

Capítulo 11

Transformação de Fourier

11.1 Introdução

Nos capítulos anteriores utilizaram-se séries de Fourier na resolução de problemas de valor na fronteira para equações diferenciais parciais definidas em intervalos limitados. A ideia central desta aplicação consiste na representação de funções definidas em intervalos limitados em termos de funções trigonométricas por meio de séries de Fourier, o que é possível em situações muito gerais, como foi visto no capítulo ??.

Para funções definidas em intervalos ilimitados, o desenvolvimento em séries de Fourier é possível apenas para funções periódicas. Contudo, sob condições bastante gerais é possível estender a ideia das séries de Fourier a funções definidas em intervalos ilimitados, mesmo que não sejam periódicas, substituindo as séries por integrais. Obtém-se assim a chamada transformação de Fourier, muito útil em vários domínios da Matemática e aplicações, com destaque para Análise de Sistemas e Sinais, Teoria do Controlo, Robótica, Comunicações, as quais por seu lado têm implicações, directas ou indirectas, nas várias especialidades de Engenharia, Física, Biologia, etc.

A transformação de Fourier permite transformar a resolução de certas equações diferenciais lineares na resolução de equações algébricas e, por isso, é um método de resolução de equações diferenciais útil em muitas situações.

11.2 Definição e propriedades da transformação de Fourier

Para motivar a definição da transformação de Fourier observa-se que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de período $2T$, com $T > 0$, cuja restrição ao intervalo $] -T, T [$ é integrável (à Lebesgue), então a série de Fourier de f pode ser escrita na forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(\pi/T)t}$, com $c_n = (2T)^{-1} \int_{-T}^T f(t) e^{-int} dt$, para $n \in \mathbb{Z}$. Estas relações podem ser escritas, com $\omega_n = n(\pi/T)$, na

forma $(2\pi)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\pi/T) \widehat{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, com $\widehat{f}(\omega_n) = \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$, para $n \in \mathbb{Z}$. Pensando no limite quando $T \rightarrow +\infty$ e observando a analogia da série anterior com uma soma de Riemann para subintervalos de largura π/T , é natural esperar que a série de Fourier dê lugar a um integral impróprio de $-\infty$ a $+\infty$ com os extremos de integração a tenderem simetricamente para $\pm\infty$, a que se chama **valor principal de Cauchy** do integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty}$ e se designa por $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty}$. Assim, espera-se que a série de Fourier dê lugar a

$$(11.1) \quad \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$(11.2) \quad \widehat{f}(\omega) = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Note-se que a função integranda no último integral é mensurável e tem módulo igual a $|f|$. Portanto, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ o valor principal de Cauchy do integral considerado em (11.2) existe e é igual ao integral (de Lebesgue) usual

$$(11.3) \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Assim, para $f \in L^1(\mathbb{R})$ a fórmula (11.3) define uma função $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a que se chama **transformada de Fourier**¹ de f , que também pode ser designada por \widehat{f} ou $[f(t)]^\wedge$, analogamente aos coeficientes de Fourier no capítulo ???. A utilização da mesma notação para transformadas de Fourier e coeficientes de Fourier não deve causar confusão devido às diferenças de contexto e é conveniente pela grande semelhança entre as propriedades de ambas, como se verá. A **transformação de Fourier** \mathfrak{F} é definida em $L^1(\mathbb{R})$ por $\mathfrak{F}[f] = \widehat{f}$.

Dado o paralelismo entre séries de Fourier e integrais de Fourier que se acabou de ilustrar, é de esperar que a teoria dos integrais de Fourier possa ser apresentada seguindo um caminho análogo ao percorrido para as séries de Fourier no capítulo ??.

Analogamente ao que se fez na secção ?? para funções definidas em intervalos limitados, dadas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ define-se a **convolução** de f com g por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¹Há quem defina a transformada de Fourier multiplicando a expressão em (11.3) por $1/\sqrt{2\pi}$ ou por $1/2\pi$, devendo então a expressão em (11.1) ser multiplicada por $\sqrt{2\pi}$ ou 2π , respectivamente.

