Capítulo 13

Transformação de Laplace

13.1 Introdução

A utilização da transformação de Fourier na resolução de equações diferenciais está limitada por se aplicar a funções integráveis em $\mathbb{R}$, o que exige que as funções decresçam para zero suficientemente rapidamente em $\pm\infty$. Contudo, é frequentemente necessário considerar equações diferenciais com soluções em que isso não acontece. Esta limitação pode ser ultrapassada até certo ponto pela consideração de uma outra transformação — a transformação de Laplace. Esta transformação é definida de maneira semelhante à transformação de Fourier, mas considerando integrais em $\mathbb{R}^+$ em vez de $\mathbb{R}$ e definindo uma função de variável complexa. A primeira opção elimina as exigências associadas ao decrescimento da função em $-\infty$ e a segunda opção permite considerar funções que até podem crescer em $+\infty$ desde que o crescimento não seja superior ao de todas as funções exponenciais $t \mapsto e^{\alpha t}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Pelo facto de considerar integrais em $\mathbb{R}^+$ a transformação de Laplace é particularmente apropriada em problemas de valor inicial para equações diferenciais para a determinação de soluções no intervalo de tempo que se segue ao instante inicial, enquanto a transformação de Fourier é mais adequada para problemas de valores na fronteira.

13.2 Definição e propriedades da transformação de Laplace

Define-se a **transformação de Laplace** $\mathfrak{L}$ por $\mathfrak{L}[f] = F$, onde F é a função de variável complexa, a que se chama **transformada de Laplace** de f, definida por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt\,. \tag{13.1}$$

Antes de prosseguir o estudo de propriedades desta transformação interessa analisar condições para a transformada de Laplace existir. Observa-se desde já que a função constante igual a 1 em $\mathbb{R}$ tem transformada de Laplace $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-s\,t}\,dt=1/s$, não tem transformada de Fourier, o mesmo acontece com as funções exponenciais, o seno e o coseno trigonométricos e hiperbólicos e funções polinomiais.

É útil relacionar as transformações de Laplace e de Fourier, pois esta última já foi estudada no capítulo anterior. Dada uma função $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ designa-se por $\widetilde{f}$ a sua extensão a $\mathbb{R}$ que é nula em $]-\infty,0]$ e por E_α a função exponencial $E_\alpha(t)=e^{-\alpha\,t}$, com $\alpha,t\in\mathbb{R}$. Pode-se, então, escrever para a transformada de Laplace de f

$$F(\alpha+i\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-\alpha\,t}\,e^{-\omega\,t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(t)\,e^{-\alpha\,t}\,e^{-\omega\,t}\,dt=[\widetilde{f}\,(t)\,e^{-\alpha\,t}]\hat{}\,(\omega)\,,$$

onde α,ω são números reais. Portanto, a transformada de Laplace de f está definida num ponto $s=\alpha+i\omega$, com $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$, se e só se a função $t\mapsto f(t)\,e^{-\alpha\,t}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^+)$. Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ designamos o espaço destas funções por $L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$, e analogamente designamos por $L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ o espaço das funções f tais que $t\mapsto f(t)\,e^{-\alpha\,t}$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^+)$. Portanto, se $f\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ a relação entre as transformadas de Laplace e de Fourier é

$$F(\alpha+i\omega)=[\widetilde{f}\,E_\alpha]\hat{}\,(\omega)\;. \tag{13.2}$$

É claro que $f\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ implica $f\in L^1_\beta(\mathbb{R}^+)$ para todo $\beta>\alpha$, pelo que a transformada de Laplace $F(s)$ de f fica definida num semiplano complexo que contém o semiplano $\mathrm{Re}\,s\geq\alpha$.

A **convolução** de funções $f,g\in L^1(\mathbb{R}^+)$ é definida de forma a coincidir no intervalo $\mathbb{R}^+$ com a convolução das extensões $\widetilde{f},\widetilde{g}$ a $\mathbb{R}$, tal como definida na secção **??**. Assim,

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\;,\qquad t>0\;.$$

Verifica-se neste caso um resultado análogo aos teoremas (**??**) e (**??**) obtidos para respectivamente, funções definidas em intervalos limitados e estendidas periodicamente a $\mathbb{R}$, e funções definidas em $\mathbb{R}$.

