

Capítulo 1

Equações diferenciais ordinárias escalares de 1^a ordem

1.1 Introdução

Consideram-se neste capítulo equações do tipo $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, onde t e os valores de y e f são números reais, que se costumam abreviar na forma

$$\dot{y} = f(t, y) .$$

A resolução de uma equação diferencial deste tipo envolve obter uma função a partir de informação sobre a sua derivada.

Por integração imediata conseguem-se resolver equações em que $f(t, y)$ é independente de y e contínua, ou seja,

$$\dot{y} = g(t) ,$$

com g contínua. Na verdade, neste caso obtém-se para **solução geral** da equação diferencial

$$y(t) = \int g(t)dt + C ,$$

onde C é uma constante arbitrária e $\int g(t)dt$ designa uma primitiva arbitrária de g .

Quando $f(t, y)$ não é independente de y a situação é mais complicada. Convém, então, considerar casos particulares. Começa-se com equações lineares.

1.2 Equações lineares de 1^a ordem

Consideram-se equações do tipo

$$\dot{y} + a(t)y = b(t) ,$$

onde a e b são funções com valores reais definidas e contínuas num intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Estas são as chamadas **equações diferenciais lineares de primeira ordem** porque são casos particulares de equações lineares gerais da forma $T(y) = b$, onde¹ $T: C^1(J) \rightarrow C^0(J)$ é uma transformação linear com $T(y) = \dot{y} + a(t)y$. Por exemplo, $\dot{y} + (\sin t)y = \cos t$ é uma equação linear e $\dot{y} + \sin y = 0$ não é linear.

Como sempre para equações lineares, a solução geral da equação diferencial considerada pode ser obtida somando a uma solução particular a solução geral da **equação homogénea** associada

$$\boxed{\dot{y} + a(t)y = 0} .$$

Na vizinhança de pontos $t_0 \in J$ onde $y(t_0) \neq 0$ verifica-se $\dot{y}/y = -a(t)$ e, portanto, $d/\ln|y| = -a(t)$, pelo que $\ln|y(t)| = -\int a(t)dt + C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, e portanto

$$y(t) = Ke^{-\int a(t)dt} ,$$

onde $K \neq 0$ é uma constante arbitrária. Esta é a solução geral da equação num intervalo onde $y(t) \neq 0$. Conclui-se que se y é diferente de zero num ponto $t_0 \in J$, então $K \neq 0$ e a fórmula define uma função diferente de zero e de classe C^1 em J . Por outro lado, a função identicamente nula é solução da equação homogénea inicial, pelo que a única solução que se anula num ponto de J anula-se em todos. Ambos os casos ficam abrangidos na fórmula acima obtida considerando K uma constante arbitrária em \mathbb{R} . Note-se que neste caso o **intervalo máximo de definição** de cada solução é o intervalo de definição e continuidade da função a e que a equação tem infinitas soluções, uma para cada valor de $K \in \mathbb{R}$.

Em aplicações, muitas vezes não interessa obter todas as soluções, mas sim uma solução específica que tenha um certo valor y_0 num **instante** $t = t_0$. Tem-se, então, um **problema de valor inicial**

$$\dot{y} + a(t)y = 0 , \quad y(t_0) = y_0 .$$

Dividindo por y e integrando de t_0 a t no caso $y_0 \neq 0$, e tendo em conta que para $y_0 = 0$ a solução é a função identicamente nula, obtém-se uma única solução para este problema de valor inicial

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} .$$

¹Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, adopta-se a notação usual $C^k(S; \mathbb{R}^m)$ para o conjunto das funções definidas ou extensíveis a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n que contém S cujas derivadas até à ordem k são contínuas em S . Abrevia-se $C^k(S) = C^k(S; \mathbb{R})$. Estas notações com $k = \infty$ designam os correspondentes conjuntos de funções indefinidamente diferenciáveis em S , e com $k = 0$ designam os correspondentes conjuntos de funções contínuas em S .

(1.1) Exemplos:

1. Como foi referido na introdução, a desintegração de um isótopo radioactivo é descrita pela equação diferencial $\dot{y} = -ky$, onde $k > 0$ e $y(t)$ é a quantidade de isótopo no instante t . O problema de valor inicial com $y(t_0) = y_0$ tem solução $y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)}$ (Figura 1.1).

Em decaimento radioactivo usa-se frequentemente a **vida média** do isótopo, definida como o tempo T que leva a quantidade de isótopo a passar a metade. Portanto, tem de ser $y_0/2 = y_0 e^{-kT}$, ou seja $T = (\ln 2)/k$. A vida média é independente da quantidade de isótopo no instante inicial e do valor desse instante e, portanto, é característica do próprio isótopo. Na verdade, se a quantidade de isótopo num instante t_2 é metade da quantidade no instante t_1 , é $y(t_2) = y(t_1)/2$, ou seja $y_0 e^{-k(t_2-t_0)} = y_0 e^{-k(t_1-t_0)}/2$, pelo que $e^{-k(t_2-t_1)} = 1/2$ e $t_2 - t_1 = (\ln 2)/k = T$. Assim, a constante de decaimento do isótopo k pode ser dada através da sua vida média, o que é a prática usual para isótopos radioactivos.

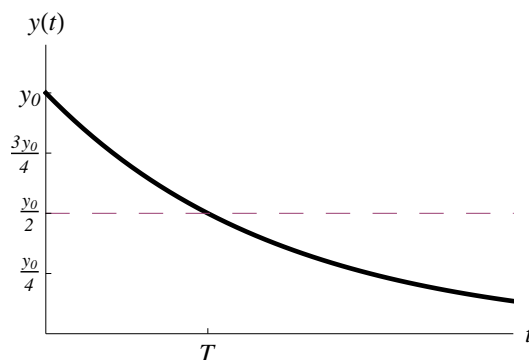


Figura 1.1: Decaimento radioactivo descrito pela equação diferencial $\dot{y} = -ky$

2. O problema de valor inicial $\dot{y} + (\cos t)y = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$, tem solução $y(t) = \sqrt{2} \exp\left(-\int_0^t \cos s \, ds\right) = \sqrt{2} e^{-\sin t}$ (Figura 1.2).
3. O problema de valor inicial $\dot{y} + e^{t^2}y = 0$, $y(1) = 1$ tem solução $y(t) = \exp\left(-\int_1^t e^{s^2} \, ds\right)$ (Figura 1.2).

No último exemplo a fórmula para $y(t)$ envolve um integral que não pode ser calculado em termos de funções elementares. No entanto, considera-se o problema resolvido porque se dispõe de uma fórmula para cálculo dos valores da função solução que não envolve derivadas desta função. Na verdade, esses valores podem ser calculados a partir da fórmula obtida, com a precisão

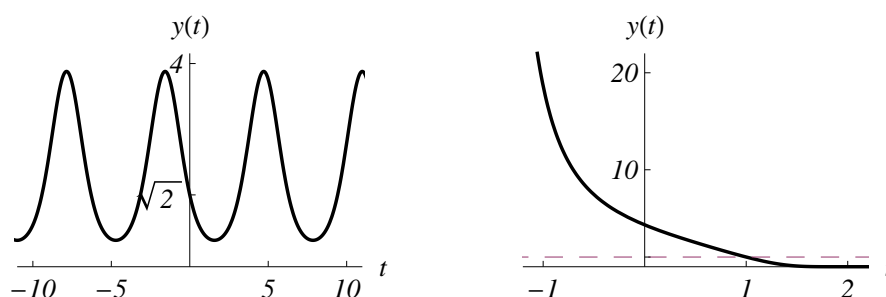


Figura 1.2: Soluções de $\dot{y} + (\cos t)y = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$,
e de $\dot{y} + e^{t^2}y = 0$, $y(1) = 1$

que for desejada, recorrendo a computadores, calculadoras ou tabelas matemáticas. Note-se que neste aspecto a situação é semelhante à do primeiro exemplo, pois também nesse caso, apesar de se dispor de uma fórmula explícita para a solução em termos de funções elementares, para obter valores da solução há que recorrer aos mesmos processos computacionais. Portanto, seria inconveniente considerar o problema do primeiro exemplo resolvido e o do segundo não, só porque a solução não é dada em termos de funções muito particulares, como polinomiais, exponenciais, logaritmos ou funções trigonométricas.

Para obter a solução geral da **equação não homogénea**

$$\dot{y} + a(t)y = b(t)$$

há ainda que obter uma sua solução particular. Como se viu, as equações que podem ser resolvidas por integração imediata são da forma $\dot{y} = g(t)$. Interessa ver como se pode obter uma equação deste tipo equivalente à equação inicialmente considerada. A expressão $\dot{y} + a(t)y$ faz lembrar o resultado da derivação de um produto, pois $d/dt[\gamma y] = \gamma \dot{y} + \dot{\gamma}y$. Logo, multiplicando ambos os membros da equação considerada por uma função μ diferente de zero em todos os pontos obtém-se a equação diferencial equivalente

$$\mu(t)\dot{y} + a(t)\mu(t)y = \mu(t)b(t).$$

Se a função μ satisfaz $a(t)\mu(t) = \dot{\mu}(t)$, obtém-se $d/dt[\mu y] = \mu b$. Primitivando ambos os lados desta equação, obtém-se $\mu(t)y(t) = C + \int \mu(t)b(t) dt$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e μ é uma solução qualquer da equação $\dot{\mu} = a(t)\mu$, por exemplo $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$. Assim, a solução geral da equação não homogénea considerada é

$$y(t) = \frac{C}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t) dt, \quad \text{com } \mu(t) = e^{\int a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A solução do problema de valor inicial

$$\dot{y} + a(t)y = b(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

pode ser obtida integrando a equação $d/dt[\mu y] = \mu b$ no intervalo $[t_0, t]$. Obtém-se

$$y(t) = \frac{\mu(t_0)}{\mu(t)} y_0 + \int_{t_0}^t \frac{\mu(s)}{\mu(t)} b(s) ds, \quad \text{com } \mu(t) = e^{\int a(t) dt}.$$

A função μ é um factor multiplicativo que permite transformar a equação dada numa equação que pode ser directamente integrada e, por isso, recebe o nome de **factor de integração**.

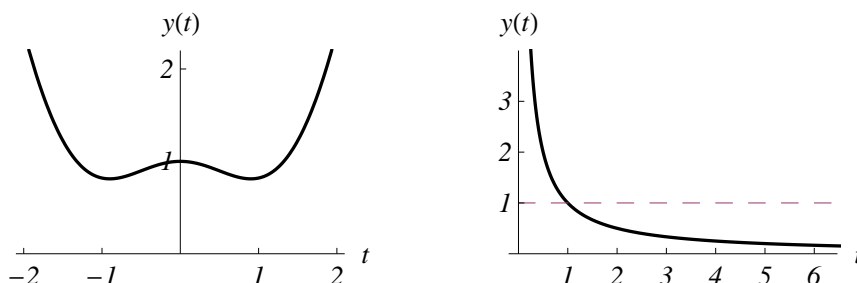


Figura 1.3: Soluções de $\dot{y} + ty = t^3$, $y(0) = 1$, e de $\dot{y} + y/t = 0$, $y(1) = 1$

(1.2) Exemplos:

1. Para o problema de valor inicial $\dot{y} + ty = t^3$, $y(0) = 1$, obtém-se o factor de integração $\mu(t) = e^{\int t dt} = e^{t^2/2}$. Multiplicando a equação dada por $\mu(t)$ obtém-se a equação equivalente $d/dt[\mu(t)y(t)] = t^3 e^{t^2/2}$, pelo que

$$\begin{aligned} \mu(t)y(t) &= \mu(0)y(0) + \int_0^t s^3 e^{s^2/2} ds \\ &= 1 + \left[s^2 e^{s^2/2} \right]_0^t - \int_0^t 2s e^{s^2/2} ds = t^2 e^{t^2/2} - 2e^{t^2/2} + 3. \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação diferencial dada é (Figura 1.3)

$$y(t) = t^2 - 2 + 3e^{-t^2/2}.$$

2. Considera-se agora o problema de valor inicial $\dot{y} + y/t = 0$, $y(1) = 1$. Note-se que a função $a(t) = 1/t$ não está definida em $t = 0$. Assim, a solução da equação com valor inicial $y(1) = 1$ só pode estar definida em $]0, +\infty[$. Obtém-se para solução $y(t) = e^{-\int_1^t (1/s) ds} = e^{-\ln t} = 1/t$ (Figura 1.3).

