Capítulo 14

Aplicações da Transformação de Laplace – Resolução de equações diferenciais, análise de sistemas e teoria de controlo

14.1 Introdução

A transformação de Laplace tem amplas aplicações na resolução de equações diferenciais lineares, na teoria dos sistemas e na teoria de controlo.

A principal razão da utilidade da transformação de Laplace na resolução de equações diferenciais, tal como a transformação de Fourier, resulta de transformar equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em equações algébricas, dado que a transformada de Laplace da derivada de uma função f num ponto $s \in \mathbb{C}$ é igual ao produto de s pela transformada de f calculada em s menos $f(0+)$, o limite lateral à direita de f zero. Em comparação com a transformação de Fourier tem a a vantagem de poder ser aplicada a funções não integráveis em $\mathbb{R}^+$ mas cujo produto por uma exponencial decrescente é integrável, o que permite considerar funções que não convergem para zero e até funções que não convergem para zero e, inclusivamente, funções que crescem no infinito menos rapidamente do que exponenciais. Tem ainda a vantagem de ter imediatamente em conta os valores iniciais de problemas de valores iniciais para equações diferenciais.

A utilização da transformação de Laplace em engenharia electrotécnica teve uma ampla generalização a partir de cerca de 1940, em particular em associação com a Análise de Sistemas e a Teoria de Controlo, por permitir um "cálculo operacional" de simples aplicação.

14.2 Transformação de Laplace na resolução de equações diferenciais

A transformação de Laplace é particularmente apropriada para resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares, como os exemplos seguintes ilustram.

(14.1) **Exemplo:** Considera-se o problema de valor inicial $y''+2y'+2y=f(t)$, para $t>0$, com $y(0)=1$, $y'(0)=2$, onde $f(t)=e^{2t}\sin 3t$. Pretende-se determinar uma solução que tenha transformada de Laplace $Y(s)$ para Re s suficientemente grande. Designando a transformada de Laplace de f por F e aplicando a transformação de Laplace à equação diferencial, obtém-se

$$s\,[s\,Y(s)-y(0)]-y'(0)+2\,[s\,Y(s)-y(0)]+2\,Y(s)=F(s)\ ,$$

ou seja

$$(s^2+2s+2)\,Y(s)=y'(0)+2\,y(0)+s\,y(0)+F(s)\ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{y'(0)+2\,y(0)+s\,y(0)+F(s)}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{y'(0)+2\,y(0)+s\,y(0)}{s^2+2s+2}+\frac{F(s)}{s^2+2s+2}\ . \end{aligned} \tag{14.2}$$

Da tabela **??** e da propriedade (**??**.**??**) obtém-se $F(s)=3/[(s-2)^2+9]$. Em consequência,

$$Y(s)=\frac{4+s}{s^2+2s+2}+\frac{3}{(s^2+2s+2)\,[(s-2)^2+9]}\ . \tag{14.3}$$

Para determinar a solução pretendida há que calcular a função y que é C^2 e tem esta transformada de Laplace. A função Y é uma função racional, pelo que tomando $\alpha\in\mathbb{R}$ suficientemente grande $Y\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ e o teorema de inversão de transformadas de Laplace integráveis dá

$$y(t)=\mathfrak{L}_\alpha^{-1}(F)\,(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Omega\to+\infty}\int_{\alpha-\Omega}^{\alpha+\Omega}Y(s)\,e^{st}\,ds\ ,\quad t>0\ . \tag{14.4}$$

A função $s\,Y(s)\,e^{st}$ é meromorfa em $\mathbb{C}$ e tem pólos nos pontos $-1\pm i$, $2\pm 3i$, todos de ordem 1 e com resíduos, respectivamente,

$$\pm\frac{1}{2i}\left[3\pm i+\frac{3}{(-3\pm i)^2+9}\right]e^{(-1\pm i)t}\ ,\quad \pm\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(2\pm 3i)^2+2(2\pm 3i)+2}\right]e^{(2\pm 3i)t}.$$

Toma-se $\alpha>2$ e considera-se o caminho fechado em $\mathbb{C}$ correspondente a

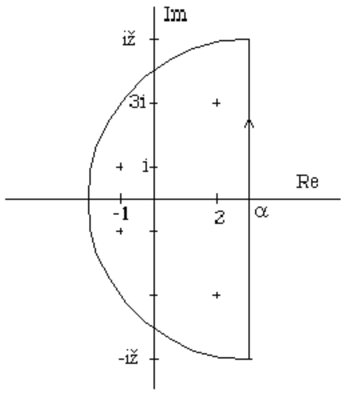

Figura 14.1: Caminho de integração para inversão da transformada de Laplace da solução de $y''+2y'+2y=e^{2t}\sin 3t$, $t>0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

concatenar o segmento de recta vertical $\{\alpha+i\omega : -\Omega\leq\omega\leq+\Omega\}$ percorrido de baixo para cima, com a semicircunferência de raio $\Omega>0$ e centro no ponto α com pontos de parte real inferior a α (Figura 14.1). Do Teorema dos Resíduos sabe-se que o integral de $s\,Y(s)\,e^{st}$ ao longo deste caminho a dividir por $2\pi i$ é igual à soma dos quatro resíduos desde que se tome $\Omega>\max\{\,|\alpha+1-i|,|\alpha-2-3i|\}$, pois então os quatro pólos pertencem à região limitada pelo caminho considerado. Por outro lado, é claro de (14.3) que em pontos da semicircunferência considerada, os quais são da forma $s=\alpha+\Omega e^{i\theta}$ com $\pi/2<\theta<3\pi/2$, verifica-se[1]

$$\left|Y(s)\,e^{st}\right|=\left|Y\Big(\alpha+\Omega\,e^{i\theta}\Big)\exp\Big[\Big(\alpha+\Omega\,e^{i\theta}\Big)t\Big]\right|\leq\left|Y\Big(\alpha+\Omega\,e^{i\theta}\Big)\right|e^{\alpha t}e^{\Omega t\cos\theta}.$$

