

Capítulo 12

Aplicações da Transformação de Fourier – Resolução de equações diferenciais, análise de sistemas e análise de sinais

12.1 Introdução

A transformação de Fourier tem amplas aplicações, em particular no âmbito da resolução de equações diferenciais lineares, da teoria dos sistemas e da análise de sinais.

A principal razão da utilidade da transformação de Fourier na resolução de equações diferenciais resulta de transformar equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em equações algébricas, dado que a transformada de Fourier da derivada de uma função f num ponto $\omega \in \mathbb{R}$ é igual ao produto de $i\omega$ pela transformada de f calculada em ω .

A utilização de métodos da Análise Fourier em engenharia teve um grande impulso entre 1930 e 1940 em consequência da sua aplicação em problemas associados à utilização de amplificadores electrónicos de ganho muito elevado na indústria de comunicações que também se expandiram para outras áreas de engenharia electrotécnica. Estes métodos tornaram-se centrais na Teoria de Controlo de Sistemas Lineares e na Análise de Sistemas e Sinais.

12.2 Transformação de Fourier na resolução de equações diferenciais

Começa-se com um exemplo de resolução de uma equação diferencial linear ordinária de 2ª ordem não homogénea, já resolvida pelos métodos elementares de resolução de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes apresentados nos capítulos iniciais, para ilustrar como a transformação de uma equação diferencial numa equação algébrica por aplicação da transformação de Fourier, e prossegue-se com um exemplo de resolução de uma equação diferencial parcial, designadamente a equação do calor em toda a recta real.

(12.1) **Exemplo:** Considera-se a equação diferencial $y'' + ay = f(t)$, onde $a > 0$, $f(t) = e^{-\alpha t}$ com $0 < \alpha \neq a$ se $t \geq 0$, e $f(t) = 0$ se $t < 0$. Pretende-se determinar uma solução em $L^1(\mathbb{R})$.

Aplicando a transformação de Fourier a ambos os lados da equação diferencial, supondo que a derivada da solução também pertence a $L^1(\mathbb{R})$, obtém-se da linearidade da transformação (Proposição (??)) e (??)) a equação algébrica $(i\omega)\hat{y}(\omega) + a\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)$, pelo que $\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)/(a + i\omega)$. Do Exemplo (??) sabe-se que $\hat{f}(\omega) = 1/(\alpha + i\omega)$. Logo

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(\alpha + i\omega)(\alpha + i\omega)} = \frac{1}{a - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha + i\omega} - \frac{1}{a + i\omega} \right).$$

Como $\hat{f}(\omega) = 1/(\alpha + i\omega)$, da unicidade da transformada de Fourier estabelecida no teorema (??) e da linearidade desta transformação conclui-se que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{a - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-at}), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Uma vez que esta função e a sua derivada pertencem ambas a $L^1(\mathbb{R})$, a função y assim obtida é de facto uma solução da equação diferencial dada (Figura 12.1).

Note-se que o método de resolução de equações diferenciais por transformação de Fourier é muito simples mas exige trabalhar com equações diferenciais com termo independente em $L^1(\mathbb{R})$ e aplica-se para determinar soluções tais que elas próprias e as suas derivadas que aparecem na equação pertençam a $L^1(\mathbb{R})$. Estas são fortes restrições às funções definidas em $\pm\infty$, uma vez que para uma função pertencer a $L^1(\mathbb{R})$ tem de convergir para zero suficientemente rapidamente em $\pm\infty$.

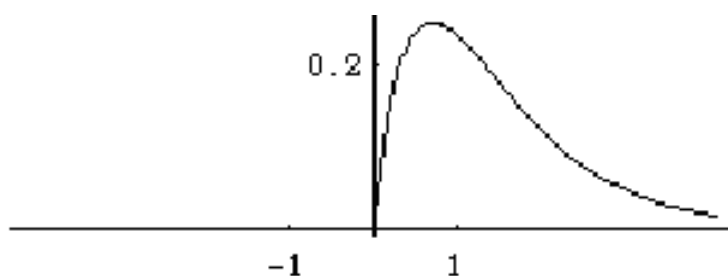


Figura 12.1: Solução em $L^1(\mathbb{R})$ de $y'' + ay = f(t)$, com $a = 2$, $f(t) = e^{-t}$ se $t > 0$ e $f(t) = 0$ se $t < 0$

(12.2) **Exemplo:** Pretende-se resolver a equação do calor em toda a recta real

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),$$

com $k > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e condição inicial $u(0, x) = u_0(x)$, supondo $u_0, u_0', u_0'' \in L^1(\mathbb{R})$ e u_0 contínua. De forma análoga ao que foi feito em capítulos anteriores considera-se solução do problema qualquer função contínua $u: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a condição inicial, e é C^2 e verifica a equação diferencial em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Procuram-se soluções tais que $u(t, x)$, $(\partial u / \partial x)(t, x)$, $(\partial^2 u / \partial x^2)(t, x)$ sejam, para cada $t > 0$ fixo, funções integráveis de x .