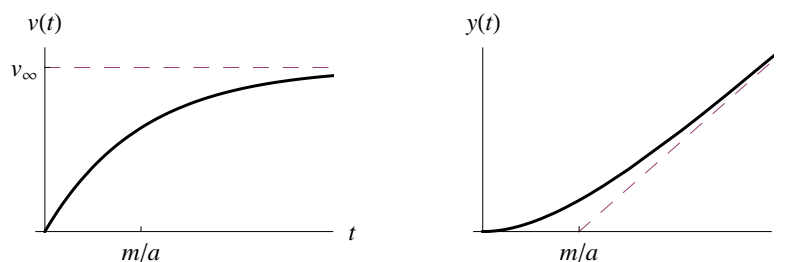


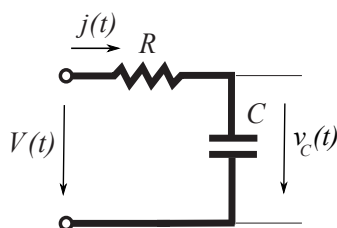
Figura 1.4: Queda de corpo sob a acção da gravidade com atrito proporcional à velocidade

3. Considera-se o movimento de um corpo de massa m com velocidade inicial nula sob a acção da gravidade em condições em que esta se pode considerar constante com aceleração g e o atrito corresponde a uma força que retarda o movimento proporcionalmente à velocidade. O movimento dá-se sobre uma recta vertical. Designa-se por $y(t)$ distância percorrida pelo corpo desde o instante inicial $t=0$ até ao instante t . O corpo está sujeito a uma força que é a soma da força da gravidade F_g e da força devida ao atrito F_a . A força de atrito é $F_a = -av$, onde $a > 0$ é o coeficiente de atrito. Da lei de Newton, "força=massa×aceleração" obtém-se $F_g = mg$ e a equação diferencial $m \dot{v} = mg - av$ para a velocidade do corpo $v = \dot{y}$.

Esta equação diferencial é uma equação linear de 1ª ordem de coeficientes constantes não homogénea. A solução geral da equação homogénea correspondente $\dot{v} = -(a/m)v$ é $v(t) = k e^{-at/m}$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Uma solução particular da equação não homogénea é a função constante $v_p(t) = mg/a$. Portanto, a solução geral da equação não homogénea dada é $v(t) = k e^{-at/m} + mg/a$. Como a condição inicial é $v(0) = 0$, obtém-se $k = -mg/a$ e o movimento do corpo ocorre com velocidade $v(t) = (mg/a) (1 - e^{-at/m})$. Quando $t \rightarrow +\infty$ a velocidade do corpo converge para uma velocidade limite $v_\infty = mg/a$ (ver Figura 1.4).

A posição do corpo pode ser obtida simplesmente integrando a equação que dá $\dot{y} = v$, obtendo-se $y(t) = (mg/a) (t + (m/a)(e^{-at/m} - 1))$. Quando $t \rightarrow +\infty$ a posição tende a aumentar proporcionalmente ao tempo, mais precisamente $\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - (mg/a)(t - (m/a))] = 0$, ou seja o movimento tende para ser uniforme com a velocidade limite v_∞ .

4. Considera-se um circuito eléctrico RC com uma resistência $R > 0$ e um condensador de capacidade $C > 0$ em série (Figura 1.5). A diferença de potencial eléctrico nos terminais do circuito no instante t é igual à soma da diferença de potencial eléctrico nos terminais da resistência e

Figura 1.5: Circuito eléctrico RC

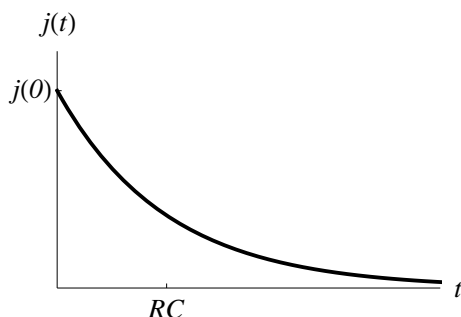
nos terminais do condensador $v(t) = v_R(t) + v_C(t)$. A corrente $j(t)$ na resistência no instante t está relacionada com a diferença de potencial nos terminais da resistência pela Lei de Ohm $v_R = Rj$. A diferença de potencial v_C nos terminais de um condensador de capacidade C está relacionada com a carga eléctrica q_C armazenada numa placa do condensador por $v_C = q_C/C$. A corrente eléctrica j é a velocidade da carga eléctrica, pelo que $q'_C = j$. Como o circuito é em série, a corrente eléctrica através da resistência e do condensador é a mesma. Portanto a derivada da diferença de potencial nos terminais do circuito RC é $v' = v'_R + v'_C = Rj' + j/C$. Logo, uma vez conhecida uma função v que dá a diferença de potencial nos terminais do circuito RC em função do tempo, a corrente j no circuito é solução da equação diferencial

$$j' + \frac{1}{RC} j = \frac{v'(t)}{R}.$$

O factor de integração é $\mu(t) = \exp \int 1/(RC) dt = e^{t/(RC)}$, pelo que a solução geral desta equação linear homogénea de 1ª ordem é

$$j(t) = k e^{-t/(RC)} + \frac{1}{R} e^{-t/(RC)} \int e^{t/(RC)} v'(t) dt,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Figura 1.6: Corrente eléctrica num circuito RC com os terminais em contacto

No caso da diferença de potencial nos terminais do circuito ser nula (isto é, quando os terminais estão em contacto), a equação é homogénea e a solução geral é $j(t) = k e^{-t/(RC)}$, o que corresponde à carga eléctrica armazenada no condensador descarregar exponencialmente para zero como no exemplo anterior de decaimento radioactivo (Figura 1.6).

No caso da diferença de potencial aplicada nos terminais do circuito ser sinusoidal $v(t) = V_0 \sin \omega t$, com $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, para calcular a solução geral da equação é necessário calcular a primitiva seguinte, o que fazemos por partes

$$\begin{aligned} \int e^{t/(RC)} v'(t) dt &= e^{t/(RC)} v(t) - \frac{V_0}{RC} \int e^{t/(RC)} \sin \omega t dt \\ &= e^{t/(RC)} v(t) + \frac{V_0}{\omega RC} e^{t/(RC)} \cos \omega t - \frac{V_0}{\omega (RC)^2} \int e^{t/(RC)} \cos \omega t dt \\ &= e^{t/(RC)} v(t) + \frac{V_0}{\omega RC} e^{t/(RC)} \cos \omega t - \frac{1}{(\omega RC)^2} \int e^{t/(RC)} v'(t) dt . \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\int e^{t/(RC)} v'(t) dt = \frac{\sin \omega t + 1/(\omega RC) \cos \omega t}{1 + 1/(\omega RC)^2} V_0 e^{t/(RC)} .$$

Logo, a solução geral da equação diferencial considerada é (Figura 1.7)

$$j(t) = k e^{-t/(RC)} + V_0 \frac{(\omega RC)^2 \sin \omega t + (\omega RC) \cos \omega t}{R [1 + (\omega RC)^2]} ,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. A parcela correspondente à solução geral da equação homogénea $k e^{-t/(RC)}$ converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto quaisquer que sejam as condições iniciais, quando $t \rightarrow +\infty$ a solução $j(t)$ converge para a solução particular

$$j_p(t) = V_0 \frac{(\omega RC)^2 \sin \omega t + (\omega RC) \cos \omega t}{R [1 + (\omega RC)^2]} ,$$

mais precisamente $j(t) - j_p(t) = e^{-t/(RC)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Por isso, diz-se que j_p é a **solução estacionária** do circuito correspondente à excitação sinusoidal $V_0 \sin \omega t$. À parcela da solução que é solução da equação homogénea $j(t) - j_p(t) = e^{-t/(RC)}$ chama-se **solução transitória** do circuito. A solução transitória é diferente de zero se no instante inicial a corrente não tem o valor da solução estacionária nesse instante e, portanto, corresponde à evolução que permite ajustar ao longo do tempo as condições iniciais à solução estacionária.

É fácil ver com trigonometria elementar que uma função da forma $A \sin \alpha + B \cos \alpha$ pode ser escrita na forma $M \sin(\alpha - \varphi)$, com

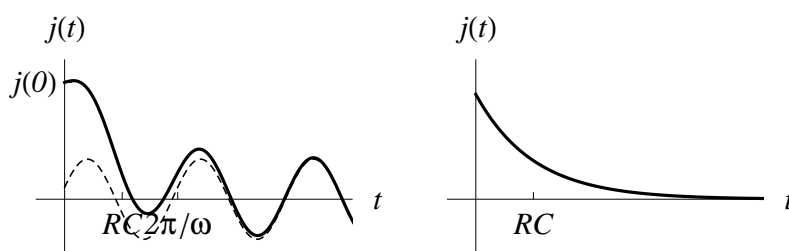


Figura 1.7: Corrente eléctrica, solução estacionária e solução transitória num circuito RC com diferença de potencial eléctrico sinusoidal nos terminais

$M = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\sin \varphi = -B/\sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos \varphi = A/\sqrt{A^2 + B^2}$, logo $\varphi = -\arctan B/A$. Portanto, com $\varphi = -\arctan(1/(\omega RC))$, a solução estacionária pode ser escrita na forma

$$j_p(t) = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Conclui-se que uma excitação do circuito nos terminais com uma diferença de potencial eléctrico sinusoidal de **amplitude** V_0 e **frequência angular** ω leva a uma corrente estacionária no circuito também sinusoidal com a mesma frequência angular, mas com amplitude $J_0 = \omega C V_0 / \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ e uma **desfasagem** φ em relação à excitação sinusoidal do circuito.

Ao quociente entre as amplitudes da diferença de potencial nos terminais e da corrente no circuito em regime estacionário, análogo ao valor de uma resistência no caso do circuito ser só essa resistência, chama-se **módulo da impedância** do circuito, designada por $|Z|$, e à desfasagem φ entre a corrente e a diferença de potencial chama-se **argumento da impedância** do circuito. A **impedância** do circuito é o número complexo $Z = |Z|e^{i\varphi}$. No caso presente,

$$\begin{aligned} |Z| &= \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{\omega C} \\ e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{\omega C} \frac{(\omega RC)^2 - i(\omega RC)}{R[1 + (\omega RC)^2]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} (\omega RC - i), \end{aligned}$$

pelo que a impedância do circuito RC é

$$Z = |Z| e^{i\varphi} = R + \frac{1}{i\omega C}.$$

É fácil ver que a impedância de um circuito que consiste apenas numa resistência R ou num condensador de capacidade C é, respectivamente, R ou $1/(i\omega C)$, pelo a impedância do circuito RC é a soma das impedâncias de cada um dos seus componentes, como teria de ser porque se

encontram em série e num circuito em série as diferenças de potencial nos terminais de cada componente adicionam-se para darem a diferença de potencial nos terminais do circuito todo e a corrente em cada componente é a mesma. O conceito de impedância facilita a análise de circuitos mais complicados e é útil não só em electrotecnia como em mecânica, acústica e noutras situações em que se considerem circuitos de sistemas lineares.

Uma função sinusoidal de frequência angular ω como a corrente estacionária $j_p(t) = J_0 \sin(\omega t - \varphi)$ pode ser representada como a parte imaginária do número complexo $J_0 e^{-i\varphi} e^{i\omega t}$ que também se escreve $\tilde{J}_p e^{i\omega t}$, com $\tilde{J}_p = J_0 e^{-i\varphi}$ chamada a **amplitude complexa**² de j_p . Assim, o módulo e o argumento da amplitude complexa de j_p dão as suas amplitude e defasagem. A diferença de potencial v nos terminais do circuito também é uma função sinusoidal com frequência angular ω cuja amplitude complexa é $\tilde{V} = V_0$. Portanto temos $Z \tilde{J}_p = |Z| e^{i\varphi} J_0 e^{-i\varphi} = V_0 = \tilde{V}$, ou seja com amplitudes complexas recupera-se completamente a igualdade da diferença de potencial ao produto da impedância pela corrente, correspondente no caso de uma resistência à lei de Ohm³ $v_R = Rj$.