Designando $M(\Omega)=\max_{\theta\in[\pi/2,3\pi/2]}\left|Y(\alpha+\Omega\,e^{i\theta})\right|$, obtém-se a seguinte estimativa para o valor absoluto do integral sobre a semicircunferência

$$\left|\int Y(s)\,e^{st}\,ds\right|\leq M(\Omega)\,e^{\alpha t}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{\Omega t\cos\theta}\,\Omega\,d\theta=M(\Omega)\,e^{\alpha t}\int_0^{\pi}e^{-\Omega t\sin\theta}\,\Omega\,d\theta\,.$$

Notando que para $\theta\in[0,\pi/2]$ é $\sin\theta\geq 2\theta/\pi$ e para $\theta\in[\pi/2,\pi]$ é $\sin\theta=\sin(\pi-\theta)\geq 2(\pi-\theta)/\pi$, obtém-se

$$\int_0^{\pi}e^{-\Omega t\sin\theta}\Omega\,d\theta=\int_0^{\pi/2}e^{-\Omega t\,2\theta/\pi}\Omega\,d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}e^{-\Omega t\,2(\pi-\theta)/\pi}\Omega\,d\theta=\frac{\pi}{t}\big(1-e^{-\Omega t}\big)\leq\frac{\pi}{t}\,.$$

Como $M(\Omega)\to 0$ quando $\Omega\to+\infty$, concluiu-se que para cada $t\geq 0$ o integral sobre a semicircunferência tende para zero quando $\Omega\to+\infty$. Logo, o lado

[1] O argumento seguinte corresponde à aplicação de um resultado conhecido por **Lema de Jordan** que é usual considerar em Análise Complexa a propósito da aplicação do Teorema dos Resíduos para cálculo de integrais impróprios de funções reais.

direito da fórmula em (14.4) é igual à soma dos resíduos acima obtidos. Notando que os resíduos considerados ocorrem em pares conjugados, conclui-se que a solução (Figura 10.5) é igual à soma das partes reais dos quatro resíduos, isto é,

$$y(t)=\left(1+\frac{18}{325}\right)e^{-t}\cos t+\left(3+\frac{51}{325}\right)e^{-t}\sin t-\frac{18}{325}\,e^{2t}\cos 3t+\frac{1}{325}\,e^{2t}\sin 3t\,.$$

Para justificar que esta função é a solução do problema resta apenas observar que tem transformada de Laplace $Y(s)$ para Re $s>2$, ou seja que $t\mapsto y(t)\,e^{-\alpha t}$ é integrável em $\mathbb{R}^+$ para $\alpha>2$, o que é fácil de verificar.

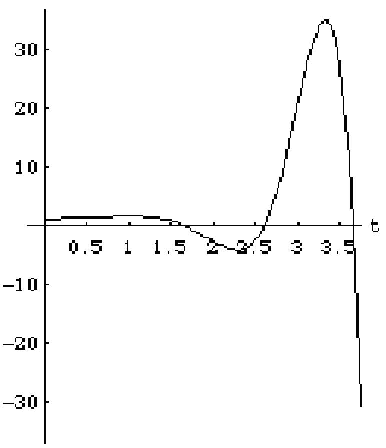

Figura 14.2: Solução do problema de valor inicial
$y''+2y'+2y=e^{2t}\sin 3t,\ t>0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$

O exemplo anterior ilustra duas das vantagens da transformação de Laplace na resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias em comparação com os métodos directos considerados em capítulos anteriores: pode-se resolver directamente uma equação nãohomogénea sem resolver primeiro a equação homogénea correspondente e depois calcular uma solução particular da equação nãohomogénea, e obtém-se directamente a solução correspondente às condições iniciais consideradas sem ter de ajustar constantes de integração aos valores das condições iniciais. Um outro aspecto ilustrado no exemplo anterior é o da utilidade de métodos de Análise Complexa, em particular o Teorema de Resíduos, no cálculo de transformadas de Laplace inversas. Contudo, no caso considerado, o recurso à Análise Complexa pode ser facilmente evitado, como se mostra a seguir.