Pode-se estabelecer um resultado análogo ao teorema (??), mas agora para funções definidas em \mathbb{R} .

(11.4) **Teorema:** Se $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, então $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$, $f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h)$, $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

Dem. Deixa-se como exercício. É análoga à do teorema (??).

A transformação de Fourier satisfaz propriedades análogas às propriedades dos coeficientes de Fourier na Proposição (??).

(11.5) **Proposição:** Seja $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então

1. $(f + g)^\wedge = \widehat{f} + \widehat{g}$;
2. $(af)^\wedge = a\widehat{f}$, $a \in \mathbb{C}$;
3. $\widehat{\widehat{f}}(\omega) = \overline{\widehat{f}(-\omega)}$, $\omega \in \mathbb{R}$;
4. $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}$, $\omega \in \mathbb{R}$;
5. $\widehat{f}_\tau(\omega) = \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega\tau}$, onde $f_\tau(t) = f(t - \tau)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$;
6. $(f * g)^\wedge = \widehat{f} \widehat{g}$;
7. $\widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} = (f * \varphi)(t)$, onde $\varphi(t) = e^{i\omega t}$, $t, \omega \in \mathbb{R}$;
8. Se $F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$ para $t \in \mathbb{R}$, e $F \in L^1(\mathbb{R})$, então $\widehat{F}(\omega) = \widehat{f}(\omega) / (i\omega)$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dem. Deixa-se como exercício.

É também útil conhecer as propriedades na proposição seguinte².

(11.6) **Proposição:** Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Então

1. Se $f' \in L^1(\mathbb{R})$, então $\widehat{f}'(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$;
2. Se $g(t) = -it f(t)$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, então \widehat{f} é diferenciável e $(\widehat{f})' = \widehat{g}$;
3. Se $g(t) = f(t) e^{i\tau t}$, então $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \tau)$, $\omega, \tau \in \mathbb{R}$;
4. Se $g(t) = f(t/\lambda)$ para $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, então $\widehat{g}(\omega) = \lambda \widehat{f}(\lambda\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$;
5. Se $g(t) = f(-t)$ para $t \in \mathbb{R}$, então $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$;

²No apêndice B estabeleceu-se que as hipóteses da 1ª propriedade na proposição seguinte são verificadas se adicionalmente a $f \in L^1(\mathbb{R})$ a função f é **absolutamente contínua**.

6. Se $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ com $G \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Dem. Deixa-se como exercício.

(11.7) **Exemplos:**

1. Seja $f(t) = e^{-a|t|}$ se $t \geq 0$, e $f(t) = 0$ se $t < 0$, onde $a > 0$. A transformada de Fourier de f é (Figura (11.1))

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega}.$$

Figura 11.1: Gráficos de f tal que $f(t) = e^{-a|t|}$ se $t \geq 0$ e $f(t) = 0$ se $t < 0$, e de \hat{f} , para $a = 1$

2. A transformada de Fourier de $g(t) = e^{-a|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ pode ser obtida de forma semelhante, mas notando que em termos da função f do exemplo anterior é $g(t) = f(t) + f(-t)$, das propriedades gerais enunciadas nas duas proposições precedentes obtém-se (Figura 11.2)

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{f}(-\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