Pode-se agora obter a **relação entrada-saída** do sistema com entrada igual à diferença de potencial v nos terminais do circuito RC e saída igual à diferença de potencial v_C nos terminais do condensador C . De facto, como a impedância do circuito e do condensador é, respectivamente, Z e $1/(i\omega C)$, utilizando amplitudes complexas obtém-se $\tilde{V} = Z \tilde{J}_p = Z \tilde{V}_C i\omega C$, pelo que o quociente entre as amplitudes complexas da saída e da entrada do sistema é $T(\omega) = \tilde{V}_C / \tilde{V} = 1/(1+i\omega RC)$, a que se chama **função de transferência do sistema**. Esta função com valores complexos pode ser representada em termos do seu módulo $G(\omega) = |T(\omega)|$ e de um seu argumento $\Phi(\omega)$ tal que $T(\omega) = G(\omega) e^{i\Phi(\omega)}$. No caso presente estas funções são, respectivamente (Figura 1.8)

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}, \quad \Phi(\omega) = -\arctan(\omega RC).$$

Pode-se ver que a função G que dá o **ganho de amplitude** do sistema tem o valor 1 em zero, é decrescente em $[0, +\infty[$, tende para zero

²A representação complexa de sinais eléctricos sinusoidais e de impedâncias foi introduzida em 1893 pelo engenheiro Charles Steinmetz (1865-1923) e foi fortemente responsável pelo rápido progresso da engenharia de sistemas eléctricos de corrente alternada no início do século XX. É usada rotineiramente na análise de circuitos e sinais e no controlo de sistemas. A sólida preparação que Steinmetz obteve na Alemanha como estudante universitário de matemática permitiu-lhe dispor de conhecimentos de análise complexa invulgares nos engenheiros da época.

³Ohm, Georg Simon (1789-1854).

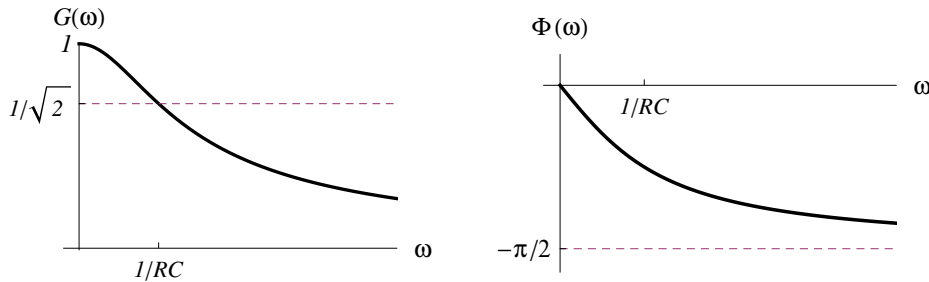


Figura 1.8: Função de transferência
 $T(\omega) = G(\omega)e^{i\Phi(\omega)}$ do circuito RC

quando $\omega \rightarrow +\infty$ e tem um ponto de inflexão em $\omega_c = 1/(RC)$. À frequência angular ω_c chama-se **frequência crítica** do sistema. O sistema atenua a amplitude das oscilações de frequência elevada em relação às de frequência baixa, pelo que em Análise de Sinais é usual dizer que se trata de um **filtro passa-baixo**.

Como para $\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$ verifica-se $\mu(s)/\mu(t) = e^{-\int_s^t a}$ para todo $t, s \in J$, os resultados obtidos podem ser resumidos no teorema seguinte.

(1.3) **Teorema:** Se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $a, b: J \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, $t_0 \in J$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, então o problema de valor inicial

$$\dot{y} + a(t)y = b(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

tem uma solução única definida em todo o intervalo J . A solução é

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t a} y_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a} b(s) ds.$$

1.3 Equações separáveis

No início da secção anterior, para resolver a equação $\dot{y} + a(t)y = 0$ passou-se a $\dot{y}/y = -a(t)$ e integraram-se ambos os lados desta equação. A ideia foi separar os termos que só envolvem y dos que envolvem t para obter uma equação que pode ser resolvida directamente por integração.

A ideia anterior pode ser sempre aplicada a equações do tipo

$$\dot{y} = \frac{g(t)}{f(y)},$$

onde f e g são funções com valores reais definidas e contínuas em intervalos de números reais dados, e $f(y) \neq 0$ em todo o intervalo de definição de f . As equações deste tipo chama-se **equações separáveis**, por se poderem separar os termos que envolvem y dos que envolvem t . Obviamente, as equações lineares de 1ª ordem homogêneas, consideradas no início da secção anterior, são casos particulares de equações separáveis. A equação agora considerada é equivalente a $f(y)\dot{y} = g(t)$. Se F é uma primitiva qualquer de f , isto é, $F(y) = \int f(y) dy$, obtém-se

$$F[y(t)] = \int g(t) dt + C ,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Esta equação não dá a solução y explicitamente, mas o problema ficou transformado em resolver uma equação implícita que não envolve derivadas. Por isso, considera-se que a equação diferencial dada fica resolvida se, para cada valor da constante C , a última equação implícita obtida determina univocamente os valores $y(t)$ da solução. O Teorema da Função Implícita garante que as soluções ficam univocamente determinadas numa vizinhança de um ponto t_0 onde $F'[y(t_0)] = f[y(t_0)] \neq 0$. Como, por hipótese, $f(y) \neq 0$ em todo o intervalo de definição de f , esta condição é satisfeita. Portanto, considera-se que ficou obtida a solução geral da equação diferencial considerada, embora de forma implícita.

Quando se pretende resolver um problema de valor inicial para uma equação separável

$$f(y)\dot{y} = g(t) , \quad y(t_0) = y_0 ,$$

pode-se integrar a equação entre t_0 e t , o que dá

$$F[y(t)] = F(y_0) + \int_{t_0}^t g(s) ds .$$

Os resultados obtidos são resumidos no teorema seguinte.

(1.4) **Teorema:** *Se f e g são funções reais de variável real contínuas em vizinhanças de pontos y_0 e t_0 , respectivamente, e $f(y_0) \neq 0$, então o problema de valor inicial para a equação diferencial separável*

$$f(y)\dot{y} = g(t) , \quad y(t_0) = y_0 ,$$

tem solução única num intervalo $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ para algum $\epsilon > 0$. A solução é definida implicitamente pela equação

$$F[y(t)] = F(y_0) + \int_{t_0}^t g(s) ds , \quad \text{onde } F(y) = \int f(y) dy .$$

Como o teorema estabelece a existência e unicidade de soluções de um problema de valor inicial definidas numa vizinhança do instante inicial t_0 diz-se que é um resultado de **existência e unicidade local** para o problema considerado. Note-se que para equações lineares foi estabelecida na secção anterior a **existência e unicidade de solução** definida em todo o intervalo de continuidade das funções que são coeficientes da equação.

Para compreender os aspectos mais simples relevantes para a possibilidade de extensão de soluções locais de equações diferenciais a intervalos maiores e a unicidade de solução de problemas de valor inicial é útil considerar os exemplos seguintes.

(1.5) Exemplos:

Considera-se a equação $\dot{y} = y^\alpha$ para certos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$. Na vizinhança de pontos onde $y(t) \neq 0$ esta equação é uma equação separável equivalente a $\dot{y}y^{-\alpha} = 1$. Integrando ambos os lados desta equação para $\alpha \neq 1$, obtém-se $y^{1-\alpha}/(1-\alpha) = t + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, pelo que as soluções da equação dada que não assumem o valor zero são soluções desta equação implícita.

Note-se que a aplicação do método de separação de variáveis obrigou a excluir à partida possíveis soluções que se anulem. Contudo, para $\alpha > 0$, a função identicamente nula satisfaz a equação diferencial dada, pelo que é uma **solução global** da equação, i.e., uma solução definida em todo \mathbb{R} (para $\alpha \leq 0$ as soluções não podem assumir o valor zero porque a própria equação não estaria definida no ponto correspondente).

Consideramos abaixo especificamente os casos em que $\alpha = 3, 2, 1, 2/3, 1/2$ e -1 .

1. *CASO* $\dot{y} = y^3$: As soluções y obtidas por separação de variáveis neste caso satisfazem $y^2(t) = 1/[-2(t+c)]$. Uma das soluções continuamente diferenciável desta equação é $y(t) = [-2(t+c)]^{-1/2}$ e a outra solução é $-y$. Ambas têm domínio $] -\infty, -c [$. Em $t = -c$ estas funções tendem para ∞ , pelo que o intervalo máximo de definição da solução correspondente da equação diferencial é $] -\infty, -c [$. Estas funções não assumem o valor zero, pelo que além delas a equação diferencial só tem a solução identicamente nula, a qual é uma solução global (Figura 1.9).

Assim, cada uma das soluções não nulas da equação diferencial considerada neste caso tende para infinito em tempo finito. Quando tal acontece diz-se que a solução **explode**⁴.

Como $\dot{y} = y^3$, em pontos onde y é maior do que 1 a solução y é crescente com derivada $\dot{y} = y^3$ a crescer mais rapidamente do que y , e é por isso

⁴Em inglês diz-se *blows up*.

que tem um crescimento de tal modo rápido que tende para $+\infty$ em tempo finito. Analogamente, em pontos onde $-y$ é menor do que -1 a solução $-y$ é decrescente com derivada $-\dot{y} = -y^3$ a decrescer mais rapidamente do que $-y$ e é por isso que tem um decrescimento de tal modo rápido que tende para $-\infty$ em tempo finito.

Da solução geral da equação diferencial obtida acima conclui-se que cada problema de valor inicial $\dot{y} = y^3$, $y(t_0) = y_0$, tem solução única para $y_0 \in \mathbb{R}$, a qual pode ser obtida, assim como o seu **intervalo máximo de definição**, a partir da solução geral calculada acima. Na verdade, resolvendo para c a equação $[-2(t+c)]^{-1/2} = y_0$, com $y_0 > 0$, obtém-se $c = -t_0 - 1/(2y_0^2)$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é:

- (i) $y(t) = +[-2(t-t_0) + 1/y_0^2]^{-1/2}$ em $] -\infty, t_0 + 1/(2y_0^2)[$ [se $y_0 > 0$,
- (ii) $y(t) = -[-2(t-t_0) + 1/y_0^2]^{-1/2}$ em $] -\infty, t_0 + 1/(2y_0^2)[$ [se $y_0 < 0$,
- (iii) a solução global $y(t) = 0$ se $y_0 = 0$ (Figura 1.9).

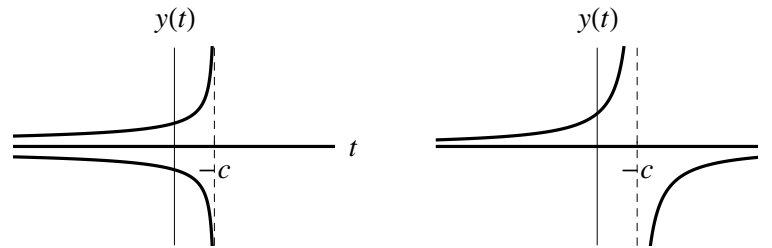


Figura 1.9: Soluções de $\dot{y} = y^3$ e de $\dot{y} = y^2$

2. *CASO* $\dot{y} = y^2$: A função y obtida por separação de variáveis é neste caso $y(t) = -1/(t+c)$ e tem domínio $] -\infty, -c[\cup] -c, +\infty[$. Em $t = -c$ esta função tende para ∞ , pelo que para cada $c \in \mathbb{R}$ há duas soluções dadas pela função y , uma definida no intervalo $] -\infty, -c[$ e a outra no intervalo $] -c, +\infty[$, os quais são os correspondentes intervalos máximos de definição. Cada uma destas soluções explode, embora uma no sentido positivo e outra no sentido negativo de t . Tal como no caso anterior, estas funções não assumem o valor zero, pelo que além delas a equação diferencial só tem a solução identicamente nula e esta é uma solução global (Figura 1.9).

Cada problema de valor inicial $\dot{y} = y^2$, $y(t_0) = y_0$, tem solução única para $y_0 \in \mathbb{R}$ que pode ser obtida, assim como o seu intervalo máximo de definição, a partir da solução geral anterior.

3. *CASO* $\dot{y} = y$: Este é o caso de $\alpha = 1$ que foi excluído no processo de separação de variáveis seguido no início destes exemplos. É a equação linear homogénea $\dot{y} - y = 0$ que, como se viu na secção anterior, tem

solução geral $y(t) = ce^t$, com $c \in \mathbb{R}$. Cada uma destas funções é uma solução global da equação diferencial dada (Figura 1.10).

Conclui-se que cada problema de valor inicial $\dot{y} = y$, $y(t_0) = y_0$, tem solução única para $y_0 \in \mathbb{R}$, nomeadamente $y(t) = y_0 e^{t-t_0}$ (Figura 1.10).

4. CASO $\dot{y} = \sqrt[3]{y^2}$: A função y obtida por separação de variáveis neste caso é $y(t) = [(t+c)/3]^3$ e tem domínio \mathbb{R} . Em $t = -c$ esta função anula-se. Como as soluções da forma y foram obtidas na hipótese de $y(t) \neq 0$, é preciso verificar separadamente o que se passa em $t = -c$. Dado que $\dot{y}(-c) = 0$ e $\sqrt[3]{y^2(-c)} = 0$, a função y também satisfaz a equação diferencial dada em $t = -c$, pelo que é uma solução global dessa equação. Além disso, como a função identicamente nula é solução global da equação diferencial dada, conclui-se que também são soluções globais dessa equação as funções:

- (i) nulas em $] -\infty, -c]$ e iguais a y em $[-c, +\infty[$,
- (ii) iguais a y em $] -\infty, -c]$ e nulas em $[-c, +\infty[$,
- (iii) iguais a y em $] -\infty, -c]$, nulas em $[-c, -d]$ para $c > d$, e dadas pela fórmula obtida para y mas com c substituído por d em $[-d, +\infty[$ (Figura 1.10).