(13.3) **Teorema:** *Se $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^+)$, então $f*g=g*f$, $(f*g)*h=f*(g*h)$ e $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$, e $f*g\in L^1(\mathbb{R}^+)$, $\|f*g\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}$.*

Dem. É consequência directa do teorema (**??**) pois $(f*g)(t)=(\widetilde{f}*\widetilde{g})(t)$, para $t>0$, e $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}=\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$. *Q.E.D.*

Define-se a **função de Heaviside** ou **escalão unitário** em $c \in \mathbb{R}$ (Figura 13.1)

$$H_c(t) = \begin{cases} 1\ , & \text{se}\ t \geq c \\ 0\ , & \text{se}\ t < c\ . \end{cases}$$

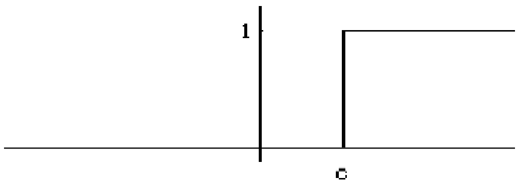

Figura 13.1: Função de Heaviside H_c ou escalão unitário em $c \in \mathbb{R}$

Com a relação (13.2) é possível obter propriedades da transformação de Laplace a partir das propriedades correspondentes da transformação de Fourier que, para facilidade de referência, se explicitam na proposição seguinte. É claro que estas propriedades também podem ser obtidas directamente da definição da transformação de Laplace sem recorrer à transformação de Fourier.

(13.4) **Proposição:** *Seja* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$. *Então, para* $s \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ *verifica-se:*

1. $\mathfrak{L}[f+g]\,(s) = \mathfrak{L}[f]\,(s) + \mathfrak{L}[g]\,(s)$;
2. $\mathfrak{L}[af]\,(s) = a\,\mathfrak{L}[f]\,(s), \quad a \in \mathbb{C}$;
3. $\mathfrak{L}[\overline{f}]\,(s) = \overline{\mathfrak{L}[f]\,(\overline{s})}$;
4. $|\mathfrak{L}[f]\,(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-(\operatorname{Re} s)\, t}\, dt \leq \|f E_\alpha\|_{L^1}$;
5. $\mathfrak{L}[f_\tau]\,(s) = \mathfrak{L}[f]\,(s)\, e^{-s\tau}$ *para* $\tau \geq 0$ *e*
   $\mathfrak{L}[f_\tau]\,(s) = \mathfrak{L}[H_{-\tau} f]\,(s)\, e^{-s\tau}$ *para* $\tau \leq 0$,
   onde $f_\tau(t) = H_\tau(t)\, f(t-\tau)$ *para* $t > 0$ (ver Figuras 13.2 e 13.3) ;
6. $\mathfrak{L}[f * g]\,(s) = \mathfrak{L}[f]\,(s)\ \mathfrak{L}[g]\,(s)$;
7. *Se* $F(t) = \int_0^t f$ *e* $F \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$, *então* $\mathfrak{L}[F]\,(s) = \mathfrak{L}[f]\,(s)/s, \quad s \neq 0$;
8. *Se* $f' \in L^1_\alpha(R^+)$ *e* $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f$ *existe,*
   então $\mathfrak{L}[f']\,(s) = s\,\mathfrak{L}[f]\,(s) - f(0+)$;
9. *Se* $g(t) = -t\, f(t)$ *para* $t > 0$ *e* $g E_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^+)$,
   então $\mathfrak{L}[f]$ *é diferenciável e* $(\mathfrak{L}[f])'\,(s) = \mathfrak{L}[g]\,(s)$;
10. *Se* $f(t) = g(t)\, e^{\tau t}$ *para* $t > 0$, $\tau \in \mathbb{C}$, *então* $\mathfrak{L}[f]\,(s) = \mathfrak{L}[h]\,(s-\tau)$;
11. *Se* $f(t) = g(t/\lambda)$ *para* $t, \lambda > 0$, *então* $\mathfrak{L}[f]\,(s) = \mathfrak{L}[g]\,(\lambda s)$.

Dem. Deixa-se como exercício. É consequência imediata das proposições (**??**) e (**??**) estabelecidas para a transformação de Fourier.