(14.5) **Exemplo:** Considera-se o mesmo problema do exemplo anterior, onde se verificou que a transformada de Laplace Y da solução deve satisfazer a fórmula (14.3). No exemplo referido, a solução foi determinada aplicando o Teorema dos Resíduos para calcular o integral de inversão da transformação de Laplace em (14.4). Vamos mostrar agora como se poderia obter a solução sem recurso à Análise Complexa. A função Y pode ser decomposta em fracções parciais na forma

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{(4+s)\big[(s-2)^2+9\big]+3}{(s+1-i)\,(s+1+i)\,(s-2-3i)\,(s-2-3i)} \\
&= \frac{A}{s+1-i}+\frac{B}{s+1+i}+\frac{C}{s-2-3i}+\frac{D}{s-2+3i}\,,
\end{aligned} \tag{14.6}
$$

onde as constantes A, B, C, D são determinadas igualando os numeradores das duas últimas expressões para Y depois de considerar a segunda expressão na forma de uma fracção com denominador igual ao da primeira expressão, e calculando-os nos pólos de Y, o que dá sucessivamente nos pólos $-1+i$, $-1-i$, $2+3i$, $2-3i$

$$
\begin{aligned}
(3+i)\,\big[(-3+i)^2+9\big]+3 &= A\,2i\,\big[(-3+i)^2+9\big] \\
(3-i)\,\big[(-3-i)^2+9\big]+3 &= -B\,2i\,\big[(-3-i)^2+9\big] \\
3 &= C\big[(3+3i)^2+1\big]6i \\
3 &= -D\big[(3+3i)^2+1\big]6i\,.
\end{aligned}
$$

É fácil observar que as duas primeiras equações são conjugadas uma da outra e o mesmo acontece com as duas últimas equações, pelo que A e B são complexos conjugados e C e D também. Assim, as constantes na decomposição de $Y(s)$ em fracções parciais (14.6) são

$$
A=\overline{B}=\frac{343-1026i}{650}\,,\quad C=\overline{D}=\frac{-18-i}{650}\,.
$$

Da linearidade da transformação de Laplace, da tabela **??** e da unicidade de transformada de Laplace obtém-se a solução do problema de valor inicial considerado na forma

$$
y(t)=A\,e^{(-1+i)t}+B\,e^{(-1-i)t}+C\,e^{(2+3i)t}+D\,e^{(2-3i)t}\,.
$$

Uma vez que os dois primeiros termos são complexos conjugados, assim como os dois últimos, a expressão anterior dá um número real igual ao dobro das partes reais do primeiro e do terceiro termo. Logo, a solução satisfaz

$$
y(t)=\frac{343}{325}\,e^{-t}\cos t+\frac{1026}{325}\,e^{-t}\sin t-\frac{18}{325}\,e^{2t}\cos 3t+\frac{1}{325}\,e^{2t}\sin 3t\,,\quad t\geq 0\,.
$$

É fácil verificar que esta fórmula é igual à obtida no exemplo anterior para a solução do problema de valor inicial considerado.

Observa-se que o método de inversão da transformada de Laplace da solução do problema do exemplo anterior, baseado na decomposição de uma função racional em fracções parciais, na tabela de transformadas de Laplace, nas propriedades gerais da transformação e na unicidade de transformada de Laplace, é mais elementar do que o método usado no exemplo (14.1) que se baseia na inversão da transformação de Laplace calculada pelo valor principal de Cauchy de um integral impróprio e no Teorema dos Resíduos. Contudo, nem sempre é esse o método que resulta num cálculo mais curto. A escolha do método a utilizar depende do problema a resolver.

A transformação de Laplace também tem a vantagem de ser muito prática na resolução de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em que o termo independente é uma função seccionalmente contínua. Para considerar equações deste tipo é necessário modificar ligeiramente a definição de solução da equação diferencial, enfraquecendo a exigência de todas as derivadas da solução que aparecem na equação serem contínuas, de forma a que a derivada de ordem mais elevada seja seccionalmente contínua e possa ter descontinuidades por salto. O exemplo seguinte ilustra uma situação deste tipo.

(14.7) **Exemplo:** Considera-se o mesmo problema dos dois exemplos anteriores, excepto que o termo independente na equação é agora o impulso $f(t)=1$ se $0\le t<T$ e $f(t)=0$ se $t\ge T$. No exemplo (14.1) verificou-se que a transformada de Laplace Y da solução deve satisfazer a fórmula (14.2). Como $f(t)=1-H_T(t)$, onde H_T designa a função de Heaviside em T, da linearidade da transformação de Laplace, da tabela **??** e da propriedade (**??**.**??**) obtém-se para transformada de Fourier de f a função $F(s)=(1/s)[1-e^{-sT}]$. Em consequência,

$$Y(s)=\frac{4s+s^2+1-e^{-sT}}{s(s^2+2s+2)}=\frac{4s+s^2+1}{s(s+1-i)(s+1+i)}-\frac{e^{-sT}}{s(s+1-i)(s+1+i)}\,.$$

Designa-se por $Y_1(s),Y_2(s)$ respectivamente a primeira e a segunda fracção no lado direito da última igualdade. Da linearidade da transformação de Laplace, para determinar uma função y com transformada de Laplace $Y=Y_1-Y_2$ determinam-se funções y_1,y_2 com transformadas de Laplace Y_1,Y_2, respectivamente.