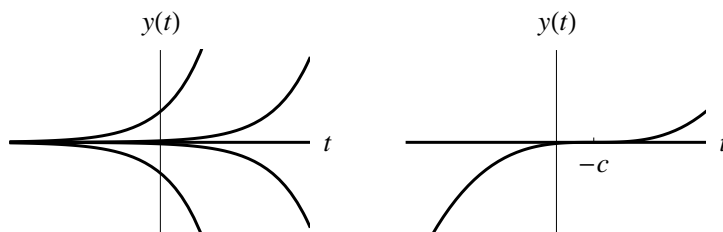


Figura 1.10: Soluções de $\dot{y} = y$ e de $\dot{y} = \sqrt[3]{y^2}$

Em consequência, cada problema de valor inicial $\dot{y} = \sqrt[3]{y^2}$, $y(t_0) = y_0$, com $y_0 \in \mathbb{R}$, tem infinitas soluções, todas globais, que podem ser obtidas a partir da solução geral anterior (Figura 1.10).

É de notar que a equação diferencial dada pode ser escrita na forma considerada no teorema (1.4), neste caso $f(y)\dot{y} = 1$ com $f(y) = 1/\sqrt[3]{y^2}$. Como $f(y_0) \neq 0$ se $y_0 \neq 0$, este teorema garante a unicidade de solução local de cada problema de valor inicial com $y_0 \neq 0$. É claro que não há contradição com a extensão de cada uma destas soluções a um intervalo máximo de definição não ser única. Por outro lado, uma vez que f não está definida no ponto zero, aquele teorema nada diz sobre a existência ou unicidade de solução do problema de valor inicial com $y_0 = 0$.

A não unicidade de soluções de cada problema de valor inicial corresponde a soluções com valores diferentes num dado instante serem

coincidentes num outro instante. Neste caso, como uma das soluções é a função identicamente nula e cada problema de valor inicial $y_0 \neq 0$ tem solução local única, a não unicidade de solução em intervalos máximos de definição corresponde a uma solução y com valor diferente de zero num dado instante anular-se num outro instante. A função $z = -1/y$ tem derivada $\dot{z} = \dot{y}/y^2 = y^{2/3}/y^2 = z^{4/3}$ em todos os pontos onde y é diferente de zero, pelo que nesses pontos é solução da equação diferencial $\dot{z} = z^{4/3}$. Assim, a não unicidade da solução y da equação dada corresponde à solução $z = 1/y$ da equação diferencial $\dot{z} = z^{4/3}$ explodir. Esta observação permite entender a não unicidade de solução em termos do que leva soluções a explodirem, como foi analisado no Caso 1.

A função $f(y) = \sqrt[3]{y^2}$ tem variações arbitrariamente grandes para pequenas variações de y na vizinhança de zero, pois $f'(y) = (2/3)y^{-1/3} \rightarrow \infty$ quando $y \rightarrow 0$, o que permite a soluções próximas de zero variarem suficientemente rapidamente para intersectarem a solução nula, isto é, para chegarem a zero em tempo finito.

5. *CASO* $\dot{y} = \sqrt{y}$: Note-se que a equação não está definida em pontos $y(t) < 0$. A função y obtida por separação de variáveis neste caso é $y(t) = [(t+c)/2]^2$ e tem domínio \mathbb{R} . Contudo, $\dot{y} = \sqrt{y} \geq 0$ em pontos onde a equação está definida e $\dot{y}(t) = t+c \geq 0$ se e só se $t > -c$. Como $y(-c) = 0$, $\dot{y}(-c) = 0$ e a função identicamente nula é solução global da equação diferencial dada, conclui-se que também são soluções globais da equação diferencial dada as funções nulas em $] -\infty, -c]$ e iguais a y em $[-c, +\infty[$. A equação não tem outras soluções (Figura 1.11).

Em consequência, cada problema de valor inicial $\dot{y} = \sqrt{y}$, $y(t_0) = y_0$, tem infinitas soluções (todas globais) se $y_0 \geq 0$, e não tem solução se $y_0 < 0$.

Tal como no caso anterior, o teorema (1.4) garante a unicidade de solução local de cada problema de valor inicial com $y_0 > 0$, embora a extensão de cada uma destas soluções a um intervalo máximo de definição não seja única. O teorema nada diz sobre a existência ou unicidade de solução local do problema de valor inicial com $y_0 = 0$, embora a análise anterior permita concluir que este problema tem infinitas soluções, mesmo localmente.

6. *CASO* $\dot{y} = 1/y$: Esta equação não está definida para $y = 0$. As soluções y obtidas por separação de variáveis neste caso satisfazem $y^2(t) = 2(t+c)$. Uma das soluções continuamente diferenciável desta equação é $y(t) = \sqrt{2(t+c)}$ e a outra solução é $-y$. Ambas têm domínio $[-c, +\infty[$. Em $t = -c$ estas funções são iguais a zero, pelo que a equação diferencial dada não está definida nestes pontos. Conclui-se que para cada $c \in \mathbb{R}$ há duas soluções, uma da forma da função y

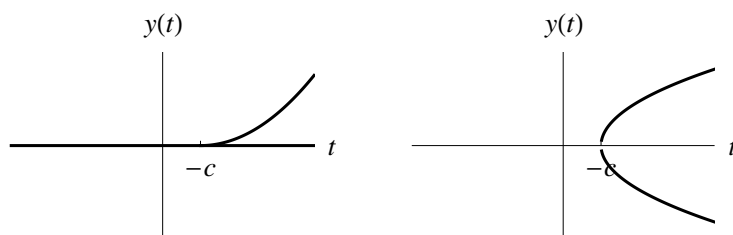


Figura 1.11: Soluções de $\dot{y} = \sqrt{y}$ e de $\dot{y} = 1/y$

acima calculada e outra da forma $-y$, ambas com intervalo máximo de definição $] -c, +\infty[$. Neste caso, as soluções não são globais nem explodem. Cada solução atinge em tempo finito a fronteira do domínio de definição da equação diferencial dada. Esta é a razão pela qual neste caso a solução não pode ser prolongada para além desse instante (Figura 1.11).

Em consequência, cada problema de valor inicial $\dot{y} = 1/y$, $y(t_0) = y_0$, tem solução única para $y_0 \neq 0$, a qual pode ser obtida a partir da solução geral acima considerada, e não tem solução se $y_0 = 0$ pois a equação diferencial não está definida para $y = 0$.

Os exemplos precedentes ilustram com equações diferenciais do tipo $\dot{y} = y^\alpha$ os aspectos mais simples associados à possibilidade ou impossibilidade de extensão de soluções locais de equações diferenciais, bem como à não unicidade de problemas de valor inicial.

Consideram-se a seguir exemplos de equações separáveis de outros tipos.

(1.6) Exemplos:

1. Considera-se que um corpo de massa m sob a acção da gravidade é lançado da superfície da terra verticalmente para cima com velocidade inicial v_0 , em condições em que se pode desprezar o atrito, mas devido a estarmos interessados em situações em que o corpo percorre distâncias significativas em comparação com o raio da terra temos de considerar a variação da gravidade com a altitude. A Lei da Atracção Gravitacional de Newton (a força gravitacional entre duas massas é inversamente proporcional ao quadrado da distância⁵) dá a força da gravidade a altitude y se à superfície da terra a aceleração da gravidade for g na forma $F_g = -mgR^2/(y+R)^2$, onde R designa o raio da terra. O

⁵No caso de corpos esféricos a lei é válida medindo as distâncias a partir dos centros dos corpos.

movimento do corpo é vertical com a sua altitude no instante t contado a partir do lançamento dada por $y(t)$. A velocidade do corpo é $v = \dot{y}$. A Lei de Newton dá $m\dot{v} = -mgR^2/(y+R)^2$ e a condição inicial é $y(0)=0, v(0)=v_0$. Da regra de derivação da função composta, obtém-se $dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v dv/dy$, onde as derivadas são calculadas em pontos correspondentes. Portanto, $v dv/dy = -gR^2/(y+R)^2$.

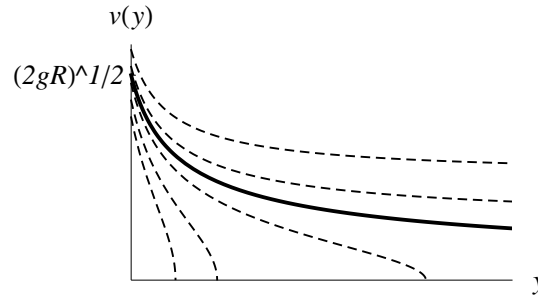


Figura 1.12: Velocidade de um corpo lançado verticalmente da superfície da terra com velocidade inicial v_0 desprezando o atrito

A equação diferencial obtida é uma equação de variáveis separáveis que pode ser integrada para dar $v^2/2 = gR^2/(y+R) + k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Para ser satisfeita a condição inicial $v(0) = v_0$ tem de ser $k = v_0^2/2 - gR$, pelo que a velocidade no instante t é dada em função da posição nesse instante por (Figura 1.12)

$$v(t) = \sqrt{\frac{2gR^2}{y(t)+R} + v_0^2 - 2gR}.$$

De modo ao movimento prosseguir indefinidamente, o termo na raiz quadrada da expressão anterior tem de permanecer positivo, isto é, tem de ser $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. A esta velocidade inicial que permite o corpo escapar da terra chama-se **velocidade de escape**. Entrando em conta com o atrito, obtém-se velocidades de escape superiores.

- O problema de valor inicial $\dot{y} + 2te^y = 0, y(1) = 2$, pode ser escrito na forma $e^{-y}\dot{y} = -2t, y(1) = 2$. Integrando a equação diferencial de 1 a t obtém-se $\int_2^{y(t)} e^{-r} dr = -\int_1^t 2s ds$, pelo que $-e^{-y(t)} + e^{-2} = -t^2 + 1$. Esta equação pode ser explicitada para os valores da solução, na forma $y(t) = -\ln(t^2 - (1 - e^{-2}))$. Note-se que a solução só está definida nos pontos t tais que $t^2 - (1 - e^{-2}) > 0$, ou seja $|t| > (1 - e^{-2})^{1/2}$. Como a condição inicial é em $t_0 = 1$, toma-se a solução com intervalo máximo de definição $|(1 - e^{-2})^{1/2}, +\infty[$. Quando $t \rightarrow (1 - e^{-2})^{1/2}$ tem-se $y(t) \rightarrow +\infty$, pelo que a solução explode nesse ponto. Na verdade, como $\dot{y} = -2te^y$,

o valor absoluto da derivada de y cresce exponencialmente em relação ao valor de y desde que $t \neq 0$, obtendo-se um rápido crescimento de y para infinito em tempo finito (neste caso quando t decresce para $(1-e^{-2})^{1/2}$) (Figura 1.13).

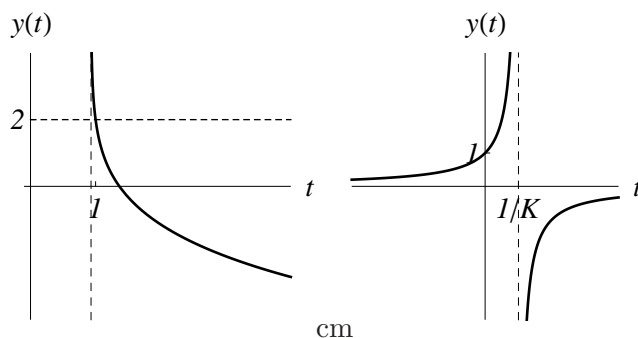


Figura 1.13: Soluções de $\dot{y} + 2te^y = 0$, $y(1) = 2$, e de $ty' + y = y^2$

3. A equação diferencial $ty' + y = y^2$ pode ser escrita para $y \neq 0$, $y \neq 1$ e $t \neq 0$ na forma $y'/[y(y-1)] = 1/t$. Para integrar o lado esquerdo da equação convém desenvolver $1/[y(y-1)]$ como soma de frações simples: $1/[y(y-1)] = A/y + B/(y-1)$. Igualando os denominadores de ambos os lados da equação obtém-se $1 = A(y-1) + By$, de onde resulta com $y = 0$ e $y = 1$, respectivamente, $A = -1$ e $B = 1$. Portanto, nos casos considerados a equação é equivalente a $-y'/y + y'/(y-1) = 1/t$. Integrando ambos os lados obtém-se $\ln(|y-1|/|y|) = \ln|t| + C$, ou seja $|(y-1)/y| = e^C|t|$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Logo, a solução satisfaz $(y-1)/y = Kt$ e, portanto, $y(t) = (1-Kt)^{-1}$, onde $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é uma constante arbitrária.