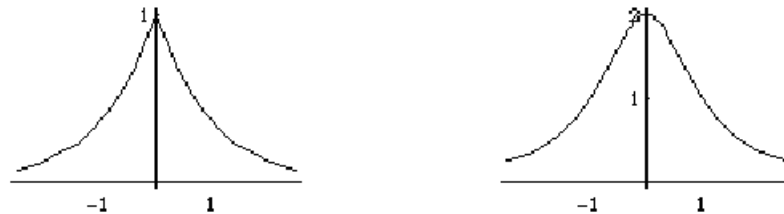


Figura 11.2: Gráficos de $g(t) = e^{-a|t|}$ e de \hat{g} , para $a = 1$

3. Considera-se o impulso em rampa (Figura 11.3)

$$r(t) = \begin{cases} t+1 & , |t| < 1 \\ 0 & , |t| > 1 . \end{cases}$$

A transformada de Fourier de r é

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 (t+1) e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{(t+1) e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} = \frac{-2 e^{-i\omega}}{i\omega} + \left[\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right]_{t=-1}^1 \\ &= \frac{-2 e^{-i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} = \frac{2(i \sin \omega - \cos \omega)}{i\omega} + \frac{2 \sin \omega}{i\omega^2} . \end{aligned}$$

Figura 11.3: Gráficos de r tal que $r(t) = t+1$ se $|t| < 1$ e $r(t) = 0$ se $|t| > 1$, e de \widehat{r}

4. Considera-se o impulso (Figura 11.4)

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T \\ 0 & , |t| > T , \end{cases}$$

onde $T > 0$. A transformada de Fourier de p_T é³

$$\widehat{p}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{i\omega} = \frac{2 \sin \omega T}{\omega} .$$

5. A transformada de Fourier da soma de dois impulsos, dada pela função $f(t) = p_T(t+2T) + p_T(t-2T)$, pode ser facilmente obtida com base no

³Em termos da função sinc introduzida a propósito de séries de Fourier no exemplo (??), pode-se escrever $\widehat{p}_T(\omega) = 2T \operatorname{sinc} \omega T$.

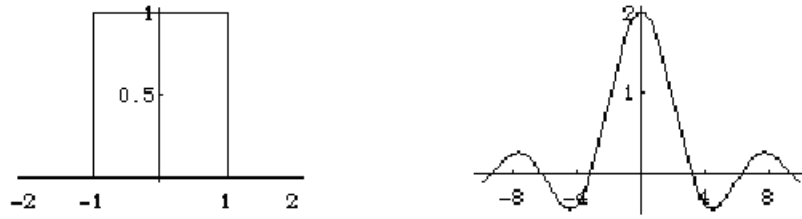


Figura 11.4: Gráficos de p_T e de \widehat{p}_T , para $T=1$

exemplo anterior, na linearidade da Transformação de Fourier e na Proposição (11.5.5) (Figura 11.5)⁴

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \widehat{p}_T(\omega) e^{i\omega 2T} + \widehat{p}_T(\omega) e^{-i\omega 2T} = \widehat{p}_T(\omega) 2 \cos \omega 2T \\ &= \frac{4 \sin \omega T \cos \omega 2T}{\omega}.\end{aligned}$$

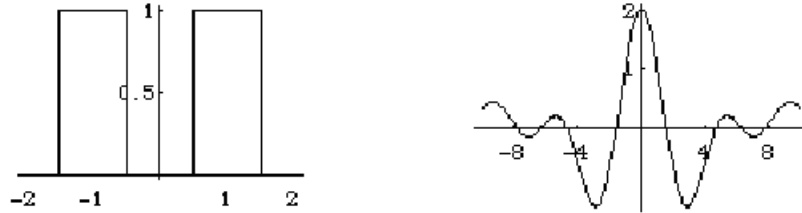


Figura 11.5: Gráficos de $f(t) = p_T(t+2T) + p_T(t-2T)$ e de \widehat{f} , para $T=1/2$

6. Considera-se agora um “impulso modulado” $f(t) = p_T(t) \cos \omega_0 t$. Note-se que $f(t) = [p_T(t) e^{i\omega_0 t} - p_T(t) e^{-i\omega_0 t}] / 2$. Com base no penúltimo exemplo, na linearidade da Transformação de Fourier e na Proposição (11.5.3) obtém-se (Figura 11.6))⁵

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{p}_T(\omega - \omega_0) + \widehat{p}_T(\omega + \omega_0)}{2} = \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0}.$$

⁴Em termos da função sinc, pode-se escrever $\widehat{f}(\omega) = 4T \operatorname{sinc} \omega T \cos \omega 2T$.