A função $s\mapsto Y_1(s)\,e^{st}$ é meromorfa e tem pólos nos pontos $0,-1\pm i$, todos de ordem 1 e com resíduos, respectivamente,

$$\frac{1}{2}\,,\quad \pm\frac{1}{2i}\left(3\pm i+\frac{1}{-1\pm i}\right)e^{(-1\pm i)t}.$$

Sabe-se do exemplo (14.1) que y_1 pode ser calculada com a fórmula de inversão da transformada de Laplace (14.4) com Y substituída por Y_1 e é igual à soma dos resíduos considerados. Assim, como os dois últimos resíduos são conjugados e o primeiro é 1/2, a solução é igual a 1/2 mais o dobro da parte real de um dos últimos resíduos, nomeadamente

$$y_1(t) = \frac{1}{2} \pm \mathrm{Re}\, \frac{(5 \pm i)\, e^{(-1\pm i)t}}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t}\cos t + \frac{5}{2}\, e^{-t}\sin t\ .$$

Por outro lado, $Y_2(s)=e^{-sT}Z(s)$ com $Z(s)=1/[s(s+1-i)(s+1+i)]$. Da propriedade (**??.??**) sabe-se que $y_2(t) = H_T(t)\, z(t-T)$, onde z tem transformada de Laplace Z. A função $s \mapsto Z(s)\, e^{st}$ é meromorfa e tem pólos nos pontos $0, -1\pm i$, todos de ordem 1 e com resíduos respectivamente $1/2$, $\pm e^{(-1\pm i)t}/[2i(-1\pm i)]$. Pelas mesmas razões que no cálculo de y_1 conclui-se que $z(t)$ é a soma destes resíduos. Como os dois últimos resíduos são conjugados, é

$$z(t) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\, \frac{(-1\pm i)\, e^{(-1\pm i)t}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}\, e^{-t}\sin t\ .$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) = y_1(t)-y_2(t) = y_1(t)-H_T(t)\, z(t-T) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t}\cos t + \frac{5}{2}\, e^{-t}\sin t \\ &- H_T(t)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-(t-T)}\cos(t-T) - \frac{1}{2}\, e^{-(t-T)}\sin(t-T)\right]. \end{aligned}$$

Para justificar que esta função é a solução do problema resta apenas observar que tem transformada de Laplace $Y(s)$ para $\mathrm{Re}\, s>0$, ou seja que $t\mapsto y(t)\, e^{-\alpha t}$ é integrável em $\mathbb{R}^+$ para $\alpha>0$, o que é fácil verificar.

A solução obtida, para $t\geq 0$ pode também ser escrita na forma (Figura 14.3)

$$y(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\big(1+e^{-t}\cos t+5e^{-t}\sin t\big) & ,\ t<T \\ \frac{1}{2}\big(e^{-t}\cos t+5e^{-t}\sin t+e^{-(t-T)}\cos(t-T)+e^{-(t-T)}\sin(t-T)\big), & t\geq T\ . \end{cases}$$

É claro que uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes e termo independente definido por uma função seccionalmente contínua, como é o caso da equação considerada no exemplo anterior, pode ser resolvida pelos métodos gerais de resolução de equações lineares com termos independentes contínuos que foram considerados em capítulos anteriores, considerando problemas de valor inicial sucessivos em cada um dos intervalos de continuidade do termo independente e tomando como valores iniciais em cada intervalo os valores finais calculados para a solução no intervalo anterior (com a excepção óbvia do primeiro intervalo em que as condições iniciais consideradas são as dadas para o problema de valor inicial). A vantagem da transformação de Laplace nestas circunstâncias está

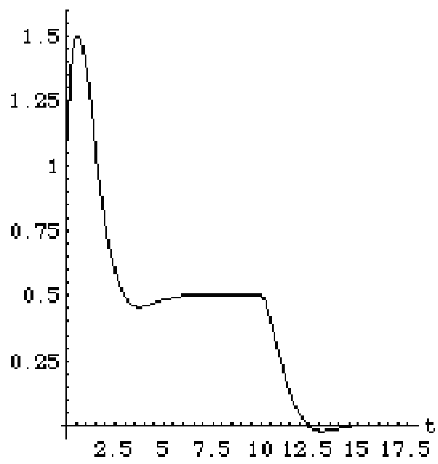

Figura 14.3: Gráficos de f e da solução de $y''+2y'+2y=f(t)$, $t>0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $f(t)=1$ se $0\leq t<T$ e $f(t)=0$ se $t\geq T$

em permitir obter directamente a solução sem ser necessário decompor o problema na resolução de problemas em intervalos sucessivos.

Considera-se agora um exemplo de aplicação da transformação de Laplace na resolução de um problema de valor inicial para uma equação diferencial parcial.

(14.8) **Exemplo:** Pretende-se resolver o problema de valor inicial para a equação do calor na semirecta real $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = c\,, \;\; \lim_{x\to+\infty} u(t,x)=0\,, \quad u(0,x)=0\,,$$

para $x,t>0$, onde $k>0$, $c\in\mathbb{R}$ são constantes. A condição na fronteira corresponde a considerar um fluxo de calor constante na fronteira.

Procuram-se soluções u definidas em $\mathbb{R}^+\cup\{0\}\times\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ aplicando a transformação de Laplace. Os cálculos são efectuados supondo que tudo corre bem com as transformadas de Laplace, a aplicação das suas propriedades gerais e a troca de derivadas com integrais. No final obtém-se uma função candidata para solução do problema, mas tem de se verificar a validade de todos os passos intermédios. Para garantir que se trata da solução do problema verifica-se directamente que a função obtida satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais e de fronteira.