Figura 13.2: f e $f_\tau(t) = H_\tau(t)\, f(t-\tau)$ para $\tau > 0$

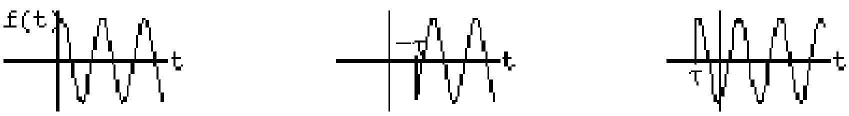

Figura 13.3: f, $H_{-\tau} f$, $f_\tau(t) = H_\tau(t)\, f(t-\tau)$ para $\tau < 0$

(13.5) **Exemplos:**

1. Como se observou logo a seguir à definição de transformação de Laplace, a transformada de Laplace da função $f(t)=1$ é $F(s)=1/s$ para $\operatorname{Re} s>0$.

2. A transformada de Laplace de $f(t)=e^{zt}$, com $z\in\mathbb{C}$, pode ser calculada com base no exemplo anterior e na propriedade (13.4.10), obtendo-se $F(s)=1/(s-z)$ para Re $s>\operatorname{Re} z$.

3. A função $f(t) = \sin at$ com $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(t) = (e^{iat} - e^{-iat})/(2i)$. Da linearidade da transformação de Laplace e do exemplo anterior conclui-se que a transformada de Laplace de f é
$$F(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}\,, \quad \operatorname{Re} s>0\ .$$

4. A função $f(t)=\cos at$ com $a\in\mathbb{R}$ satisfaz $f(t)=(e^{iat}+e^{-iat})/2$. Como no último exemplo, obtém-se que a transformada de Laplace de f é
$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}\,, \quad \operatorname{Re} s>0\ .$$

5. A função $f(t)=\sinh at$ com $a\in\mathbb{R}$ satisfaz $f(t)=(e^{at}-e^{-at})/2$, pelo que a sua transformada de Laplace é $F(s)=a/(s^2-a^2)$ para Re $s>|a|$.

6. A função $f(t)=\cosh at$ com $a\in\mathbb{R}$ satisfaz $f(t)=(e^{at}+e^{-at})/2$, pelo que a sua transformada de Laplace é $F(s)=s/(s^2-a^2)$ para $\operatorname{Re} s>|a|$.

7. Seja $f(t)=t^n$ com $n\in\mathbb{N}$. Como $\int_0^t r^{k-1}dr=(t^k)/k$ para $k\in\mathbb{N}$, a propriedade (13.4.7) dá $\mathfrak{L}[t^k]\,(s) = (k/s)\mathfrak{L}[t^{k-1}]\,(s)$ para $\operatorname{Re} s>0$. Como $t^0=1$, obtém-se por indução finita $F(s)=\mathfrak{L}[t^n]\,(s)=(n!/s^n)\mathfrak{L}[1]\,(s)= n!/s^{n+1}$ para $\operatorname{Re} s>0$.

8. Seja $f(t) = t^a$ com $a \in]-1,+\infty[$. Da definição de transformação de Laplace obtém-se e com uma mudança de variável de integração
$$F(s) = \int_0^{+\infty} t^a\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^{+\infty} r^a\, e^{-r}\, dr, \quad \operatorname{Re} s>0\ .$$
Considerando a Função Gama, definida por $\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} r^a e^{-r} dr$, a transformada de Laplace de $f(t)=t^a$, com $a\in\,]-1,+\infty[$, é $F(s)= \Gamma(a+1)/s^{a+1}$ para $\operatorname{Re} s > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ é $\Gamma(n+1) = n!$, pelo que a fórmula precedente dá $\mathfrak{L}[t^n]\,(s) = n!/s^{n+1}$, em concordância com a fórmula obtida no exemplo anterior para potências de expoente inteiro positivo.

9. Se $f\in C^n(\mathbb{R}^+)$ é tal que $t\mapsto f^{(k)}(t)\,e^{-\alpha t}$ é integrável em $\mathbb{R}^+$ para todo $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ com $k\le n$, obtém-se da propriedade (13.4.7) $\mathfrak{L}[f^{(k)}]\,(s)= s\,\mathfrak{L}[f^{(k-1)}]\,(s)-f^{(k-1)}\,(0)$ para $\operatorname{Re}s\ge\alpha$. Logo, por indução finita chega-se a

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}](s)=s^n\mathfrak{L}[f]\,(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)\,,\ \operatorname{Re}s\ge\alpha\,.$$

10. Se f é uma função tal que para todo $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ com $k\le n$ as funções $t\mapsto t^k\,f(t)\,e^{-\alpha t}$ são integráveis em $\mathbb{R}^+$, a propriedade (13.4.9) dá $\mathfrak{L}[t^k f]\,(s)=-(\mathfrak{L}[t^{k-1}f])'(s)$ para $\operatorname{Re}s\ge\alpha$. Por indução finita obtém-se $\mathfrak{L}[t^n f]\,(s)=(-1)^n(\mathfrak{L}[f])^{(n)}(s)$ para $\operatorname{Re}s\ge\alpha$.

