecânica celeste, assim como J. Hadamard em 1896, a propósito do movimento em geodésicas de superfícies de curvatura negativa, e tivesse havido trabalho em dinâmica caótica definida pela iteração (determinística) de funções num intervalo real ou no plano complexo, com destaque para os trabalhos pioneiros de P.J.L. Fatou<sup>19</sup> em 1917 G.M. Julia<sup>20</sup> em 1919. Em 1994 J.C. Yoccoz<sup>21</sup> recebeu a Medalha Fields<sup>22</sup> por contribuições neste domínio, assim como E. Lindenstrauss<sup>23</sup> e S. Smirnov<sup>24</sup>, ambos em 2010. Outros medalhados Fields contribuíram significativamente para o estudo de sistemas caóticos, entre eles R. Thom, J. Milnor, S. Smale, C. McMullen<sup>25</sup>.

---

<sup>19</sup>Fatou, Pierre Joseph Louis (1878-1929).

<sup>20</sup>Julia, Gaston Maurice (1893-1978).

<sup>21</sup>Yoccoz, Jean-Christophe (1957-).

<sup>22</sup>John Charles Fields (1863-1932) instituiu em 1936 as Medalhas Fields, consideradas uma espécie de “Prémio Nobel” da matemática. Estas medalhas são tradicionalmente atribuídas a matemáticos com menos de 40 anos no Congresso Internacional de Matemática que reúne de quatro em quatro anos, embora com uma interrupção de 1936 a 1950 devida à II Guerra Mundial.

<sup>23</sup>Lindenstrauss, Elon (1970-).

<sup>24</sup>Smirnov, Stanislav (1970-).

<sup>25</sup>René Thom (1923-2002), John Milnor (1931-), Stephan Smale (1930-), Curtis McMullen (1958-) receberam a Medalha Fields em, respectivamente, 1958, 1962, 1966, 1998.