Aplicando a transformação de Fourier em relação a x à equação diferencial obtém-se

$$(12.3) \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \omega) = k(-i\omega)^2 \hat{u}(t, \omega)$$

dado que $\mathfrak{F}[\partial u / \partial t] = \partial(\mathfrak{F}[u]) / \partial t$, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-i\omega x} dx,$$

o que pode ser assegurado com base na regra de Leibniz desde que para todo s numa vizinhança de $t > 0$ se verifique $|(\partial u / \partial t)(s, x)| \leq f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, com $f \in L^1(\mathbb{R})$. Assim, a transformação de Fourier transforma a equação diferencial parcial dada na equação diferencial ordinária (12.3) que tem por solução com condição inicial $\hat{u}(0, \omega) = \hat{u}_0(\omega)$ a função $\hat{u}(t, \omega) = e^{-k\omega^2 t} \hat{u}_0(\omega)$.

Para se obter uma solução da equação diferencial parcial dada há que determinar uma função u cuja transformada de Fourier satisfaça a última fórmula, verificar se as hipóteses de integrabilidade de u , $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$ e a majoração anterior são satisfeitas e provar que $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ quando $t \rightarrow 0+$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se h é tal que para cada $t > 0$ a função $x \mapsto h(t, x)$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{h}(t, \omega) = e^{-k\omega^2 t}$, como a transformada de Fourier de uma convolução de

duas funções de $L^1(\mathbb{R})$ é igual ao produto das transformadas das funções, é

$$u(t, x) = (h * u_0)(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, x-s) u_0(s) ds .$$

Para determinar h recorda-se do exemplo (???) que a transformada de Fourier de $g(x) = e^{-ax^2}$ é $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\pi/a} e^{-\omega^2/(4a)}$, pelo que com $a = 1/(4kt)$ obtém-se $h(t, x) = e^{-x^2/(4kt)}/(2\sqrt{k\pi t})$ e

$$(12.4) \quad u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x-s)^2/(4kt)}}{2\sqrt{k\pi t}} u_0(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s^2/(4kt)}}{2\sqrt{k\pi t}} u_0(x-s) ds,$$

para $t > 0, x \in \mathbb{R}$.

Como u_0, u'_0, u''_0 e $x \mapsto h(t, x)$ pertencem a $L^1(\mathbb{R})$, o teorema (??) e a Regra de Leibniz aplicada ao primeiro integral na equação anterior implicam para cada $t > 0$ a integrabilidade de $u(t, x), (\partial u/\partial x)(t, x), (\partial^2 u/\partial x^2)(t, x)$, como funções de $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, a regra de Leibniz aplicada ao segundo integral nessa equação dá, para $t > 0, x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s^2/(4kt)}}{2\sqrt{k\pi t}} \frac{s^2 - 2kt}{4kt^2} u_0(x-s) ds ,$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-s^2/(8kt)}}{\sqrt{2k\pi t}} \frac{s^2 + 4kt}{kt^2} |u_0(x-s)| ds , \quad \text{para } t/2 < \tau < 2t ,$$

com $g(t) = e^{-s^2/(8kt)}(s^2 + 4kt)/(kt^2\sqrt{2k\pi t})$. Qualquer que seja $t > 0$ verifica-se $g \in L^1(\mathbb{R})$ e o teorema (??) garante que $(g * |u_0|) \in L^1(\mathbb{R})$, pelo que a majoração $|(\partial u, \partial t)(\tau, x)| \leq f(x)$ verifica-se para $t/2 < \tau < 2t, x \in \mathbb{R}$ com $f = g * |u_0|$.

Finalmente, a verificação de $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ quando $t \rightarrow 0+$ em pontos $x \in \mathbb{R}$ onde u_0 é contínua é consequência directa de $h(t, s) > 0, h(t, s) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0+$ sempre que $s \neq 0$, e $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t, s) ds = 1$. Também é interessante observar que h é contínua em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e, portanto, resulta das propriedades anteriores que $h(t, 0) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow 0+$.