Com base nos exemplos anteriores pode-se preencher a tabela 13.2 de transformadas de Laplace de funções elementares do cálculo, para utilização directa em problemas de aplicação.

Tabela 13.2: Transformadas de Laplace de funções elementares ($a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$)

$f(t)$	$F(s)=\mathfrak{L}[f]\,(s)$	Domínio de F
1	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\operatorname{Re}s>0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\operatorname{Re}s>0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\operatorname{Re}s>\|a\|$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\operatorname{Re}s>\|a\|$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}s>0$
$t^a,\ a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}s>0$

Decorre da relação (13.2) entre transformadas de Laplace e de Fourier e do teorema (**??**) que as transformadas de Laplace são funções contínuas nos seus domínios e, devido ao Lema de Riemann-Lebesgue, convergem para zero quando a variável independente tende para infinito num e no outro sentido ao longo de rectas no plano complexo paralelas ao eixo imaginário. Contudo, a propriedade de continuidade pode ser reforçada, estabelecendo-se a holomorfia da transformação de Laplace.

(13.6) **Teorema:** *Se* $\alpha\in\mathbb{R}$ *e* $f\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ *(com valores em* $\mathbb{R}$ *ou em* $\mathbb{C}$*), então a transformada de Laplace* F *de* f *é uma função holomorfa no semiplano complexo* $\operatorname{Re}s\ge\alpha$*, e* $\lim_{\omega\to\pm\infty}F(\beta+i\omega)=0$ *para* $\beta\ge\alpha$*.*

Dem. Se $\beta > \alpha$ verifica-se $|f(t)\, e^{-\beta t}| \leq |f(t)|\, e^{\alpha t}$ para $t > 0$, pelo que $F(\beta + i\omega)$ está definida para $\beta > \alpha$ e $\omega \in \mathbb{R}$, ou seja $F(s)$ está definida no semiplano complexo $\mathrm{Re}\, s \geq \alpha$. Se γ é um caminho seccionalmente regular neste semiplano complexo e γ^* é a curva que ele representa, dos teoremas de Tonelli e Fubini, e da holomorfia da função $s \mapsto e^{-st}$ no plano complexo, obtém-se

$$F(s) = \int_{\gamma^*} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt\, ds = \int_0^{+\infty} \int_{\gamma^*} f(t)\, e^{-st}\, ds\, dt = 0\,.$$

O Teorema de Morera[1] garante que F é holomorfa no semiplano considerado. A propriedade do limite decorre imediatamente do teorema (**??**). *Q.E.D.*

13.3 Inversão da transformação de Laplace

Da relação (13.2) entre transformadas de Laplace e de Fourier podem-se obter condições para a inversão da transformada de Laplace a partir de condições para a inversão da transformação de Fourier. Em particular, nas condições de inversão da transformação de Fourier para a função $\widetilde{f}E_\alpha$, verifica-se para $t > 0$

$$(\widetilde{f}E_\alpha)\,(t) = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{vp}\!\int_{-\infty}^{+\infty} [\widetilde{f}E_\alpha]\widehat{\ }(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{vp}\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

Em consequência, obtém-se a fórmula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Omega \to +\infty} \int_{-\Omega}^{+\Omega} F(\alpha + i\omega)\, e^{(\alpha + i\omega)t}\, d\omega\,, \quad \text{para } t > 0\,.$$

Esta é a fórmula de inversão da transformação de Laplace que também pode ser escrita em termos de integrais no plano complexo, pelo que se define a **transformação de Laplace inversa** por

(13.7) $$\mathfrak{L}_\alpha^{-1}(F)\,(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Omega \to +\infty} \int_{\alpha - i\Omega}^{\alpha + i\Omega} F(s)\, e^{st}\, ds\,, \quad \text{para } t > 0\,,$$

ou seja $\mathfrak{L}_\alpha^{-1}[F(\alpha + \omega)]\,(t) = \mathfrak{F}^{-1}[(\widetilde{f}E_\alpha)\widehat{\ }(\omega)]\,(t)$.