Para cada $x>0$ fixo designa-se a transformada de Laplace de $t\mapsto u(t,x)$

por $U(s,x)$. Aplicando a transformação de Laplace obtém-se

$$(14.9) \qquad s\,U(s,x) = k\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(s,x)\,, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(s,0) = \frac{c}{s}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} U(s,x) = 0\,,$$

desde que seja válido aplicar a regra de Leibniz para trocar as derivadas $\partial/\partial x$ e $\partial^2/\partial x^2$ com o integral que define a transformada de Laplace de u. Procura-se agora obter a solução da última equação diferencial ordinária por outra transformação de Laplace. Assim, designando a transformada de Laplace de $x \mapsto U(s,x)$ por $\sigma\,V(s,\sigma)$, obtém-se

$$s\,V(s,\sigma) = k\,\sigma^2 V(s,\sigma) - k\,U(s,0) - k\,\frac{\partial U}{\partial x}(s,0)\,.$$

Segue-se que $V(s,\sigma) = [\sigma\,U(s,0) + c/s]/[\sigma^2 - s/k]$. Invertendo esta transformada de Laplace com base na linearidade, na tabela **??** e na propriedade da transformada de Laplace da convolução, obtém-se

$$U(s,x) = \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,x\right) U(s,0) + \frac{c}{s}\sqrt{\frac{k}{s}}\,\sinh\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,x\right).$$

Como tem de ser $\lim_{x\to+\infty} U(s,x) = 0$, segue-se $U(s,0) = -(c/s)\sqrt{k/s}$, pelo que

$$U(s,x) = \frac{c}{s}\sqrt{\frac{k}{s}}\left[\sinh\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,x\right) - \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,x\right)\right] = -\frac{c}{s}\sqrt{\frac{k}{s}}\,e^{-x\sqrt{s/k}}\,.$$

Para obter $u(t,x)$ há que inverter a transformada de Laplace $U(s,x)$.

Das propriedades (**??**.**??**) e (**??**.**??**), definindo $V(s) = e^{-\sqrt{s}}/\sqrt{s}$ e designando por v a função diferenciável com transformada de Laplace igual a V obtém-se $U(s,x) = -(cx/s)\,V(x^2 s/k)$ e

$$(14.10) \qquad u(t,x) = -\frac{ck}{x}\int_0^t v\left(\frac{k\tau}{x^2}\right) d\tau\,.$$

Do teorema de inversão de transformadas de Laplace integráveis (**??**), obtém-se para $\alpha > 0$ suficientemente grande

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\Omega\to+\infty}\int_{\alpha-i\Omega}^{\alpha+i\Omega} \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\,e^{st}\,ds\,.$$

O limite do último integral pode ser calculado com métodos de Análise Complexa, nomeadamente o Teorema dos Resíduos. Calcula-se, assim, o integral sobre a curva fechada simples do plano complexo esboçada na Figura 14.4 e considera-se o limite quando $\epsilon \to 0$, $r \to 0$ e $R \to +\infty$. Como a função integranda é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e a origem não está contida na região do

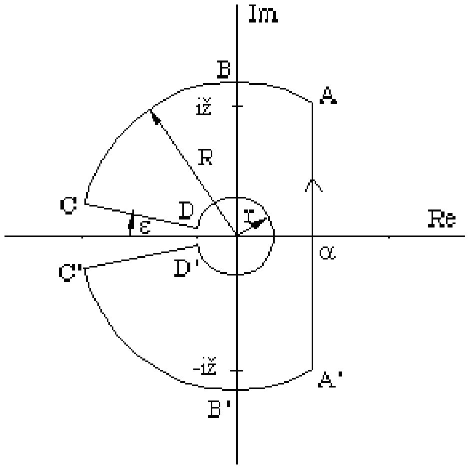

Figura 14.4: Caminho de integração para inversão da transformação de Laplace da função v que dá a solução (14.10) de $\partial u/\partial t = k\,\partial^2 u/\partial x^2$, $(\partial u/\partial x)(t,0) = c$, $\lim_{x\to+\infty} u(t,x) = 0$

plano limitada pela curva fechada considerada, o Teorema dos Resíduos implica que o integral sobre o caminho considerado é igual a zero. Designando por I_{XY} o integral sobre a parte do caminho dos pontos X a Y e observando que $v(t)$ é o limite quando $\epsilon \to 0, r \to 0, R \to +\infty$ de $I_{A'A}/(2\pi i)$, conclui-se que $v(t)$ pode ser calculado por esse limite de $-I_{AA'}/(2\pi i)$, onde $I_{AA'}$ é calculado pela soma dos integrais sobre os diferentes troços do caminho de A a A' identificados na Figura 14.4.