No cálculo anterior supôs-se $y(t) \neq 0$, $y(t) \neq 1$ e $t \neq 0$. É fácil verificar que as soluções encontradas satisfazem a primeira desigualdade e só não verificam a segunda quando $Kt = 0$, o que acontece apenas para $t = 0$. Por outro lado, a solução $y(t) = (1-Kt)^{-1}$ não está definida em $t = 1/K$ e toma o valor 1 apenas no ponto $t = 0$. Logo, o método utilizado garante apenas que y é solução em todos os intervalos que não contêm $t = 0$ ou $t = 1/K$. No entanto, substituindo $y(t) = (1-Kt)^{-1}$ na equação dada no início conclui-se que esta função é solução da equação também em intervalos que contêm $t = 0$, pois $y'(0) = K$ e $y(0) = 1$, e portanto em $t = 0$ verifica-se $ty'(t) + y(t) = 1 = y^2(t)$. Por outro lado, é claro que as duas funções constantes identicamente iguais a 0 e a 1, respectivamente, também satisfazem a equação diferencial dada.

Como a função $y(t) = (1-Kt)^{-1}$ não está definida em $t = 1/K$, a solução geral da equação é a seguinte:

- (i) $y:]1/K, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(t) = (1-Kt)^{-1}$,

- (ii) $y:]-\infty, 1/K[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(t) = (1 - Kt)^{-1}$,
- (iii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(t) = 0$,
- (iv) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(t) = 1$,

onde $K \neq 0$ são constantes arbitrárias (Figura 1.13). As soluções dos dois primeiros casos explodem em $t = 1/K$ e as soluções dos dois últimos casos são globais.

Os gráficos de soluções diferentes dos tipos indicados não se intersectam, a não ser os das soluções dos tipos (i), (ii) e (iii) que se intersectam todas no ponto $(t, y) = (0, 1)$. Apesar destas intersecções os únicos problemas de valor inicial $ty' + y = y^2$, $y(t_0) = y_0$, com mais de uma solução ocorrem para $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$, caso em que o problema tem infinitas soluções. Na verdade, nos outros casos, as soluções dos diferentes tipos indicados que se intersectam no ponto $(t, y) = (0, 1)$ têm derivadas diferentes em $t = 0$, pelo que uma função que seja igual a uma destas soluções para $t > 0$ e a uma outra para $t < 0$ não é diferenciável em $t = 0$ e, portanto, não é solução da equação diferencial.

Em consequência, concluiu-se que cada problema de valor inicial $ty' + y = y^2$, $y(t_0) = y_0$, tem:

- (i) solução única se $t_0 \neq 0$ e $y_0 \notin \{0, 1\}$ dada por

$$y(t) = \frac{t_0 y_0}{t_0 y_0 - (y_0 - 1)t},$$

com intervalo máximo de definição $]t_0 y_0 / (y_0 - 1), +\infty[$ ou $] -\infty, t_0 y_0 / (y_0 - 1)[$ conforme $(y_0 - 1)/t_0$ for menor ou maior do que zero, respectivamente;

- (ii) solução única global $y(t) = 0$ se $y_0 = 0$;
 - (iii) solução única global $y(t) = 1$ se $y_0 = 1$ e $t_0 \neq 0$;
 - (iv) infinitas soluções se $y_0 = 1$ e $t_0 = 0$.
4. A equação $yy' = -t$ pode ser integrada directamente e dá $y^2(t)/2 = -t^2/2 + C$, pelo que as suas soluções satisfazem a equação $y^2(t) + t^2 = 2C$. Esta equação só tem soluções para $C > 0$ e os pontos $(t, y(t))$ que a satisfazem definem uma circunferência (Figura 1.14). Assim, a solução geral da equação diferencial considerada em intervalos máximos de definição é dada pelas funções:

- (i) $y:]-\sqrt{2C}, \sqrt{2C}[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(t) = \sqrt{2C - t^2}$, e
- (ii) $y:]-\sqrt{2C}, \sqrt{2C}[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(t) = -\sqrt{2C - t^2}$,

onde $C > 0$ é uma constante arbitrária.

As soluções da equação diferencial considerada estão definidas apenas em intervalos limitados, mas não explodem. O que se passa quando t

converge para um dos extremos do intervalo de definição da solução é que o valor da solução $y(t)$ tende para zero e, portanto, $y'(t) = -t/y(t)$ tende para ∞ . Assim, neste caso não é a solução que tende para ∞ mas sim a sua derivada, o que impede a possibilidade de extensão a uma função continuamente diferenciável nesses pontos.

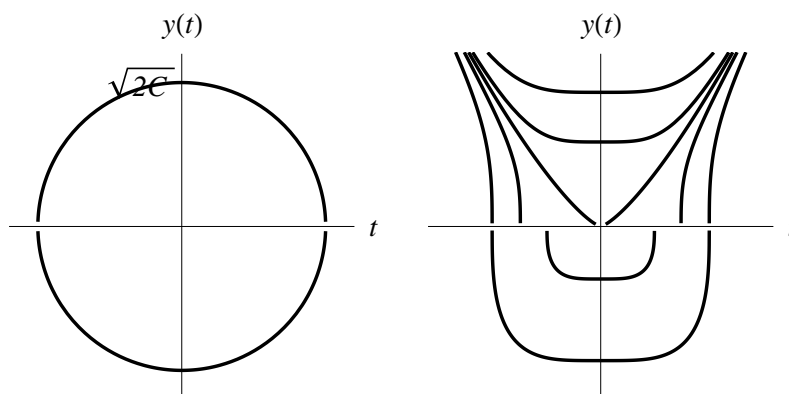


Figura 1.14: Soluções de $yy' = -t$ e de $\dot{y} = t^3/y^2$

5. A equação diferencial $\dot{y} = t^3/y^2$ pode ser escrita para $y \neq 0$ na forma $y^2 \dot{y} = t^3$. Integrando ambos os lados desta equação, obtém-se $y^3(t)/3 = t^4/4 + C$, pelo que a solução geral da equação em cada intervalo onde y não se anula é $y(t) = \sqrt[3]{3t^4/4 + 3C}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária (Figura 1.14).

Para cada $C > 0$ a solução acima obtida é maior ou igual a $\sqrt[3]{3C} > 0$ em todos os pontos, e a solução é global.

Para $C < 0$ a solução obtida tende para zero nos pontos $t = \pm \sqrt[4]{-4C}$. Nestes pontos, obtém-se directamente da equação diferencial dada que $\dot{y}(t) = t^3/y^2(t)$ tende para ∞ , pelo que não é possível estender a solução como função C^1 para além desses valores de t . Como, por definição, as soluções da equação diferencial têm de ser C^1 , nestes casos o intervalo máximo de definição das soluções é limitado. Mais precisamente, existem três soluções, cada uma definida num dos intervalos $]-\infty, -\sqrt[4]{-4C}[$, $]-\sqrt[4]{-4C}, \sqrt[4]{-4C}[$, $]\sqrt[4]{-4C}, +\infty[$.

Para $C = 0$ a solução obtida é da forma $y(t) = \sqrt[3]{3/4} t^{4/3}$. Esta função anula-se em $t = 0$, pelo que a equação diferencial dada não está definida neste ponto. Portanto, neste caso obtém-se duas soluções da forma indicada com intervalos máximos de definição respectivamente $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Note-se que multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por y^2 obtém-se uma equação diferencial equivalente na vizinhança de todos os pontos onde $y(t) \neq 0$, nomeadamente $y^2 \dot{y} = t^3$, e que a função $y(t) = \sqrt[3]{3/4} t^{4/3}$ é solução global desta equação.

6. O problema de valor inicial $(1 + e^y)y' = 1$, $y(1) = 1$, pode ser resolvido integrando a equação no intervalo de 1 a t , nomeadamente $\int_1^{y(t)} (1 + e^x) dx = \int_1^t 1 ds$, de onde se obtém $y(t) + e^{y(t)} = e + t$. Neste caso não é possível obter uma fórmula explícita para $y(t)$ em termos de funções elementares, mas considera-se a equação resolvida porque esta equação implícita não envolve derivadas da solução.

Note-se que o teorema (1.4) garante a existência e unicidade de solução local do problema de valor inicial, pois a equação dada é da forma $f(y)y' = 1$ com $f(y) = 1 + e^y$, e verifica-se $f(1) = 1 + e \neq 0$.

Acontece que neste caso é fácil concluir que a solução do problema de valor inicial dado é global. Na verdade, a função $g(y) = y + e^y$ é uma função estritamente crescente definida em todo \mathbb{R} e, portanto é injectiva. Como o contradomínio de g é \mathbb{R} , conclui-se que esta função tem inversa $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Em consequência, a solução do problema de valor inicial considerado é global e satisfaz $y(t) = g^{-1}(e + t)$.

7. Considera-se o problema de valor inicial $y' = (1 - y)^2 t$, $y(0) = 1$. Não se pode separar variáveis neste caso porque não se pode dividir por $(1 - y)^2$ numa vizinhança do instante inicial, por mais pequena que ela seja, pois $(1 - y(0))^2 = 0$. Contudo, é óbvio que $y(t) = 1$ é uma solução global da equação diferencial. Obtemos uma solução, mas ficamos sem saber se há mais soluções para este problema. Em particular, não se pode aplicar o Teorema da Função Implícita para procurar obter uma resposta afirmativa para a questão de existência e unicidade de solução local. No capítulo seguinte considera-se especificamente a questão da unicidade de soluções de problemas de valores iniciais e com os resultados aí obtidos pode-se concluir que neste caso a solução é única.

1.4 Equações homogéneas

A possibilidade de resolução de equações diferenciais em termos de funções elementares está relacionada com propriedades de simetria ou invariância relativamente restritivas. Uma outra boa ilustração deste facto são as equações diferenciais homogéneas, as quais podem ser transformadas em equações separáveis por mudanças de variáveis. Diz-se que

$$\dot{y} = f(t, y)$$

é uma **equação diferencial homogénea** se $f(t, ty) = f(1, y)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como a função $t \mapsto ty$ é para cada $y \in \mathbb{R}$ uma parametrização da recta de declive y que passa na origem, as equações diferenciais homogéneas são as que estabelecem para as soluções derivadas iguais em todos os pontos

de cada uma dessas rectas, pelo que a invariância ou simetria neste caso é geometricamente evidente.

A mudança de variáveis $v(t) = y(t)/t$ para $t \neq 0$ dá

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= (\dot{y}(t)t - y(t)) / t^2 = (f(t, y(t)) - v(t)) / t \\ &= (f(t, tv(t)) - v(t)) / t = (f(1, v(t)) - v(t)) / t,\end{aligned}$$

pelo que transforma a equação homogénea dada na equação

$$\dot{v}(t) = (f(1, v) - v) / t.$$

Esta equação é separável desde que $f(1, v(t)) \neq v(t)$ e, se $y \mapsto f(1, y)$ é contínua num intervalo em que $f(1, y) \neq y$ e $t \neq 0$, pode ser resolvida como foi visto na secção anterior. Uma vez obtida a solução v , as soluções da equação homogénea inicial podem ser obtidas invertendo a mudança de variáveis $y(t) = tv(t)$, embora os pontos onde $t = 0$ ou $f(1, y(t)/t) = y(t)/t$ tenham de ser vistos apropriadamente.

(1.7) **Exemplo:** Considera-se a equação diferencial $\dot{y} = (t^2 + ty + y^2)/t^2$. A função $f(t, y) = (t^2 + ty + y^2)/t^2$ está definida para $t \neq 0$ e satisfaz $f(t, ty) = (t^2 + t^2y + t^2y^2)/t^2 = 1 + y + y^2 = f(1, y)$, pelo que a equação dada é homogénea. A mudança de variáveis $v(t) = y(t)/t$ transforma a equação em $\dot{v} = (1 + v^2)/t$. Esta equação separável pode ser resolvida para dar $\arctan v(t) = \ln |t| + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Invertendo a mudança de variáveis obtém-se que as soluções da equação inicial são da forma $y(t) = tv(t) = t \tan(\ln |t| + c)$ para $t \neq 0$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Como a função tangente tende para infinito nos pontos que diferem de $\pi/2$ por múltiplos inteiros de π e o logaritmo é uma função estritamente crescente, todas as soluções explodem em ambos os sentidos de t .