Assim, (12.4) dá a representação integral de uma solução do problema de valor inicial para a equação do calor em \mathbb{R} dado, a que se chama **integral de Poisson** para a equação do calor. Este integral dá a solução como uma sobreposição linear dos efeitos da temperatura inicial $u_0(s)$ em cada ponto $s \in \mathbb{R}$, pelo que $h(t, x-s) = e^{-(x-s)^2/(4kt)}/(2\sqrt{k\pi t})$ corresponde à temperatura no ponto $x \in \mathbb{R}$ no instante $t > 0$ devida a um “ponto quente” localizado em s no instante $t = 0$ (Figura 12.2). Por esta razão, diz-se que a função h é o **Núcleo do Calor** ou a **solução fundamental da equação do calor**.

Pode-se verificar a partir de (12.4) e da regra de Leibniz que, para cada $t > 0$ fixo, a solução u é C^∞ em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Por outro lado, segue-se de (12.4) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ a solução converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

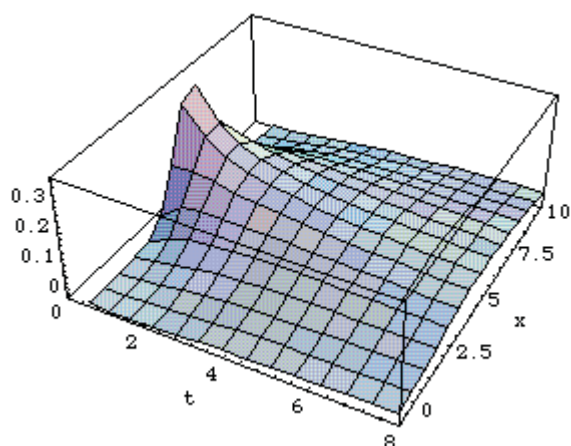


Figura 12.2: Gráfico do Núcleo do Calor $h(t, x-s)$, para $s=5$, com $k=1$ (quando $t \rightarrow 0+$, $h(t, x-s)$ tende para 0 se $x \neq s$ e para $+\infty$ se $x=s$)

Aplicando o Princípio do Máximo Fraco para a equação do calor (??) conclui-se que $\min u_0 \leq u(t, x) \leq \max u_0$ para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Além disso, se u e \tilde{u} são soluções do problema considerado com condições iniciais, respectivamente u_0 e \tilde{u}_0 , conclui-se que $u - \tilde{u}$ é solução do mesmo problema com condição inicial zero, pelo que a desigualdade anterior resultante do Princípio de Máximo Fraco dá $|u - \tilde{u}| \leq \max |u_0 - \tilde{u}_0|$. Logo, se $u_0 = \tilde{u}_0$ obtém-se $u = \tilde{u}$. Fica, assim, provada a unicidade de solução e a dependência contínua em relação às condições iniciais, uma vez que $u - \tilde{u} \rightarrow 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ quando $u_0 \rightarrow \tilde{u}_0$ uniformemente em \mathbb{R} , qualquer que seja $t > 0$.

Na Figura 12.3 apresenta-se uma condição inicial u_0 , a solução obtida pelo integral de Poisson para a equação do calor com essa condição inicial e $k=1$, e o valor da solução observado ao longo do tempo no ponto $x=4$.