No arco AC verifica-se

$$\left| \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\, e^{st} \right| = \frac{e^{\mathrm{Re}\left(st-\sqrt{s}\right)}}{\sqrt{R}} \le \frac{e^{\,t\,\mathrm{Re}\,s}}{\sqrt{R}}\,.$$

Como no arco AB é $e^{\,t\,\mathrm{Re}\,s} \le e^{t\alpha}$, resulta

$$|I_{AB}| \le \int_{AB} \left| \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\, e^{st} \right| ds \le \frac{e^{t\alpha}}{\sqrt{R}}\, |AB|\,,$$

onde $|AB|$ designa o comprimento do arco AB. Como $\lim_{R\to+\infty} |AB| = \alpha$, obtém-se $\lim_{R\to+\infty} |I_{AB}| = 0$. De forma semelhante pode-se concluir que $\lim_{R\to+\infty} |I_{B'A'}| = 0$. Por outro lado, no arco BC obtém-se

$$|I_{BC}| \le \int_{BC} \left| \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\, e^{st} \right| ds \le \int_{BC} \frac{e^{\,t\,\mathrm{Re}\,s}}{\sqrt{R}}\, ds = \int_{\pi/2}^{\pi-\epsilon} \frac{e^{\,t\,R\cos\theta}}{\sqrt{R}}\, R\, d\theta\,.$$

Com a mudança de variável de integração $\theta = \varphi + \pi/2$ e a majoração

$\sin\varphi > 2\varphi/\pi$ válida para $0<\varphi<\pi/2$, resulta

$$|I_{BC}| \le \sqrt{R}\int_0^{\pi/2-\epsilon} e^{-tR\sin\varphi}\,d\varphi < \sqrt{R}\int_0^{\pi/2-\epsilon} e^{-2tR\varphi/\pi}\,d\varphi$$
$$= \frac{\pi\sqrt{R}}{2tR}\Big(1-e^{-tR(\pi-2\epsilon)/\pi}\Big).$$

Logo, $\lim_{R\to+\infty}|I_{BC}|=0$ e analogamente $\lim_{R\to+\infty}|I_{C'B'}|=0$.

No arco CD verifica-se

$$I_{CD} = \int_R^r \frac{\exp\left(-\sqrt{\rho}\,e^{i(\pi-\epsilon)/2}\right)}{\sqrt{\rho}\,e^{i(\pi-\epsilon)/2}}\ \exp\Big(t\,\rho\,e^{i(\pi-\epsilon)}\Big)e^{i(\pi-\epsilon)}\,d\rho\,.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para $\epsilon\to 0$ e fazendo $r\to 0$ e $R\to+\infty$ obtém-se

$$I_{CD} \to -\int_{+\infty}^0 \frac{e^{-i\sqrt{\rho}}}{i\sqrt{\rho}}\ e^{-t\rho}\,d\rho = -i\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t\rho}}{\sqrt{\rho}}\ \cos\sqrt{\rho}\ d\rho\,.$$

A mudança de variáveis de integração $\tau=\sqrt{\rho}$ dá

$$I_{CD} \to -2i\int_0^{+\infty} e^{-t\tau^2}\cos\tau\,d\tau = -i\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2}e^{-i\tau}\,d\tau = -i\sqrt{\frac{\pi}{t}}\ e^{-1/(4t)}\,,$$

onde na última igualdade foi usada a fórmula para a transformada de Fourier da função $\tau\mapsto e^{-t\tau^2}$ estabelecida no exemplo (**??**.**??**). De forma análoga obtém-se que $I_{D'C'}$ tende para o mesmo valor.

No arco DD' verifica-se

$$I_{DD'} = i\int_{\pi+\epsilon}^{-\pi-\epsilon}\frac{\exp\left(-\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}\right)}{\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}}\ \exp\Big(tr\,e^{i\theta}\Big)\,r\,e^{i\theta}\,d\theta$$
$$= i\int_{\pi+\epsilon}^{-\pi-\epsilon}\sqrt{r}\ \exp\Big(tr\,e^{i\theta}-\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}+i\theta\Big)\,d\theta\,.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtém-se $\lim_{r\to 0} I_{DD'} = 0$.

Em suma, os integrais sobre todos os troços do caminho de A a A' tendem todos para zero, com excepção dos integrais sobre os arcos CD e $D'C'$ que tendem ambos para $-i\sqrt{\pi/t}\,e^{-1/(4t)}$, pelo que $v(t)=-e^{-1/(4t)}/\sqrt{\pi t}$ e segue-se de (14.10) que

$$u(t,x) = -c\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-x^2/(4k\tau)}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\,. \tag{14.11}$$

Esta fórmula define uma função contínua em $\mathbb{R}^+\cup\{0\}\times\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, pois a função integranda é majorada pela função $\tau\mapsto 1/\sqrt{\tau}$ que é integrável em cada intervalo $]0,t[$ para $t>0$. Resta verificar que esta função satisfaz todas as condições do problema. É claro que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -c\sqrt{\frac{k}{\pi}}\,\frac{e^{-x^2/(4kt)}}{\sqrt{t}}\,, \quad t,x>0\,.$$

Por outro lado, a regra de Leibniz pode ser aplicada para calcular as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial^2 u/\partial x^2$, obtendo-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -c\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{-2x\,e^{-x^2/(4k\tau)}}{4k\tau\sqrt{\tau}}\,d\tau\,, \quad t,x>0\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= -c\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{-2\left(1-\frac{2x^2}{4k\tau}\right)e^{-x^2/(4k\tau)}}{4k\tau\sqrt{\tau}}\,d\tau \\ &= -c\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e^{-x^2/(4k\tau)}}{k\sqrt{\tau}}\right)d\tau = -c\,\frac{e^{-x^2/(4kt)}}{\sqrt{k\pi t}}\,, \quad t,x>0\,.\end{aligned}$$