1.5 Equações exactas e redutíveis a exactas

Resolver uma equação diferencial ordinária escalar de 1ª ordem $\dot{y} = f(t, y)$ consiste em obter uma equação para a solução $y(t)$, pelo menos em forma implícita $\varphi(t, y(t)) = C$, onde C é uma constante. Portanto, as equações diferenciais ordinárias escalares de 1ª ordem que podemos resolver devem poder ser transformadas em

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt} [\varphi(t, y(t))] = 0.$$

Interessa saber quando se pode escrever uma dada equação nesta forma. O lado esquerdo desta equação é igual a $(d\Phi/dt)(t)$, onde $\Phi(t) = \varphi(t, y(t))$. Aplicando a regra de derivação da função composta obtém-se $d\Phi/dt = \partial\varphi/\partial t + (\partial\varphi/\partial y)(dy/dt)$, onde a derivada no lado esquerdo é calculada em

t e as derivadas no lado direito são calculadas em $(t, y(t))$. Portanto, uma equação $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$ pode ser escrita na forma (1.8) se e só se existe uma função $\varphi(t, y)$ tal que $M = \partial\varphi/\partial t$ e $N = \partial\varphi/\partial y$, isto é, se e só se o campo vectorial (M, N) é um gradiente.

Assim, se $S \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e M, N são funções com valores reais definidas e contínuas em S , diz-se que

$$M(t, y) + N(t, y)\dot{y} = 0$$

é uma **equação diferencial exacta** se o campo vectorial (M, N) é um gradiente em S .

Portanto, para resolver uma equação exacta basta determinar pelos métodos conhecidos uma função potencial para o campo gradiente (M, N) , isto é, uma função φ tal que $(M, N) = \nabla\varphi$. Na verdade, as soluções são então dadas implicitamente por

$$\varphi(t, y) = C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

A existência e unicidade de soluções locais de problemas de valores iniciais para uma equação exacta com $y(t_0) = y_0$, definidas numa vizinhança de t_0 , pode ser estabelecida a partir do Teorema da Função Implícita quando $(\partial\varphi/\partial y)(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0$.

Pode-se averiguar se uma equação $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, com M e N C^1 num conjunto aberto simplesmente conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, é exacta verificando se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$ em S , pois num conjunto simplesmente conexo S esta condição é necessária e suficiente para que o campo vectorial (M, N) seja um gradiente.

Note-se que a equação de primeira ordem $\dot{y} = f(t, y)$, com f contínua num aberto de \mathbb{R}^2 , é um caso particular da equação $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, com $M(t, y) = -f(t, y)$ e $N(t, y) = 1$. Se existe φ tal que $(M, N) = \nabla\varphi$, então $\varphi(t, y) = \int N(t, y) dy = y + k(t)$ e $M(t, y) = (\partial\varphi/\partial t)(t, y) = \dot{k}(t)$, o que só acontece se $M(t, y) = -f(t, y)$ for independente de y , digamos $f(t, y) = g(t)$ com g contínua num intervalo, como considerado no início deste capítulo para as equações que se podem resolver por primitivação imediata.

As equações diferenciais lineares $\dot{y} + a(t)y = b(t)$ com a e b contínuas num intervalo, são da forma $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$ com $M(t, y) = a(t)y - b(t)$ e $N(t, y) = 1$. Se existe φ tal que $(M, N) = \nabla\varphi$, então $\varphi(t, y) = y + k(t)$ e $M(t, y) = \dot{k}(t)$, o que só é possível se $a(t) = 0$, pois em caso contrário $M(t, y)$ não é independente de y . Assim, as equações diferenciais lineares não são exactas, excepto em intervalos onde $a(t) = 0$. Contudo, multiplicando qualquer destas equações pelo factor de integração $e^{\int a(t) dt}$ obtém-se uma nova

equação da forma $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, com $M(t, y) = e^{\int a(t) dt} [a(t)y - b(t)]$ e $N(t, y) = e^{\int a(t) dt}$. Então $(M, N) = \nabla\varphi$, com

$$\varphi(t, y) = e^{\int a(t) dt} y - \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt,$$

pelo que a multiplicação da equação linear dada pelo factor de integração referido transforma-a numa equação diferencial exacta.

As equações separáveis $f(y) \dot{y} = g(t)$ com f e g contínuas nos seus intervalos de definição são exactas, pois têm a forma $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, com $M(t, y) = -g(t)$ e $N(t, y) = f(y)$ e, portanto, $(M, N) = \nabla\varphi$ com $\varphi(t, y) = -\int g(t) dt + \int f(y) dy$.

As equações diferenciais homogéneas $\dot{y} = f(t, y)$, com $f(t, ty) = f(1, y)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como se viu na última secção anterior, são transformadas pela mudança de variáveis $v(t) = y(t)/t$ em equações separáveis $\dot{v}(t) = (f(1, v) - v)/t$. Designando por G uma primitiva da função definida por $g(v) = 1/(f(1, v) - v)$, obtém-se que as soluções v desta equação separável são soluções da equação implícita $-\ln|t| + G(v(t)) = C$, onde C é constante, ou seja, com $\Phi(t, y) = -\ln|t| + G(y/t)$ as soluções y da equação diferencial homogénea inicial são soluções da equação implícita $\Phi(t, y(t)) = C$. Ora, Φ é um potencial do campo $(M, N) = \nabla\Phi$. É um exercício simples de derivadas parciais verificar que $M(t, y) = -f(1, y/t)/[tf(1, y/t) - y]$ e $N(t, y) = 1/[tf(1, y/t) - y]$. Como $f(1, y/t) = f(t, y)$, conclui-se que a equação diferencial exacta $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$ é a mesma equação que se obtém multiplicando ambos os lados da equação diferencial inicial $\dot{y} = f(t, y)$ por N . Portanto, também as equações diferenciais homogéneas $\dot{y} = f(t, y)$ são transformadas em equações diferenciais exactas por multiplicação pelo factor de integração N .

Conclui-se que todos os tipos de equações diferenciais para que anteriormente foram dados métodos de resolução são exactas ou redutíveis a exactas por multiplicação por um factor de integração. Esta situação é geral. Na verdade, se existe uma solução de uma equação diferencial $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, em que M e N são contínuas e N não se anula num conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^2$, dada por uma equação implícita $\varphi(t, y(t)) = 0$, então, como se viu no início desta secção, y satisfaz uma equação diferencial exacta $\mathcal{M}(t, y) + \mathcal{N}(t, y) \dot{y} = 0$, e como $\dot{y} = M/N$ verifica-se $\mathcal{M} + \mathcal{N}M/N = 0$, pelo que com $\mu = \mathcal{N}/N$ é $\mathcal{M} = \mu M$ e $\mathcal{N} = \mu N$, de onde se conclui que μ é um factor de integração para a equação dada.

Os resultados obtidos podem ser resumidos no teorema seguinte.

(1.9) **Teorema:** Considere-se a equação diferencial ordinária escalar de 1ª ordem $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, com M e N contínuas e N não nula num conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^2$. As soluções $y : I \rightarrow S$ da equação diferencial, onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} , são soluções de uma equação implícita $\varphi(t, y) = C$, onde C é uma constante e φ é C^1 em S , se e só se a equação diferencial é exacta em S , caso em que $(M, N) = \nabla\varphi$ em S , ou é redutível a exacta por multiplicação por um factor de integração μ definido e não nulo em S .

Se $(t_0, y_0) \in S$, então o problema de valor inicial para a equação diferencial com $y(t_0) = y_0$ tem solução única num intervalo real aberto contendo t_0 e a solução é a única solução $t \mapsto y(t)$ da equação implícita $\varphi(t, y) = C_0$, com $C_0 = \varphi(t_0, y_0)$, onde φ é um potencial do campo vectorial (M, N) se a equação for exacta, ou um potencial do campo $(\mu M, \mu N)$ se a equação não é exacta e μ é um factor de integração.

Assim, a resolução de uma equação diferencial ordinária escalar de 1ª ordem que não é exacta $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$, em que M e N são contínuas e N não se anula num conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^2$, pode ser realizada calculando um factor de integração μ que não assuma o valor zero. Obtém-se

$$(1.10) \quad \mu(t, y) M(t, y) + \mu(t, y) N(t, y) \dot{y} = 0 .$$

Se μ, M, N são C^1 num conjunto simplesmente conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, a equação obtida é exacta se e só se $(\partial/\partial y) [\mu(t, y)M(t, y)] = (\partial/\partial t) [\mu(t, y)N(t, y)]$, ou

$$(1.11) \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t} .$$

Uma função μ que não se anula e é C^1 em S , e satisfaz a equação anterior é um **factor de integração** da equação diferencial $M(t, y) + N(t, y) \dot{y} = 0$.

Em geral, a equação para μ é uma equação diferencial parcial e como ainda não considerámos a resolução deste tipo de equações convém restringirmos-nos a casos em que a equação se reduz a uma equação diferencial ordinária. Tal acontece se existe um factor de integração independente de y , isto é, tal que $\mu(t, y) = \mu(t)$, ou independente de t , isto é, tal que $\mu(t, y) = \mu(y)$. Consideramos separadamente estes dois casos:

1. *CASO* $\mu(t, y) = \mu(t)$. Neste caso a equação (1.11) pode ser escrita na forma $\mu (\partial M/\partial y) = (\partial\mu/\partial t) N + \mu (\partial N/\partial t)$, ou seja, em pontos onde N não se anula,

$$\dot{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial t}{N} \mu .$$

Esta equação linear homogénea pode ser resolvida para μ num intervalo $J \subset \mathbb{R}$ se e só se $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial t)/N$ depende apenas de t e é contínua para $t \in J$.

2. *CASO* $\mu(t, y) = \mu(y)$. De modo semelhante, conclui-se que a equação (1.11) reduz-se a $(\partial\mu/\partial y)M + \mu(\partial M/\partial y) = \mu(\partial N/\partial t)$, ou seja, em pontos onde M não se anula,

$$\dot{\mu} = \frac{\partial N/\partial t - \partial M/\partial y}{M} \mu.$$

Esta equação linear homogénea pode ser resolvida para μ num intervalo $J \subset \mathbb{R}$ se e só se $(\partial N/\partial t - \partial M/\partial y)/M$ depende apenas de y e é contínua para $y \in J$.

(1.12) **Exemplo:** Considera-se a equação diferencial

$$y^2/2 + 2ye^t + (y + e^t)\dot{y} = 0.$$

Com $M(t, y) = y^2/2 + 2ye^t$ e $N(t, y) = y + e^t$, M e N estão definidas, são C^∞ e satisfazem $(\partial M/\partial y)(t, y) = y + 2e^t$, $(\partial N/\partial y)(t, y) = e^t$ em \mathbb{R}^2 . Assim,

$$\begin{aligned} (\partial M/\partial y - \partial N/\partial t)/N &= yt e^t / (yt e^t) = 1 && \text{(independente de } t \text{ e de } y) \\ (\partial N/\partial t - \partial M/\partial y)/M &= yt e^t / (y^2/2 + 2ye^t) && \text{(dependente de } t \text{ e } y). \end{aligned}$$

Conclui-se que $\partial M/\partial y - \partial N/\partial t \neq 0$ em qualquer aberto não vazio de \mathbb{R}^2 , pelo que a equação dada não é exacta, existe um factor de integração que depende apenas de t , e não existe um factor de integração que dependa apenas de y .

Podem ser obtidos um factor de integração que depende apenas de t resolvendo a equação $\dot{\mu}(t) = [(\partial M/\partial y - \partial N/\partial t)/N] \mu(t)$ que neste caso se reduz a $\dot{\mu}(t) = \mu(t)$. Uma solução desta equação é $\mu(t) = e^t$. Multiplicando a equação dada por este factor de integração obtém-se a equação

$$y^2 e^t / 2 + 2y e^{2t} + (y e^t + e^{2t}) \dot{y} = 0.$$

Esta equação também se pode escrever na forma $M(t, y) + N(t, y)\dot{y} = 0$, com $M(t, y) = y^2 e^t / 2 + 2y e^{2t}$ e $N(t, y) = y e^t + e^{2t}$. Agora verifica-se $(M, N) = \nabla \varphi$, com $\varphi(t, y) = y^2 e^t / 2 + y e^{2t}$. Assim, as soluções da equação dada são definidas implicitamente por $y^2 e^t / 2 + y e^{2t} = C$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Esta equação pode ser explicitada para y nas formas

$$y(t) = -e^t + \sqrt{e^{2t} + 2C e^{-t}} \quad \text{ou} \quad y(t) = -e^t - \sqrt{e^{2t} + 2C e^{-t}},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Estas soluções são globais para $C \geq 0$ e têm intervalos máximos de definição de $] \ln(-2C)/3, +\infty [$ para $C < 0$.