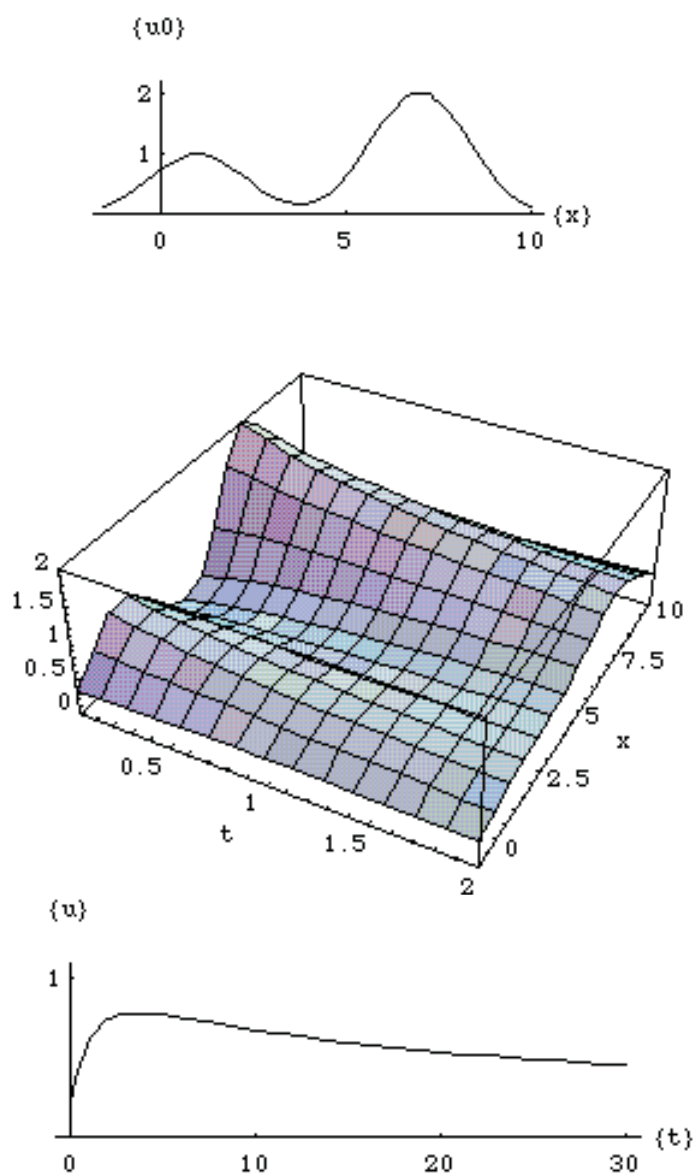


Figura 12.3: Solução da equação do calor, com $k=1$, para a condição inicial indicada no topo; em baixo mostra-se o valor da solução ao longo do tempo no ponto $x=4$

Com base nas conclusões do exemplo anterior pode-se estabelecer o resultado seguinte análogo ao teorema (??) que foi estabelecido para a equação do calor num intervalo compacto com condições de Dirichlet na fronteira.

(12.5) **Teorema:** Se $u_0, u'_0, u''_0 \in L^1(\mathbb{R})$ e u_0 é contínua, então o problema de valor inicial para a equação do calor em \mathbb{R} com condição inicial u_0 em $t=0$ tem solução única u dada por (12.4) para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. O problema é bem posto no sentido de Hadamard, isto é, se u é solução do problema considerado e \tilde{u} é solução do mesmo problema com condição inicial \tilde{u}_0 em vez de u_0 , então $u \rightarrow \tilde{u}$ uniformemente em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ quando $u_0 \rightarrow \tilde{u}_0$ uniformemente em \mathbb{R} . Além disso, a solução é C^∞ em $\mathbb{R}^+ \times]0, L[$ e converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

É natural procurar estender para equações em \mathbb{R}^n o método aplicado no exemplo anterior, por exemplo incluindo a resolução da equação do calor a duas ou três dimensões. Tal é possível com a consideração da **transformação de Fourier multivariável**. Sem entrar em detalhes, refere-se apenas que dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ define-se a sua transformada de Fourier pela função \hat{f} de variável em \mathbb{R}^n tal que $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t}) e^{-i\omega \cdot \mathbf{t}} dt$, onde $\omega \cdot \mathbf{t}$ é o produto interno usual dos vectores $\omega, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ e o integral é um integral múltiplo em \mathbb{R}^n . De forma análoga podem-se considerar **séries de Fourier multivariáveis**.