⁵Em termos da função sinc, pode-se escrever $\widehat{f}(\omega) = T \operatorname{sinc}(\omega + \omega_0)T + T \operatorname{sinc}(\omega - \omega_0)T$.

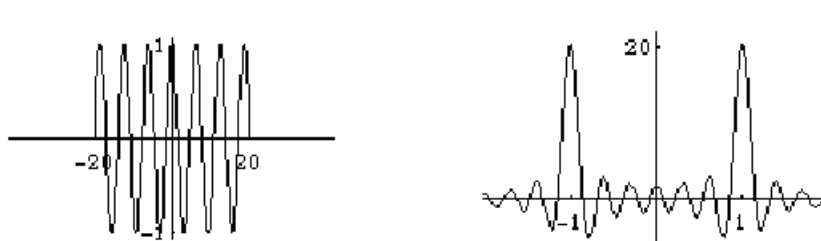


Figura 11.6: Gráficos de $f(t) = p_T(t) \cos \omega_0 t$ e de \hat{f} , com $T = 20$, $\omega_0 = 1$

7. Seja $f(x) = e^{-ax^2}$, onde $a > 0$. Então $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx$. Considerando a função integranda como função de variável complexa $x + iy \in \mathbb{C}$ obtém-se uma função holomorfa no plano complexo que tende para zero no infinito ao longo de qualquer das rectas paralelas ao eixo real. Devido ao Teorema de Cauchy, o integral não muda de valor se for tomado sobre qualquer recta paralela a esse eixo. Assim, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\omega(x+iy)} dx = e^{-ay^2 + \omega y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 + ix(2ay + \omega)} dx.$$



Figura 11.7: Gráficos de $f(x) = e^{-ax^2}$ e de \hat{f} , para $a = 4/5$

Com $y = -\omega/(2a)$ obtém-se

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\omega^2/(4a)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = e^{-\omega^2/(4a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{a}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}.$$

O caso particular com $a = 1/2$ é o da função $g(x) = e^{-x^2/2}$, para a qual $\widehat{g} = \sqrt{2\pi} g$. Assim, esta função tem a propriedade de ser igual à sua transformada de Fourier, a menos de multiplicação por uma constante⁶.

Nos exemplos 2, 5 e 6 as transformadas de Fourier foram obtidas por aplicação das propriedades gerais da transformação de Fourier e de transformadas de Fourier de outras funções já conhecidas, sem calcular integrais. Este procedimento simplifica muito o cálculo de transformadas de Fourier⁷.

O resultado seguinte estabelece que as transformadas de Fourier são funções contínuas que tendem para zero em $\pm\infty$. A esta última propriedade $\widehat{f}(\omega) \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$ é usual chamar **Lema de Riemann-Lebesgue** de forma semelhante à propriedade análoga para séries de Fourier em (??).

(11.8) **Teorema:** Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então \widehat{f} é uma função contínua em \mathbb{R} e $\widehat{f}(\omega) \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Dem. Tem-se

$$\left| \widehat{f}(\omega + \sigma) - \widehat{f}(\omega) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-i\sigma t} - 1| dt.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo a função integranda nesta desigualdade é majorada por $2|f(t)|$ e tende para zero quando $n \rightarrow +\infty$. O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que o integral tende para zero. Portanto $\widehat{f}(\omega_n) \rightarrow \widehat{f}(\omega)$ e \widehat{f} é contínua em \mathbb{R} . A convergência de $\widehat{f}(\omega)$ para zero quando $\omega \rightarrow \pm\infty$ resulta imediatamente de $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt$ e do Lema de Riemann-Lebesgue na forma (??). *Q.E.D.*

11.3 Inversão da transformação de Fourier de funções integráveis C^2

Na motivação da transformação de Fourier a partir de séries de Fourier no início da secção anterior concluiu-se que a série de Fourier dá lugar à

⁶Alguns autores definem a transformação de Fourier dividindo a expressão aqui adotada por $\sqrt{2\pi}$ o que daria neste caso que a transformada de $f(t) = e^{-t^2/2}$ seria esta mesma função e, portanto, f seria um ponto fixo da transformação considerada.