Assim, verifica-se $\partial u/\partial t = k\,\partial^2 u/\partial x^2$ em $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ e $u(0,x)=0$ para $x>0$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue a (14.11) conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} u(t,x)=0$, para $t>0$. Resta verificar que $\lim_{x\to 0}(\partial u/\partial x)(t,x)=c$. Este limite não pode ser obtido directamente do integral acima para $(\partial u/\partial x)(t,x)$, $t,x>0$, pois não é possível majorar a função integranda por uma função integrável independente de x. Na verdade, a função $\tau\mapsto 1/(\tau\sqrt{\tau})$ não é integrável no intervalo $]0,t[$ para $t>0$. Contudo, com a substituição de variáveis de integração $\lambda=x/\sqrt{4k\tau}$ na fórmula (14.11) e, depois, integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}u(t,x) &= -c\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-x^2/(4k\tau)}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \frac{-cx}{\sqrt{\pi}}\int_{x/\sqrt{4kt}}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}\,d\lambda \\ &= \frac{-c}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{4kt}\,e^{-x^2/(4kt)} - 2x\int_{x/\sqrt{4kt}}^{+\infty} e^{-\lambda^2}d\lambda\right].\end{aligned}$$

Derivando em ordem a x obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{-c}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{-x}{\sqrt{kt}}\,e^{-x^2/(4kt)} - 2\int_{x/\sqrt{4kt}}^{+\infty} e^{-\lambda^2}d\lambda + \frac{x}{\sqrt{kt}}\,e^{-x^2/(4kt)}\right] \\ &= \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_{x/\sqrt{4kt}}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda\,.\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = c\,.$$

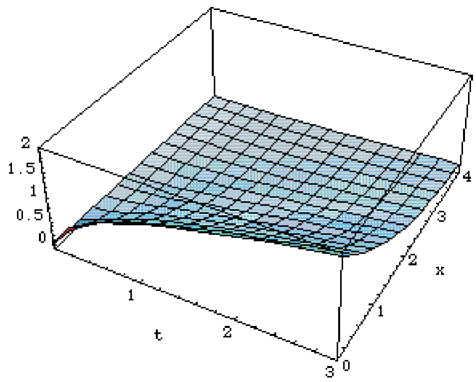

Figura 14.5: Solução da equação do calor em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, com $(\partial u/\partial x)(t,0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} u(t,x) = 0$, $u(0,x) = 0$

Ficou provado que a função u em (14.11) (Figura 14.5) é solução do problema considerado. Para ver que se trata da única solução pode-se aplicar o Princípio de Máximo Forte (**??**) e o teorema (**??**), como se fez para o teorema (**??**).

14.3 Transformação de Laplace na análise e controlo de sistemas

Um outro aspecto interessante da aplicação da transformação de Laplace a equações diferenciais lineares de coeficientes constantes também pode ser ilustrado com a equação dos exemplos anteriores

$$y'' + 2y' + 2y = f(t) \;,$$

mas sem especificar as condições iniciais nem a função f, a qual é no entanto suposta ter transformada de Laplace. Viu-se no exemplo considerado que a aplicação da transformação de Laplace à equação conduz à fórmula (14.2)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{y'(0)+2\,y(0)+s\,y(0)}{s^2+2s+2} + \frac{F(s)}{s^2+2s+2} \\ &= T(s)\left[y'(0)+2\,y(0)+s\,y(0)\right] + T(s)\,F(s) \;, \end{aligned}$$

onde

$$T(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} \;.$$

Assim, tanto a influência do termo independente como das condições iniciais na solução traduzem-se em transformadas de Laplace por produtos pela função T. Esta função caracteriza o comportamento do sistema e, à semelhança de quando se usam transformadas de Fourier, é conhecida por **função de transferência** do sistema linear definido pela equação diferencial, sendo usual considerar a função f como a **entrada** do sistema e a solução y como a **saída** do sistema (Figura 14.6).

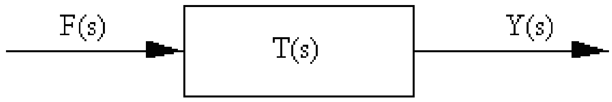

Figura 14.6: Esquema de sistema linear com indicação de função de transferência

Como a transformada de Laplace da convolução de funções é o produto das transformadas das funções, se h é tal que $\mathfrak{L}[h] = T$, da unicidade de transformadas de Laplace obtém-se para a solução com condições iniciais nulas

$$y(t) = (h*f)(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau\,, \quad t \geq 0\,.$$

No caso presente, $T(s) = 1/[(s+1)^2+1]$ e, da tabela **??** e da propriedade (**??**.**??**), obtém-se

$$h(t) = e^{-t} \sin t\,, \quad t \geq 0\,.$$

Figura 14.7: Impulso estreito com início na origem com integral igual a 1 (largura L pequena)

De forma semelhante à do capítulo anterior a propósito da aplicação da transformação de Fourier a sistemas lineares, pode-se procurar identificar funções de entrada do sistema que produzam a saída h. Tomando para entrada impulsos positivos de suportes em $[0, L]$, com $L > 0$, e integrais iguais a 1, como por exemplo acontece com $f_L(t) = 1/L$ para $0 \leq t < L$, e $f_L(t) = 0$ para $t \geq L$ (Figura 14.7), obtém-se a saída do sistema

$$y_L(t) = (h*f_L)(t) = \frac{1}{L}\int_0^L h(t-\tau)\, d\tau\,, \quad t \geq 0\,.$$

Como a função h é contínua, fazendo $L \to 0$ obtém-se

$$\lim_{L\to 0+} y_L(t) = \lim_{L\to 0+} (h{*}f_L)\,(t) = h(t)\,, \quad t \geq 0\ .$$

Assim, as respostas do sistema a impulsos como os indicados com larguras tendendo para zero aproximam-se, em cada instante $t>0$, de $h(t)$. Por esta razão chama-se a h a **resposta impulsiva** do sistema linear considerado (Figura 14.8).