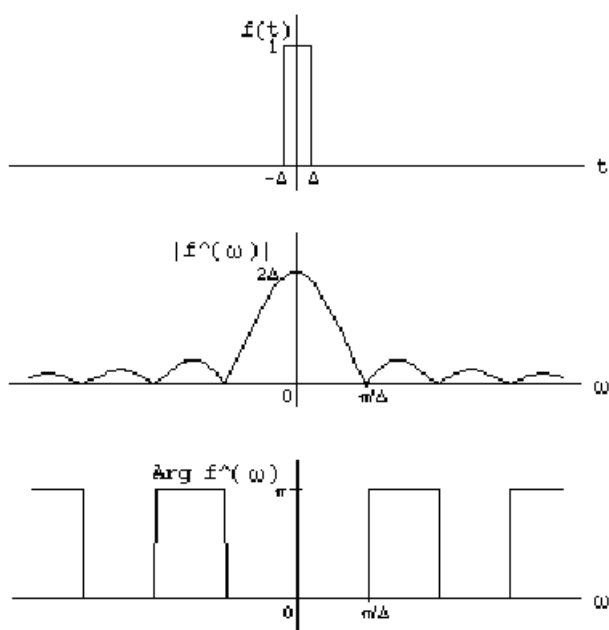


Figura 12.4: Decomposição espectral de um impulso de altura 1 e largura 2Δ

12.3 Transformação de Fourier na análise e controlo de sistemas

A aplicação da transformação de Fourier a sistemas lineares pode começar por ser ilustrada com a equação diferencial do 1º exemplo da secção anterior. Na verdade, nesse exemplo verifica-se que qualquer que seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ uma solução da equação diferencial considerada em $L^1(\mathbb{R})$ com derivada em $L^1(\mathbb{R})$ tem transformada de Fourier $\hat{y}(\omega) = [1/(a+i\omega)]\hat{f}(\omega)$. Assim, se considerarmos f e y , respectivamente, a entrada e a saída de um sistema linear descrito pela equação diferencial dada, obtém-se que a transformada de Fourier da saída é igual ao produto de $H(\omega) = 1/(a+i\omega)$ pela transformada de Fourier da entrada, isto é

$$(12.6) \quad \hat{y}(\omega) = H(\omega) \hat{f}(\omega).$$

Esta é uma maneira muito simples de descrever a relação entrada-saída de um sistema linear definido por equações diferenciais e, por isso, chama-se a H a **função de transferência** do sistema (Figura 12.5).

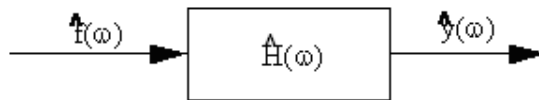


Figura 12.5: Esquema de sistema linear com indicação de função de transferência

Sabe-se das propriedades gerais da transformação de Fourier que a transformada da convolução de duas funções é o produto das transformadas dessas funções. Assim, se $h \in L^1(\mathbb{R})$ é tal que $H = \hat{h}$, com base no Teorema de Inversão (??) conclui-se que a saída está relacionada com a entrada por

$$(12.7) \quad y(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f(\tau) dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para identificar a função h com o comportamento entrada-saída do sistema de forma mais simples, pode-se ver se existe uma entrada do sistema que dá na saída h , ou seja uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que o integral no lado direito dá h . Embora em geral tal não aconteça, pode-se ver que a saída num instante t pode ser tornada arbitrariamente próxima de $h(t)$ tomando para entrada f um impulso suficientemente estreito centrado na origem e com integral igual a 1 (Figura 12.6). Na verdade, com a entrada $f(t) = 1/(2L)$ se $|t| \leq L$ e $f(t) = 0$ se $|t| > L$, obtém-se a saída $y_L(t) = 1/(2L) \int_{-L}^L h(t-\tau) d\tau$ para $t \in \mathbb{R}$. Se h é contínua o último integral dá a média de h no intervalo $[t-L, t+L]$, pelo que $h(t) = \lim_{L \rightarrow 0} y_L(t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Por esta razão, diz-se que h é a **resposta impulsiva** do sistema.

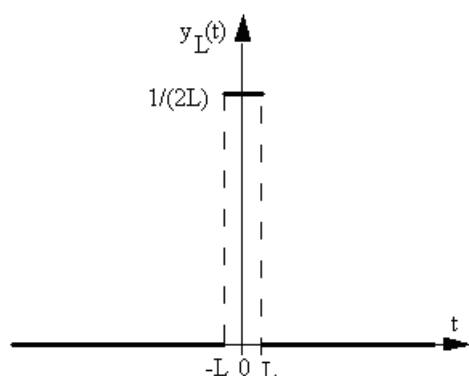


Figura 12.6: Impulso estreito centrado na origem com integral igual a 1 (largura L pequena)

No caso concreto do exemplo (12.1) tem de ser $\hat{h}(\omega) = H(\omega) = 1/(a + i\omega)$. Sabe-se do exemplo (???) que a função $h(t) = e^{-at}$ para $t \geq 0$ e $h(t) = 0$ para $t < 0$ tem essa transformada de Fourier (Figura 12.7) e da unicidade de transformada de Fourier sabe-se que esta é a única função com a transformada de Fourier H . Assim, a fórmula (12.3) pode ser vista como a obtenção da saída do sistema por sobreposição (calculada por um integral) das respostas do sistema a impulsos estreitos centrados em cada um dos sucessivos instantes de tempo t com área igual ao valor da entrada nesse instante $f(t)$.