Da unicidade da transformada de Fourier estabelecida no teorema (**??**) obtém-se a unicidade da transformada de Laplace[2], pelo que a transformação de Laplace é uma função injectiva definida em $L_\alpha^1(\mathbb{R}^+)$.

(13.8) **Teorema de unicidade da transformada e Laplace:**
Se $f, g \in L_\alpha^1(\mathbb{R}^+)$ têm transformadas de Laplace iguais no semiplano complexo $\mathrm{Re} \geq \alpha$, *então $f = g$* q.t.p. *em $\mathbb{R}^+$.*
Se f e g também são contínuas em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, então $f = g$ em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

[1] Morera, Jacinto (1856-1909).

[2] Como as transformadas de Laplace de f, g são holomorfas, basta igualdade num conjunto com pontos limite, *e.g.*, um intervalo ou uma sucessão convergente em $\mathbb{R}$.

De cada resultado de inversão da transformação de Fourier obtém-se um resultado correspondente de inversão da transformação de Laplace. Em particular, dos resultados (**??**), (**??**) e (**??**) para a inversão da transformação de Fourier, obtém-se o seguinte resultado com condições que garantem a inversão da transformação de Laplace com convergência uniforme do valor principal de Cauchy do integral impróprio na definição de $\mathfrak{L}_\alpha^{-1}$.

(13.9) **Teorema:** *Se* $\alpha\in\mathbb{R}$ *e* $f\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ *satisfaz uma das condições:*

1. $\omega\mapsto\mathfrak{L}[f]\,(\alpha+i\omega)$ *pertence a* $L^1(\mathbb{R})$ *,*
2. $f', f''\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$*,* $f\in C^2(\mathbb{R}^+\cup\{0\})$ *e* $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ *,*
3. f *é diferenciável em* $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$*,* $f'\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$*,* $[(\widetilde{f}E_\alpha)']^\wedge\in L^2(\mathbb{R}^+)$ *e* $f(0)=f'(0)=0$ *,*
4. $f\in C^1(\mathbb{R}^+)$ *tem suporte compacto e* $f(0)=f'(0)=0$ *,*

então $f=\mathfrak{L}_\alpha^{-1}(\mathfrak{L}[f])$ q.t.p. *em* $\mathbb{R}^+$*, e o valor principal de Cauchy do integral impróprio na definição de* $\mathfrak{L}_\alpha^{-1}$ *converge uniformemente; quando* f *é contínua em* $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ *é* $f=\mathfrak{L}_\alpha^{-1}(\mathfrak{L}[f])$ *em todos os pontos de* $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$*.*

É de notar que $f, f'\in L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ implica $[(\widetilde{f}E_\alpha)']^\wedge\in L^2(\mathbb{R}^+)$, o que pode ser útil na verificação da 3ª condição, a qual pode ser adicionalmente simplificada tendo em conta o resultado no Apêndice D de $(\widetilde{f}E_\alpha)'\in L^1(\mathbb{R}^+)\cap L^2(\mathbb{R}^+)$ implicar $[(\widetilde{f}E_\alpha)']^\wedge\in L^2(\mathbb{R}^+)$ e, portanto, $f'\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)\cap L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ implicar $[(\widetilde{f}E_\alpha)']^\wedge\in L^2(\mathbb{R}^+)$, pelo que a 3ª condição no teorema é satisfeita sob a simples hipótese alternativa $f, f'\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)\cap L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$. A 4ª condição implica $f, f'\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)\cap L^2_\alpha(\mathbb{R}^+)$ e, portanto, é suficiente para validade do resultado.

De igual forma, obtém-se para inversão pontual da transformação de Laplace o resultado correspondente ao critério de Dini para inversão da transformação de Fourier em (**??**).

(13.10) **Teorema (Critério de Dini para inversão da transformação de Laplace):** *Se* $\alpha\in\mathbb{R}$*,* $f\in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$*,* $t\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$*, o limite da função* $g(\tau)=[f(t+\tau)+f(t-\tau)]/2$ *para* $\tau\to 0$ *existe (considerando* $f(t)=0$ *para* $t<0$*), e para algum* $\delta>0$ *a função* $k_t(\tau)=[g(\tau)-\lim_{h\to 0}g(\tau)]/\tau$ *é integrável em* $[0,\delta]$*, então* $\mathfrak{L}^{-1}[\,\mathfrak{L}[f]\,]\,(t)=\lim_{h\to+\infty}[f(t+h)+f(t-h)]/2$.