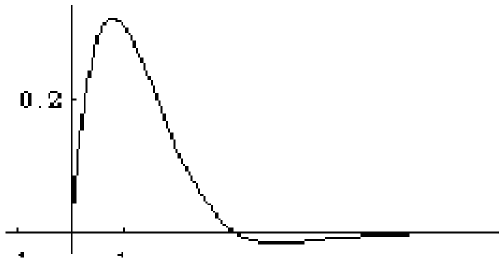

Figura 14.8: Resposta impulsiva h do sistema com função de transferência $T(s)=1/(s^2+2s+2)$

As considerações a propósito do sistema linear definido pela equação diferencial dos exemplos anteriores aplicam-se em geral a sistemas definidos por equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. Por esta razão a transformação de Laplace, tal como a transformação de Fourier, é de grande utilidade na análise de sistemas lineares.

14.4 Notas históricas

No final do capítulo anterior encontram-se notas históricas relativas ao desenvolvimento da transformação de Laplace.

A primeira razão do desenvolvimento da transformação de Laplace foi para resolução de equações diferenciais. Como se refere nas notas históricas do capítulo anterior, as raízes da transformação de Laplace encontram-se no trabalho de L. Euler, principalmente em 1737, 1760, 1763 e 1768-69 para obter soluções de equações diferenciais de 2ª ordem em termos de integrais da forma $\int_a^b f(t)\, e^{-st} dt$, em que b pode ser $+\infty$. Em 1759-62 J.L. Lagrange utilizou uma transformação integral a propósito equação das ondas para a propagação de som, transformado esta equação diferencial parcial numa equação diferencial ordinária. Em 1782 P.S. Laplace começou a considerar fórmulas integrais dos tipos referidos para expressar soluções de equações diferenciais no espírito introduzido por Euler, e em 1810 tinha avançado substancialmente a aplicação de transformações integrais a equações às diferenças e a equações diferenciais.

Em 1823 e 1827, Cauchy desenvolveu métodos de análise complexa para inversão de transformadas integrais na resolução de equações diferenciais parciais, e em 1825 e 1845 considerou métodos de "cálculo operacional" relacionados para resolver equações diferenciais, embora este tipo de métodos já tivesse sido usado anteriormente. Em 1832, J. Liouville aplicou a transformação de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem da forma $(mt^2+nt+p)y''+(qt+r)y'+sy=0$. Em 1837 R. Lobatto[2] utilizou a transformação de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias das formas $y^{(n)}-ty=0$ e $y''+abt^ny=0$. J. Petzval desenvolveu consideravelmente a transformação de Laplace para resolução de equações diferenciais com início em 1833 mas de forma continuada até 1859, com o primeiro artigo por ele publicado sobre o assunto em 1847. Os livros de Petzval não só avançaram significativamente a aplicação da transformação de Laplace à resolução de equações diferenciais, como constituíram uma agregação do conhecimento anterior sobre o assunto num texto que, por isso mesmo, foi muito influente para os desenvolvimentos subsequentes.

Em 1880 H. Poincaré considerou a transformação de Laplace como função de variável complexa e introduziu a utilização geral de integrais de contorno associados à transformação de Laplace para resolução de equações diferenciais.

Entre 1880 e 1887 O. Heaviside desenvolveu um cálculo operacional para resolver equações diferenciais ordinárias por equações algébricas obtidas por substituição da solução por uma função complexa e as derivadas por produtos pela variável complexa que foi muito utilizado na análise de circuitos em engenharia electrotécnica até cerca de 1940, embora não estivesse legitimado rigorosamente. Contudo, até por esta mesma razão, este trabalho teve grande influência na contribuição de vários matemáticos com o objectivo de dar bases rigorosas para um cálculo considerado tão útil em engenharia. Uma das contribuições mais influentes nesta direcção foi de S. Pincherle, com início em 1887.

Em 1895 L. Schlesinger[3] aplicou a transformação de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias lineares homogéneas de ordem n com coeficientes polinomiais.

Em 1910 H. Bateman iniciou a aplicação sistemática da transformação de Laplace directamente a equações diferenciais ordinárias lineares transformando-as em equações algébricas.

A adopção da transformação de Laplace na rotina de formação e de utilização prática em engenharia, principalmente em relação com a análise de sistemas e a teoria de controlo generalizou-se a partir de 1940 e em 1947 já era amplamente aplicada e ensinada a estudantes de engenharia.

[2] Lobatto, Rehuel (1797-1866).
[3] Schlesinger, Ludwig (1864-1933).