Figura 12.7: Resposta impulsiva h do sistema definido por $y'' + y = f(t)$

O que acabámos de descrever a propósito do sistema linear definido pela equação diferencial do exemplo (9.23) aplica-se a todos os sistemas lineares descritos por equações diferenciais ordinárias escalares de coeficientes constantes. Por isso, a transformação de Fourier é muito utilizada no estudo de sistemas lineares nas várias áreas da ciência e da engenharia.

Como se observou anteriormente, a aplicação da transformação de Fourier à resolução de equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes é pouco natural pois dispomos de métodos simples para resolução desse tipo

de equações e ficamos restringidos a considerar equações com termos independentes e soluções que convirjam rapidamente para zero em $\pm\infty$, assim como as suas derivadas que aparecem na equação, de forma a pertencerem a $L^1(\mathbb{R})$. Contudo, como se vê, a transformação de Fourier desempenha um papel de grande importância na análise de sistemas lineares descritos por equações diferenciais do tipo referido e é um instrumento corrente de análise e projecto desse tipo de sistemas.

12.4 Transformação de Fourier na análise de sinais

As séries de Fourier permitem representar funções periódicas em \mathbb{R} em termos de funções trigonométricas com períodos submúltiplos inteiros do período da função considerada. Uma situação familiar deste tipo de representação é em acústica quando, por exemplo, se considera o som emitido por um instrumento musical em termos da frequência da sua componente fundamental que define a nota emitida, da sua amplitude que define a intensidade ou o volume sonoro, e da sucessão das amplitudes e defasagens das subharmónicas em relação à componente fundamental que, em conjunto, definem o timbre. Assim, a série de Fourier corresponde a decompor um sinal periódico nas suas componentes harmónicas, pelo que em Análise de Sinais é usual chamar-lhe **decomposição na frequência** ou **decomposição espectral** do sinal. Uma forma de representar graficamente esta decomposição é pelos gráficos do módulo e do argumento de cada um dos coeficientes de Fourier em função da frequência, conhecidos em Análise de Sinais por, respectivamente, **amplitude** e **fase da componente de frequência** correspondente.

Para sinais aperiódicos dados por funções integráveis em \mathbb{R} a sucessão dos coeficientes de Fourier é substituída pela transformada de Fourier. Continua a falar-se em decomposição na frequência ou decomposição espectral, mas neste caso é dada por uma função contínua da frequência. Graficamente esta decomposição representa-se em função da frequência pelo módulo e pelo argumento da transformada de Fourier, a que é frequente em Análise de Sinais chamar **amplitude** e **fase** do sinal. Na Figura 12.4 representa-se a decomposição espectral de um impulso de altura 1 e largura 2Δ centrado na origem. Na Figura 12.8 mostra-se a decomposição espectral do sinal periódico de período $T > 2\Delta$ igual ao impulso anterior no intervalo $[-T, T]$.

Por razões que agora devem ser óbvias diz-se que um sinal periódico tem um **espectro discreto** e um sinal aperiódico integrável tem um **espectro contínuo**.

A relação que se observa nas figuras 12.4 e 12.8 entre a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ de suporte compacto K e os coeficientes de Fourier $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ da função de período $T > 0$ igual a f no intervalo

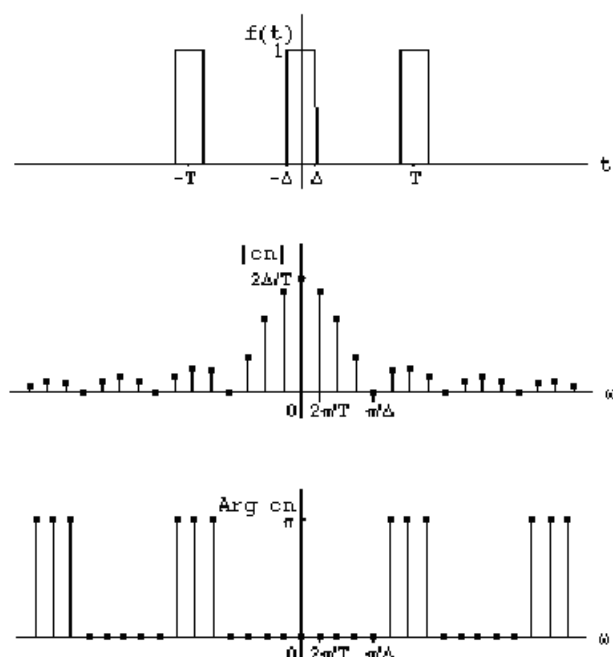


Figura 12.8: Decomposição espectral de um sinal de impulsos de largura 2Δ repetidos com período $T > 2\Delta$