Em particular, $\mathfrak{L}^{-1}[\,\mathfrak{L}[f]\,]\,(t)$ *é* $f(t)$ *se* f *é contínua em* t *e é a média dos limites laterais esquerdo e direito de* f *em* t *se* f *tem uma descontinuidade de salto em* t*.*

As condições análogas às consideradas para a transformação de Fourier em (**??**) e (**??**) que implicam a validade do critério de Dini e são mais simples de verificar correspondem aos dois resultados seguintes.

(13.11) **Corolário:** *Se $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ é contínua à Lipschitz num ponto $t > 0$, então o valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula da transformada de Laplace inversa de f converge pontualmente em t e têm-se as conclusões do critério de Dini em t.*

O resultado verifica-se no ponto $t=0$ se adicionalmente $f(0)=0$.

(13.12) **Corolário:** *Se f é uma função seccionalmente lipschitziana em $\mathbb{R}^+$, então o valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula da transformada de Laplace inversa de f converge pontualmente em todos os pontos: em pontos $t>0$ de continuidade de f para $f(t)$ e em pontos $\tau>0$ de descontinuidade de f para a média dos limites laterais de f em τ. No ponto $\tau=0$ a convergência é para $f(0+)/2$.*

O análogo para a inversão da transformação de Laplace do resultado estabelecido a propósito do Fenómeno de Gibbs para a transformação de Fourier em (**??**) assume a forma seguinte, onde a hipótese pode ser substituída por condições mais restritivas semelhantes ao que já foi anteriormente referido, como por exemplo a hipótese de simplesmente f ser seccionalmente C^1 com suporte compacto em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

(13.13) **Teorema:** *Se $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ é seccionalmente diferenciável com $f' \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R}^+)$, então o valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula de inversão da transformação de Laplace converge em todos os pontos: para $f(t)$ se $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ é um ponto de continuidade de f e para a média dos limites laterais, $[f(t-)+f(t+)]/2$, se t é um ponto de descontinuidade, onde em $t=0$ se toma $f(0-)=0$. A convergência é uniforme em subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^+$ sem pontos de descontinuidade de f.*

Na vizinhança de qualquer ponto de descontinuidade a convergência não é uniforme e ocorre o Fenómeno de Gibbs, com overshooting *e* undershooting*, respectivamente do lado do limite lateral de f maior e menor nesse ponto. Mais especificamente, o gráfico da aproximação-Ω da transformada de Laplace inversa da função converge uniformemente para a união do gráfico de f com segmentos de recta verticais em cada ponto de descontinuidade que excedem em ambos os sentidos o segmento de recta delimitado pelos limites laterais de f, em comprimentos iguais a cerca de 8,95% do salto nesse ponto, mais precisamente a*

$$\frac{|f(t+)-f(t-)|}{2}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau - 1\right] = |f(t+)-f(t-)|\; 0,0894899\ldots\,.$$

São ainda importantes os resultados de densidade $L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$ das funções com transformada de de Laplace de suporte compacto, para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, de Princípio de Localização no sentido da convergência da transformação inversa de uma transformada de Laplace $\mathfrak{L}[f]$ num ponto e o respectivo limite dependerem apenas nos valores da função f numa vizinhança arbitrariamente pequena desse ponto análogos aos resultados (**??**) e (**??**) estabelecidos para a transformação de Fourier.

Convém ainda mencionar o seguinte resultado de ordem de convergência para zero no infinito de transformadas de Laplace de funções C^k integráveis e com derivadas integráveis até à ordem k análogo do resultado (**??**) estabelecido para transformadas e Fourier.

(13.14) **Proposição:** *Se $\alpha\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, $f\in C^k(\mathbb{R}^+\cup\{0\})$, e $f^{(j)}\in L^1_\alpha(\mathbb{R})$ com $f^{(j)}(0)=0$ para $j=1,2,\dots,k$, então para $s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ é*

$$|\mathfrak{L}[f](s)| = |\mathfrak{L}[f^{(j)}]\,(s)|\,|s|^{-j}\,,\quad j=1,2,\dots,k\,,$$

$$|\mathfrak{L}[f](s)| \le \min_{j=0,1,\cdots,k} \left\|\mathfrak{L}[f^{(j)}]E_\alpha\right\|_{L^1}|s|^{-j}\,.$$

Tal como para a transformação de Fourier, por vezes é útil utilizar métodos de Análise Complexa, em especial o Teorema dos Resíduos, para cálculo de inversas de transformadas de Laplace. Contudo, ocorrem com frequência situações em que o simples uso das propriedades gerais da transformação de Laplace enunciadas na Proposição (13.4), da unicidade de transformadas de Laplace e de uma tabela de transformadas permitem calcular transformadas de Laplace inversas.