No capítulo dedicado à resolução de equações diferenciais parciais de 1ª ordem ver-se-á como obter soluções da equação diferencial parcial (1.11) e, portanto, obter factores de integração dependentes de t e de y .

Conclui-se da discussão anterior que as equações diferenciais escalares de 1ª ordem que se podem resolver obtendo uma equação implícita para a solução são equações diferenciais exactas ou equações redutíveis a exactas por multiplicação por um factor de integração. Contudo, o cálculo de um factor de integração pode ser difícil e, em geral, não poder ser expresso em termos de funções elementares.

1.6 Traçado gráfico de soluções de equações diferenciais

O traçado gráfico de soluções directamente a partir da equação diferencial que satisfazem é útil em diversas situações. Assume uma importância especial no caso de equações que não se conseguem resolver explicitamente, o que acontece com frequência como se observou nas secções anteriores.

Dada uma equação diferencial $\dot{y} = f(t, y)$, cada uma das soluções y define uma curva em \mathbb{R}^2 constituída pelos pontos $(t, y(t))$, com t a variar no intervalo máximo de definição da solução. Diz-se então que esta curva é uma **curva integral** ou uma **trajectória** da equação diferencial considerada. A recta tangente a uma curva integral num ponto (t, y) tem declive $\dot{y} = f(t, y)$. Por vezes é possível ter uma ideia da forma das soluções a partir do **campo de direcções** correspondente às rectas tangentes a soluções em cada ponto (t, y) , cujo declive pode ser obtido simplesmente calculando o valor $f(t, y)$.

(1.13) Exemplos:

1. Considera-se a equação diferencial⁶ $\dot{y} = 4y(1-y)$. O gráfico da função $f(y) = 4y(1-y)$ é uma parábola de eixo vertical (Figura 1.15). O valor $f(y)$ é o declive da recta tangente às curvas solução que passam nos pontos (t, y) , com t arbitrário. Assim, em pontos (t, y) de uma mesma recta horizontal as rectas do campo de direcções são paralelas entre si. O campo de direcções pode ser representado graficamente escolhendo uma grelha de pontos (t, y) e passando por cada um deles um pequeno segmento de recta com declive $f(y)$ (Figura 1.15). As trajectórias podem então ser traçadas de forma a serem tangentes aos segmentos de recta que representam o campo de direcções. Se o campo de direcções não está representado com a precisão apropriada para traçar as curvas

⁶Esta equação diferencial é conhecida por **equação de Verhulst** ou **equação logística**. Foi considerada em 1846 por Pierre François Verhulst (1804-1849) para modelar uma população que cresce proporcionalmente ao número dos seus elementos num meio com recursos limitados.

solução, refina-se a grelha de pontos e traçam-se segmentos de recta em pontos intermédios.

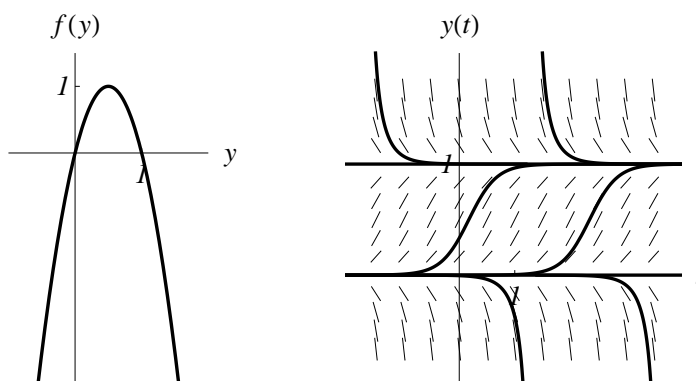


Figura 1.15: Campo de direcções e trajectórias de $\dot{y} = 4y(1-y)$

Neste exemplo podem ser observados cinco tipos de trajectórias:

- (i) a linha recta horizontal de equação $y=0$,
- (ii) a linha recta horizontal de equação $y=1$,
- (iii) trajectórias ilimitadas decrescentes aproximando-se da recta $y=1$ para $t \rightarrow +\infty$,
- (iv) trajectórias ilimitadas decrescentes aproximando-se da recta $y=0$ para $t \rightarrow -\infty$,
- (v) trajectórias limitadas crescentes aproximando-se da recta $y=0$ para $t \rightarrow -\infty$ e da recta $y=1$ para $t \rightarrow +\infty$.

É útil notar que neste caso o campo de direcções é invariante sob translações na direcção do eixo t , pelo que também as trajectórias têm esta invariância. Assim, basta obter uma trajectória de cada um dos três últimos tipos com a precisão pretendida, pois todas as outras infinitas trajectórias dos correspondentes tipos podem ser obtidas dessas três por translações na direcção do eixo t . **Este tipo de invariância é característico das equações diferenciais definidas por funções independentes de t** , ou seja, equações da forma $\dot{y} = f(y)$, *i.e.*, em que a função f que especifica a derivada da solução é independente de t , a que se chama **equações diferenciais autónomas**.

2. Considera-se a equação diferencial $\dot{y} = (2t - 3y)/(t + y)$. Poderíamos representar o campo de direcções para esta equação definindo uma grelha suficientemente fina de pontos (t, y) arbitrários e passando por cada um deles um segmento de recta com declive $f(t, y)$. Como a dependência dos valores desta função em t e y é mais complicada do que no exemplo anterior, este processo resultaria bastante trabalhoso

em cálculo se fosse executado "à mão", embora fosse adequado para traçar o campo de direcções em computador. É mais fácil determinar as curvas no plano ty que correspondem a pontos onde $f(t, y)$ tem um valor constante c . Nos pontos em que $y = -t$, $f(t, y)$ não está definida e tende para infinito, excepto se $(t, y) = (0, 0)$. Para $y \neq -t$ é $f(t, y) = c$ se e só se $2t - 3y = c(t + y)$. Portanto, para $c \neq -3$ verifica-se $f(t, y) = c$ se e só se o ponto (t, y) está na recta da equação $y = [(2-c)/(c+3)]t$. Esta recta passa na origem e tem declive $m(c) = (2-c)/(c+3)$. O gráfico desta função m é representado na Figura 1.16 à esquerda. Considerando valores diferentes de $m(c)$ (no caso concreto da figura $m(c) = \tan k\pi/8$ com $k=0, 1, 2, \dots, 7$) e notando que $f(t, y)$ tende para infinito em cada ponto da recta $y = -t$ com $y, t \neq 0$, obtém-se a representação gráfica do campo de direcções e podem ser traçados gráficos de soluções como na Figura 1.16.

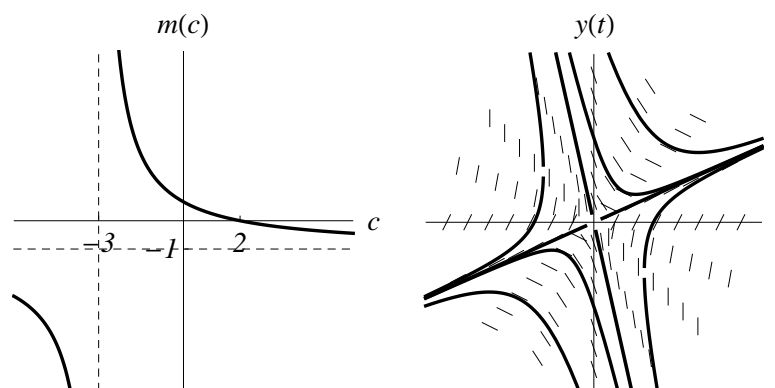


Figura 1.16: Campo de direcções e trajectórias de $\dot{y} = (2t - 3y)/(t + y)$

O traçado das curvas solução deste exemplo sugere que há soluções dadas por linhas rectas que passam na origem. Estas soluções devem corresponder a $m(c) = c$, ou seja $(2-c)/(c+3) = c$, o que é equivalente a $c^2 + 4c - 2 = 0$ e $c = -2 \pm \sqrt{6}$. Portanto, há duas trajectórias rectilíneas de equações $y = (-2 + \sqrt{6})t$ e $y = (-2 - \sqrt{6})t$.

A constatação do campo de direcções ter declives constantes sobre cada uma das rectas que passam na origem mostra que também neste exemplo há uma propriedade de invariância herdada pelas trajectórias, designadamente invariância por expansões e contracções lineares radiais centradas na origem e por simetrias em relação à origem. **Este tipo de invariância ou simetria é característico das equações diferenciais homogéneas.**

Neste exemplo podem ser observados 10 tipos de trajectórias. Devido à

simetria em relação à origem, basta descrever os cinco tipos seguintes, pois os outros obtêm-se destes através dessa simetria:

- (i) a semirecta aberta do 1º quadrante com extremidade na origem e equação cartesiana $y = (-2 + \sqrt{6})t$;
- (ii) a semirecta aberta do 2º quadrante com extremidade na origem e equação cartesiana $y = (-2 - \sqrt{6})t$;
- (iii) as trajectórias curvas decrescentes que provêm da 2ª semirecta anteriormente referida e aproximam-se da 1ª semirecta mencionada quanto t cresce;
- (iv) as trajectórias curvas decrescentes que provêm da 2ª semirecta anteriormente referida e aproximam-se da pontos da recta de equação $y = -t$ onde terminam num dado instante em que a derivada das correspondentes soluções tende para $-\infty$;
- (v) as trajectórias curvas decrescentes que provêm da 2ª semirecta anteriormente referida e aproximam-se da 1ª semirecta mencionada quanto t cresce;
- (vi) as trajectórias curvas crescentes que provêm da semirecta do 3º quadrante simétrica em relação à origem da 1ª semirecta acima referida e aproximam-se da pontos da recta de equação $y = -t$ onde terminam num dado instante em que a derivada das correspondentes soluções tende para $+\infty$.

Analisando os exemplos anteriores conclui-se que o traçado gráfico de soluções pode ser útil para ter uma ideia do tipo de soluções da equação sem a resolver. No entanto ficam em aberto certas questões que precisam de ser esclarecidas, como por exemplo:

- As diferentes trajectórias aproximam-se a ponto de se intersectarem e haver mais de uma trajectória a passar num mesmo ponto?
- Para que pontos (t_0, y_0) existem trajectórias que os contêm, ou seja, para que condições iniciais existem soluções?
- As soluções correspondentes a trajectórias ilimitadas são globais ou explodem?
- Existem intervalos máximos de definição das soluções? Quais são as condições associadas à impossibilidade de prolongar uma solução a um intervalo maior?
- Pequenas perturbações das condições iniciais levam a pequenas perturbações dos valores das soluções num dado instante ou pode haver alterações drásticas destes valores?

- Questão análoga para perturbações dos coeficientes na equação, ou em geral, de parâmetros de que a função que define a equação diferencial dependa?

Em geral, estas questões são do âmbito da teoria qualitativa das equações diferenciais e são esclarecidas no capítulo seguinte, onde se começa por tratar de forma geral a existência e a unicidade de soluções de problemas de valor inicial.

Acontece que no caso concreto dos dois exemplos anteriores as respostas podem ser dadas resolvendo as equações, dado que a primeira é separável e a segunda é homogénea. Deixa-se como exercício a resolução destas equações e a resposta às questões acima nestes casos concretos. Sugere-se, também, traçar graficamente as soluções, resolver a equação e responder às questões acima para as equações $\dot{y} = \sqrt{1 - x^2}$ e $\dot{y} = 1 + y^2$.

1.7 Resolução numérica de equações diferenciais

Dado um problema de valor inicial

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

para o qual existe uma solução única, a resolução numérica da equação corresponde a calcular valores aproximados y_1, \dots, y_N para $y(t)$ em instantes de tempo $t = t_1, \dots, t_N$.

O estudo de métodos de resolução numérica de equações diferenciais é do âmbito da Análise Numérica. Não se pretende aqui enveredar por esse domínio, mas sim indicar os métodos mais simples de resolução numérica de equações diferenciais que, inclusivamente, são de fácil programação em computador e, portanto, poderão ser usados desde já. O estudo das propriedades desses métodos e o desenvolvimento de métodos mais eficazes não será aqui considerado.