$[-T/2, T/2] \supset K$ é uma relação geral. Na verdade, nestas condições tem-se sempre

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in2\pi t/T} dt,$$

pelo que $c_n = \hat{f}(n2\pi/T)/T$ para $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, os coeficientes de Fourier da função obtida por repetição periódica de f com período T são iguais ao resultado da divisão por T dos valores da transformada de Fourier de f em pontos igualmente espaçados entre si de $2\pi/T$, a partir da origem e para ambos os lados ao longo da recta real.

Na Análise de Sinais em várias áreas da engenharia e da ciência utilizam-se as séries e a transformação de Fourier com grande frequência. Além de permitirem expressar sinais em termos de frequência, as vantagens da utilização destes instrumentos da Análise de Fourier em Análise de Sinais

decorrem de uma grande parte do processamento de sinais em engenharia ser realizado por sistemas lineares cujo comportamento pode, em muitos casos, ser facilmente especificado e analisado com a utilização de séries de Fourier e da transformação de Fourier, como se observou anteriormente.

12.5 Notas históricas

No capítulo anterior podem ser encontradas notas históricas sobre o desenvolvimento da transformação de Fourier.

A utilização de métodos da Análise Fourier na Análise de Sistemas e na Análise de Sinais associada à utilização de amplificadores electrónicos de ganho muito elevado na indústria de comunicações foi impulsionada no período 1927-1940 pelo grupo de investigação em matemática dos *Bell Telephone Laboratories*, em que se distinguiram H. Bode¹, H. Nyquist² e C. Shannon³. Bode iniciou a utilização dos gráficos da amplitude e da fase de funções de transferência de sistemas lineares na análise e projecto de amplificadores em 1940 e dirigiu o grupo de matemática dos *Bell Labs* no período 1944-1955. Nyquist desenvolveu testes de estabilidade muito úteis em sistemas lineares de controlo e no projecto de sistemas electrónicos. Também foi particularmente importante para o desenvolvimento desta área o trabalho do *Radiation Laboratory* do MIT na parte final da II Guerra Mundial.

A utilização da transformação de Fourier na resolução de equações diferenciais está limitada por se aplicar a funções integráveis em \mathbb{R} , o que exige que as funções decresçam para zero suficientemente rapidamente em $\pm\infty$. Contudo, é frequentemente necessário considerar equações diferenciais com soluções em que isso não acontece. Esta limitação pode ser ultrapassada até certo ponto pela consideração de uma outra transformação – a transformação de Laplace – que é considerada num capítulo seguinte. Esta transformação é definida de maneira semelhante à transformação de Fourier, mas considerando integrais em \mathbb{R}^+ em vez de \mathbb{R} e definindo uma função de variável complexa. A primeira opção elimina as exigências associadas ao decréscimo da função em $-\infty$ e a segunda opção permite considerar funções que até podem crescer em $+\infty$ desde que o crescimento não seja superior ao de todas as funções exponenciais $t \mapsto e^{\alpha t}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Uma outra direcção para ultrapassar limitações da aplicação da transformação de Fourier baseia-se na **Teoria das Distribuições**, iniciada em 1945 por L. Schwartz⁴ com o objectivo de estabelecer um quadro rigoroso

¹Bode, Hendrik (1905-1982).

²Nyquist, Harry (1889-1976).

³Shannon, Claude (1916-2001). Shannon fundou a Teoria da Informação em 1948.

⁴Schwartz, Laurent (1915-2002). Recebeu a Medalha Fields em 1950.

para o cálculo simbólico de base empírica de O. Heaviside ⁵ para resolver equações diferenciais da análise de circuitos eléctricos e para certos operadores introduzidos por P. Dirac ⁶ na Mecânica Quântica. No quadro das distribuições é possível considerar derivadas de funções contínuas que não são diferenciáveis no sentido usual das funções. Em particular, dá-se sentido ao conceito de um impulso de área 1 concentrado na origem, a que se chama impulso ou **distribuição de Dirac**, usualmente designada por δ , de modo a poder ser considerada a derivada da distribuição definida pela função igual a 0 nos reais negativos e a 1 nos reais positivos, a que se chama **função de Heaviside**. Desta forma a consideração de impulsos concentrados num ponto e de respostas impulsivas referida neste capítulo como situação limite de impulsos com integral igual a 1 de largura suficientemente pequena pode ser tornada rigorosa no quadro das distribuições que, portanto, é muito útil na Análise de Sistemas e Sinais.