Os resultados adicionais relativos à transformação de Fourier no apêndice D podem ser adaptados de forma análoga ao que se fez acima de modo a aplicarem-se à Transformação de Laplace.

13.4 Notas históricas

As raízes da transformação de Laplace encontram-se no trabalho de L. Euler, principalmente em 1737, 1760, 1763 e 1768-69 para obter soluções de equações diferenciais de 2ª ordem em termos de integrais da forma $\int_a^b f(t)\,e^{-st}dt$, em que b pode ser $+\infty$.

J.L. Lagrange, a propósito da propagação do som, utilizou em 1759-62 um método de aplicação de uma transformação integral à equação das ondas transformado-a uma equação diferencial ordinária, e em 1773 considerou integrais da forma $\int_a^{+\infty} f(t)\, b^t e^{-st} dt$ a propósito de análise de densidades de probabilidade.

P.S. Laplace começou em 1782 a considerar fórmulas integrais dos tipos referidos para expressar soluções de equações diferenciais no espírito introduzido por Euler, e em 1810 tinha avançado substancialmente a aplicação de transformações integrais a equações às diferenças e equações diferenciais.

N.H. Abel também considerou este tipo de transformação integral num trabalho de 1820, só publicado postumamente em 1839 nas suas Obras Completas, em que considerou explicitamente a transformação como um operador que actua numa função para dar a correspondente transformada e estabeleceu algumas das propriedades gerais deste operador, designadamente a linearidade e as propriedades relacionadas com translação da variável e com a derivação e primitivação. Assim, é Abel que inicia o estudo de propriedades operatórias gerais da transformação de Laplace, embora esta contribuição tenha passado despercebida até ser citada por M. Lerch em 1892.

Em 1823 e 1827, Cauchy considerou o teorema do integral de Fourier relativo à inversão da transformação de Fourier considerando-a como função complexa e considerou integrais de contorno no plano complexo para calcular inversas de transformadas de Fourier para resolução de equações diferenciais parciais. Em 1825 e 1845 Cauchy considerou métodos de "cálculo operacional" para resolver equações diferenciais, embora este tipo de métodos já tivesse sido usado anteriormente.

Em 1832 J. Liouville publicou três artigos relevantes para a transformação de Laplace, no primeiro dos quais obtém propriedades gerais desta transformação repetindo e ultrapassando o trabalho de Abel que obviamente desconhecia, e em 1837 incluiu num artigo uma referência à questão da unicidade de transformadas de Laplace numa situação particular.

J. Petzval[3] desenvolveu consideravelmente a transformação de Laplace para resolução de equações diferenciais com início em 1833 mas de forma continuada até 1859, com o primeiro artigo por ele publicado sobre o assunto em 1847, embora desconhecesse uma fórmula de inversão da transformação, apesar de ser conhecida na altura a fórmula de inversão da transformação de Fourier que na altura não era relacionada directamente com a transformação de Laplace, porventura devido a ser frequente considerar transformações de Laplace bilaterais, *i.e.,* definidas por integrais de $-\infty$ a $-\infty$, em que a relação entre as duas transformações pode não ser tão óbvia. De qualquer forma, o trabalho de Petzval juntou as contribuições até à altura e resultou em avanços substanciais. Além disso, acabou por ter uma divulgação considerável e influenciar trabalhos subsequentes.

Em 1859, B. Riemann, a propósito da função hoje chamada função ζ de Riemann, obteve uma fórmula de inversão com a utilização de integração de contorno no plano complexo.

[3]Petzval, Jozéph (1807-1891).

Entre 1860 e 1880 não houve progressos significativos relativos à transformação de Laplace, além da consideração de outras transformações integrais por vários matemáticos, entre os quais E. Heine, H. Hankel[4] (com a transformação de Hankel), e a obtenção da função de Heaviside por integral de contorno no plano complexo como transformada inversa de s^{-1} por L. Kronecker[5], embora de uma forma não rigorosa que só veio a ser resolvida por J. Hadamard em 1908.