O traçado gráfico de soluções de equações diferenciais a partir de campos de direcções, apresentado na secção anterior, sugere uma forma de calcular numericamente valores aproximados para a solução do problema de valor inicial considerado. De facto, em cada ponto (t_k, y_k) pode-se calcular o valor $f(t_k, y_k)$ e obter o declive da recta tangente ao gráfico da solução que passa no ponto (t_k, y_k) . Portanto, é natural aproximar a solução num pequeno intervalo de tempo com início em t_k por um segmento de recta de declive $f(t_k, y_k)$ (Figura 1.17). Se os instantes de tempo considerados forem suficientemente próximos é de esperar que os valores calculados sejam aproximadamente iguais aos correspondentes valores da solução do problema. Considerando intervalos de tempo de largura h , os valores y_1, \dots, y_N podem ser obtidos pela relação de recorrência

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad \text{com } t_k = t_0 + kh.$$

A este método de cálculo aproximado da solução chama-se **método de Euler**.

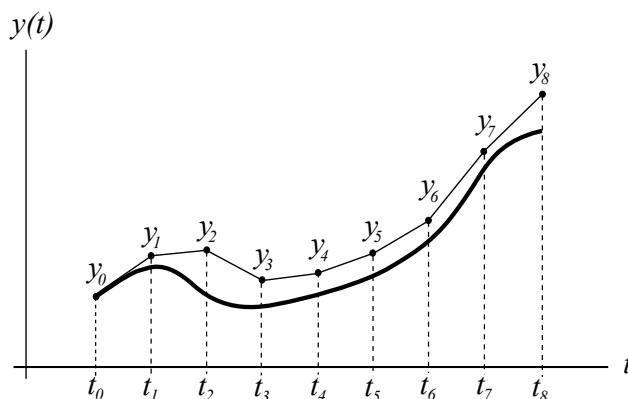


Figura 1.17: Método numérico de Euler

Uma outra maneira de obter o método de Euler e uma forma de avaliar o erro da aproximação é considerar a Fórmula de Taylor⁷ de 1ª ordem para a solução y no ponto (t_k, y_k) . Se f é C^1 , a solução y do problema de valor inicial considerado é C^2 e, portanto, a Fórmula de Taylor em (t_k, y_k) dá

$$y(t_k + h) = y(t_k) + h \dot{y}(t_k) + \frac{h^2}{2} \ddot{y}(t_k^*),$$

onde t_k^* é um ponto entre t_k e $t_{k+1} = t_k + h$. Como $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ e $\ddot{y}(t) = (\partial f / \partial t)(t, y(t)) + (\partial f / \partial y)(t, y(t)) f(t, y(t))$, se as funções f , $\partial f / \partial t$, $\partial f / \partial y$ forem limitadas pode-se obter uma aproximação y_1 arbitrariamente precisa para o valor da solução em t_1 tomando h suficientemente pequeno e calculando $y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$. Aplicando este processo em intervalos sucessivos de largura h obtêm-se aproximações para a solução em pontos sucessivos de um intervalo de tempo que contenha o instante inicial, embora os erros de aproximação se possam acumular de um ponto para o outro. Obtêm-se assim a fórmula de recorrência do método de Euler já descrito acima, mas também se podem estimar os erros de aproximação $E_k = |y(t_k) - y_k|$. De facto, se as funções f , $\partial f / \partial t$, $\partial f / \partial y$ forem limitadas, com $|f|, |\partial f / \partial t|, |\partial f / \partial y| \leq M$, o erro na aproximação do valor $y(t_{k+1})$ satisfaz

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \\ &= \left| y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{(t_k^*, y(t_k^*))} - [y_k + h f(t_k, y_k)] \right| \\ &\leq E_k + h |f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)| + \frac{h^2}{2} M(1+M). \end{aligned}$$

⁷Taylor, Brook (1685-1731).

Do Teorema do Valor Intermédio do cálculo diferencial, para algum ponto y_k^* entre $y(t_k)$ e y_k é

$$|f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t_k, y_k^*) [y(t_k) - y_k] \right| \leq M E_k,$$

pelo que

$$E_{k+1} \leq (1 + Mh)E_k + \frac{h^2}{2} M(1 + M).$$

Como $E_0 = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} E_{k+1} &\leq \left[1 + (1 + Mh) + \cdots + (1 + Mh)^k \right] \frac{h^2}{2} M(1 + M) \\ &= \frac{(1 + Mh)^{k+1} - 1}{(1 + Mh) - 1} \frac{h^2}{2} M(1 + M) = \frac{(1 + M)h}{2} \left[(1 + Mh)^{k+1} - 1 \right] \\ &\leq \frac{(1 + M)h}{2} \left[e^{Mh(k+1)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Assim, num intervalo limitado $[a, b]$ contendo t_0 , para $t_{k+1} \in [a, b]$ verifica-se $(k+1)h \leq b - a$, pelo que o erro na aproximação da solução obtida pelo método de Euler é da ordem de h , isto é, diminui proporcionalmente a h à medida que se tomam valores de h mais pequenos. Isto corresponde a que, quando h é pequeno, diminuindo h para metade o erro diminua para menos de metade.

Resulta do que foi visto que se as funções f , $\partial f / \partial t$, $\partial f / \partial y$ são limitadas, a solução do problema de valor inicial considerado num intervalo limitado contendo t_0 pode ser calculada com a precisão desejada, tomando h suficientemente pequeno.

Acontece que diminuindo o valor de h o cálculo necessário para determinar a solução aproximada aumenta, pois aumenta o número de pontos em que têm de ser calculadas as aproximações. Naturalmente, é conveniente obter métodos que para uma mesma precisão no resultado não necessitem de subdividir o intervalo considerado em tantos subintervalos como no método de Euler. Por outras palavras, é útil obter métodos em que os erros nas aproximações sejam de ordem superior a h quando h é pequeno. Uma possibilidade é usar as aproximações obtidas da Fórmula de Taylor de 2ª ordem, considerando a relação de recorrência

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(t_k, y_k)}.$$

Para este processo de cálculo, a que se chama **método dos três termos da Fórmula de Taylor**, obtém-se um erro de ordem h^2 se f for de classe C^3 , isto é, para h suficientemente pequeno se h é reduzido para metade o erro é reduzido para menos de um quarto. Contudo, a aplicação deste método

exige o cálculo das derivadas parciais $\partial f/\partial t$ e $\partial f/\partial y$.

É possível obter erros da ordem de h^4 com um método significativamente melhor do que os dois anteriores, em que não é necessário calculadas derivadas de f . Esse método, conhecido por **método de Runge-Kutta**⁸, consiste em aproximar a variação da solução num intervalo $]t_k, t_{k+h}[$ não pelo valor do declive da recta tangente à solução que passa por (t_k, y_k) , mas sim por uma média ponderada dos declives das rectas tangentes a soluções que passam em quatro pontos nesse intervalo (Figura 1.18):

1. o ponto $p_{k1} = (t_k, y_k)$,
2. o ponto p_{k2} com 1^a componente no meio do intervalo e ao qual se chega partindo de p_{k1} ao longo da recta de declive $f(p_{k1})$,
3. o ponto p_{k3} com 1^a componente no meio do intervalo e ao qual se chega partindo de p_{k1} ao longo da recta de declive $f(p_{k2})$,
4. o ponto com 1^a componente no extremo direito do intervalo e ao qual se chega partindo de p_{k1} ao longo da recta de declive $f(p_{k3})$.

Nessa média ponderada dá-se o dobro do peso aos dois valores nos pontos a meio do intervalo do que aos dois valores nos extremos do intervalo. Pode-se, inclusivamente, provar que esta é a escolha óptima entre todas as médias ponderadas de quatro declives obtidos no intervalo $]t_k, t_k + h[$ de forma semelhante à indicada. Obtém-se assim a seguinte relação de recorrência

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} [D_{k1} + 2D_{k2} + 2D_{k3} + D_{k4}] ,$$

onde

$$\begin{aligned} D_{k1} &= f(t_k, y_k) & D_{k2} &= f(t_k + h/2, y_k + (h/2)D_{k1}) \\ D_{k3} &= f(t_k + h/2, y_k + (h/2)D_{k2}) & D_{k4} &= f(t_k + h, hD_{k3}) . \end{aligned}$$

O método de Runge-Kutta é muito fácil de aplicar e conduz a um erro da ordem de h^4 . É frequentemente utilizado na resolução numérica de problemas de valor inicial para equações diferenciais.

O cálculo a efectuar nos métodos referidos ainda pode ser reduzido sem prejudicar a precisão final considerando intervalos de comprimentos variáveis: pequenos quando a variação da solução é grande e grandes quando é pequena. Obtém-se assim os chamados **métodos de passo variável**. Em Análise Numérica consideram-se estes e vários outros métodos de resolução numérica de equações diferenciais e analisa-se os respectivos âmbitos de aplicação e propriedades.

⁸Runge, Carl David (1856-1927). Kutta, Martin Wilhelm (1967-1944).

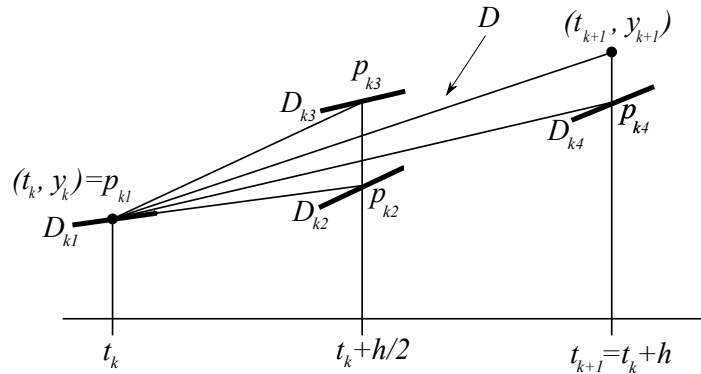


Figura 1.18: Método numérico de Runge-Kutta, com $D_{kj}=f(p_{kj})$ para $j=1, 2, 3, 4$, e $D=(D_{k1}+2D_{k2}+2D_{k3}+D_{k4})/6$

Os métodos anteriores foram considerados apenas para equações escalares da forma $\dot{y}=f(t, y)$, mas aplicam-se sem modificações a equações vectoriais do mesmo tipo em que f é uma função com valores em \mathbb{R}^n e definida num subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

A discussão acima sobre métodos numéricos de resolução de equações diferenciais parte do pressuposto da existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial considerado, e tem implícita a dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais e aos parâmetros na equação, pois caso contrário pequenos erros nos valores iniciais ou nos parâmetros na equação diferencial poderiam resultar em soluções muito diferentes, o que tornaria inúteis os métodos numéricos. Assim, para justificar a validade dos métodos numéricos é preciso esclarecer estas questões do âmbito da teoria qualitativa das equações diferenciais que são consideradas no capítulo seguinte.

1.8 Notas históricas

O termo "equações diferenciais" foi introduzido por G.W. Leibniz em 1676. A resolução de equações diferenciais por integrais foi iniciada por I. Barrow. Em 1687 I. Newton resolveu uma equação diferencial linear.

A resolução de equações diferenciais ordinárias separáveis deve-se a Jacob Bernoulli e a Johann Bernoulli, por volta de 1690. A utilização de factores de integração foi iniciada por Johann Bernoulli em 1692. Em 1740 Clairaut⁹ mostrou que as equações diferenciais ordinárias escalares de 1ª ordem com soluções únicas para problemas de valores iniciais são exactas ou podem ser reduzidas a equações exactas por factores de integração. As equações diferenciais homogêneas de 1ª ordem foram resolvidas por G.W. Leibniz em

⁹Clairaut, Alexis (1713-1765).

1693 e Johann Bernoulli em 1697.

Como se referiu na Introdução, em 1835 J. Liouville estabeleceu que apenas uma classe muito restrita de equações diferenciais pode ser resolvida em termos de funções elementares. Entre 1883 e 1898 C.E. Picard¹⁰ e E. Vessiot¹¹ obtiveram uma condição necessária e suficiente para equações diferenciais lineares poderem ser resolvidas em termos de funções elementares e integrais de funções elementares expressa por propriedades de grupos de Lie que traduzem invariâncias ou simetrias das equações. A prova completa deste resultado veio a ser feita apenas em 1946-48 por e. Kolchin¹².

A equação diferencial considerada no primeiro exemplo da secção 1.6 é um caso particular da equação logística ou equação de Verhulst $\dot{y} = (a-by)y$ introduzida por este matemático em 1846 para descrever a evolução de uma população em resultado da sobreposição de um crescimento proporcional ao número de indivíduos em cada instante e um efeito restritivo ao crescimento associado a recursos limitados consumidos proporcionalmente ao número de indivíduos. As soluções limitadas destas equações são chamadas **curvas logísticas**.

¹⁰Picard, Charles Émile (1856-1941).

¹¹Ernest Vessiot (1865-1952).

¹²Ellis Kolchin(1916-1991).