L. Schwartz seguiu uma via para as distribuições apoiada em Análise Funcional e em Topologia e mais tarde apareceram outras vias, incluindo uma iniciada por Mikusiński ⁷ e Sikorski ⁸ em que as distribuições são tomadas como sucessões de Cauchy de funções numa norma apropriada com base em as considerar como limites dessas sucessões seguindo a ideia de respostas impulsivas de sistemas lineares introduzida neste capítulo, e a via axiomática do matemático português Sebastião e Silva ⁹.

A primeira publicação em que L. Schwartz apresentou as suas ideias sobre a definição de distribuições foi um artigo publicado em 1945 com o título *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*. Em 1954 J. Sebastião e Silva tomou como base da teoria das distribuições de ordem finita uma axiomática muito simples que as estabelecem como derivadas de todas as ordens de funções contínuas, com a derivação tomada num sentido que generaliza o usual das funções continuamente diferenciáveis e é tal que as únicas funções com derivada de ordem $k \in \mathbb{N}$ nula são polinómios de grau menor do que k , tal como acontece com a derivada usual considerada no quadro clássico das funções.

As aplicações da Teoria das Distribuições ultrapassaram em larga medida as motivações iniciais, estando hoje em dia na base do estudo de Equações Diferenciais Parciais, em que é necessário considerar soluções das equações num sentido mais fraco do que temos vindo a considerar, nomeadamente tomando soluções em **espaços de Sobolev** ¹⁰. Estes são espaços de funções

⁵Heaviside, Oliver (1850-1925).

⁶Dirac, Paul Adrien Maurice (1902-1984). Recebeu o Prémio Nobel de Física em 1933, juntamente com Erwin Schrödinger (1887-1961).

⁷Mikusiński, Jan (1913-1987).

⁸Sikorski, Roman (1920-1983.)

⁹Sebastião e Silva, José (1914-1972).

¹⁰Sobolev, Sergei (1908-1998).

que elas próprias e as suas derivadas no sentido das distribuições até uma certa ordem são integráveis, de quadrado integrável ou com outras potências integráveis. A ideia de considerar soluções de equações diferenciais neste contexto, em particular tendo em vista aplicações à física e à engenharia, pode parecer à primeira vista estranha, mas assume naturalidade quando se nota que em muitas situações de interesse em aplicações as equações diferenciais obtidas são condições locais que na verdade traduzem a abstracção de limites de equações integrais por localização quando as regiões de integração são consideradas como limites de volumes arbitrariamente pequenos. Nestes casos as equações diferenciais podem não definir problemas bem postos quando consideradas com soluções clássicas como temos vindo a fazer, mas definir problemas bem postos com soluções consideradas como distribuições, designadamente em espaços de Sobolev, e isto corresponder a soluções naturais das equações integrais associadas. Na verdade, nestes casos, a abstracção matemática em relação à situação das aplicações é a consideração das relações pontuais estabelecidas pelas equações diferenciais obtidas pelo processo abstracto de limite quando regiões de integração tendem para um ponto, e não a consideração de soluções destas equações no quadro das distribuições que, assim, não dão mais do que o sentido natural para alargar a consideração de equações diferenciais a situações em que as correspondentes soluções das associadas equações integrais têm um sentido natural do ponto de vista da aplicação considerada.

Apesar da imprescindibilidade da Teoria das Distribuições na análise de Equações Diferenciais Parciais e da sua grande conveniência para aplicações em engenharia como a Análise de Sistemas e Sinais e a Teoria de Controlo, não cabe introduzir este estudo no âmbito deste texto ¹¹.

¹¹ Podem ser encontradas boas introduções à Teoria das Distribuições em muitos livros, incluindo, por exemplo, os seguintes: Schwartz, L., *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, Paris, 1965; Hörmander, Lars, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990; Lieb, E.H. and Loss, M., *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, 1997; Ferreira, J. Campos, *Introdução à Teoria das Distribuições*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1993.