Em 1880, num trabalho apresentado num concurso para um prémio da Academia das Ciências de Paris que não chegou a ser integralmente publicado, H. Poincaré considerou a transformação de Laplace como função de variável complexa e introduziu a utilização geral integrais de contorno associados a métodos de transformação de Laplace aplicados à resolução de equações diferenciais. também foi Poincaré que primeiro utilizou o termo "transformação de Laplace" na acepção actual numa publicação de 1884; as referências anteriores eram a "método de Laplace". Num trabalho de 1911 em que Poincaré discute a teoria dos *quanta* é incluída a fórmula da inversão da transformação de Laplace na forma usual de hoje em dia, embora como referido acima B. Riemann a tivesse obtido anteriormente, embora numa forma um pouco diferente.

Entre 1880 e 1887, O. Heaviside desenvolveu um cálculo operacional para resolver equações diferenciais ordinárias por equações algébricas obtidas por substituição da solução por uma função complexa e as derivadas por produtos pela variável complexa que foi muito utilizado na análise de circuitos em engenharia electrotécnica até cerca de 1940, embora não estivesse legitimado rigorosamente. Contudo, até por esta mesma razão, este trabalho teve grande influência na contribuição de vários matemáticos com o objectivo de dar bases rigorosas para um cálculo considerado tão útil em engenharia.

Uma das contribuições mais influentes nesta direcção foi de S. Pincherle[6], com início em 1887, que também contribuiu decisivamente para a estabilização do nome de Laplace nesta transformação.

Foi também em 1887 que as ideias de Poincaré sobre a transformação de Laplace foram publicadas, primeiro integradas no *Cours d'Analyse* de C. Jordan e depois num artigo de E. Picard. Este incluiu uma secção especificamente dedicada à transformação de Laplace no seu *Traité d'Analyse* em que a teoria de variável real é apresentada essencialmente como fazia Petzval, mas incluindo também integrais de contorno no plano complexo.

M. Lerch[7] estabeleceu em 1892 a unicidade de transformadas de Laplace de funções contínuas f tais que $\lim_{t\to 0} t^{\alpha} f(\log t^{-1}) = 0$, com base no Teorema de Aproximação de Weierstrass por funções polinomiais, legitimando o uso de tabelas para a inversão de transformadas de Laplace, embora este

[4]Hankel, Hermann (1839-1873).
[5]Kronecker, Leopold (1823-1891).
[6]Pincherle, Salvatore (1853-1936).
[7]Lerch, Mathyáš (1860-1892).

trabalho publicado em checo tivesse ficado praticamente desconhecido até 1903 quando foi incluído num artigo publicado em francês. Este resultado, apareceu frequentemente citado como **teorema de Lerch** em textos de aplicações da transformação de Laplace para sustentar a utilização de tabelas de transformadas de Laplace, geralmente sem ser apresentada qualquer demonstração nem serem especificadas condições razoáveis da sua validade.

Apesar de todo este trabalho, a utilização generalizada da transformação de Laplace só ocorreu depois de:

(i) H. Bateman[8] ter iniciado em 1910 a aplicação sistemática da transformação de Laplace directamente a equações diferenciais transformando-as em equações algébricas;

(ii) T. Bromvich[9] ter obtido em 1916 uma fórmula integral para inversão da transformação de Laplace;

(iii) G. Doetsch[10] ter contribuído em 1930-1937 para o desenvolvimento da transformação de Laplace e suas aplicações, em particular com a publicação em 1937 do livro *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*;

(iv) H. Carslaw [11] e J. Jaeger [12] terem prosseguido os trabalhos anteriores no período 1938-1940, culminando com a ampla disseminação do método no livro que publicaram em 1941 com o título *Operational Methods in Applied Mathematics* que teve uma rápida disseminação devido à necessidade de legitimação do ”cálculo operacional” de Heaviside amplamente utilizado em engenharia electrotécnica.

A adopção da transformação de Laplace na rotina de formação e de utilização prática em engenharia foi muito rápida: em 1947 já era amplamente aplicada e ensinada a estudantes de engenharia quando menos de dez anos antes alguns dos seus aspectos essenciais eram objecto de investigação.

[8] Bateman, Harry (1882-1946).
[9] Bromvich, Thomas John (1875-1929).
[10] Doetsch, Gustav (1892-1977).
[11] Carslaw, Horatio (1870-1954).
[12] Jaeger, John Conrad (1907-1979).