⁷A este procedimento chama-se "cálculo operacional" por se basear nas propriedades do operador transformação de Fourier em conjugação com operações. Assim, é usual obter transformadas de Fourier e transformadas de Fourier inversas com base em expressar as funções consideradas em termos de funções para que já sejam conhecidas, e é mesmo comum usar tabelas de transformadas de Fourier para facilitar este "cálculo operacional".

fórmula (11.1) quando a largura do intervalo de definição das funções consideradas tende para infinito. Uma vez que, sob condições adequadas, a série de Fourier de uma função converge para essa função, é natural esperar que, sob condições análogas, o integral impróprio em (11.1) convirja para f . Dado que a questão considerada é a obtenção da função f a partir da sua transformada de Fourier, diz-se que se pretende estabelecer condições para **inversão da transformação de Fourier** e chama-se **transformada de Fourier inversa** de uma função g definida em \mathbb{R} à função $\mathfrak{F}^{-1}[g]$ dada por

$$(11.9) \quad \mathfrak{F}^{-1}[g](t) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

A \mathfrak{F}^{-1} chama-se **transformação de Fourier inversa**.

Assim, **o análogo da convergência da série de Fourier de f para a própria função f é a transformação de Fourier inversa da transformada de Fourier da função f ser a própria função f .**

Se $g \in L^1(\mathbb{R})$, então a função integranda na fórmula acima da transformação de Fourier inversa é integrável, o valor principal de Cauchy do integral impróprio nessa fórmula converge uniformemente para o integral de g em \mathbb{R} , e $\mathfrak{F}^{-1}[g](t) = \mathfrak{F}[g](-t)/(2\pi)$, para $t \in \mathbb{R}$. Portanto, o domínio da transformação de Fourier inversa contém $L^1(\mathbb{R})$ e neste conjunto a transformação de Fourier inversa é muito parecida com a própria transformação de Fourier. Na verdade, **para funções integráveis a transformação de Fourier e a transformação de Fourier inversa são idênticas a menos de transformações geométricas triviais: uma reflexão em relação à origem no domínio e uma expansão de escala no contradomínio em 2π .**

Tal como para séries de Fourier começamos por considerar a inversão da transformação de Fourier no caso mais simples de funções C^2 , pois para estas funções a ordem de convergência para zero dos valores das suas transformadas de Fourier $\hat{f}(\omega)$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$ é suficientemente elevada para simplificar a questão. A hipótese de f ser C^2 é suficiente para a consideração de séries de Fourier de f porque em intervalos limitados a continuidade de funções implica a sua integrabilidade. No caso de transformadas de Fourier é preciso adicionar a hipótese de integrabilidade de f pois esta não fica automaticamente garantida no intervalo ilimitado $]-\infty, +\infty[$ e é essencial para a própria consideração de transformadas de Fourier. Na verdade, o que fica em questão para uma função f contínua em \mathbb{R} é apenas que convirja para zero no infinito suficientemente rapidamente para o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ existir, o que, em particular, fica assegurado para funções contínuas f se $|f(t)| \leq |t|^{1+\epsilon}$, para algum $\epsilon > 0$, ou por razão maior para funções contínuas de suporte compacto.

No caso de séries de Fourier começou-se por estabelecer no teorema (??) que a convergência uniforme da série de Fourier de uma função contínua f implica que a série converge para a própria função f . O análogo da convergência uniforme da série de Fourier é a convergência uniforme do valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula da transformação de Fourier inversa, que sabemos verificar-se quando a transformação de Fourier é integrável. Assim, é natural começar por estabelecer a inversão da transformação de Fourier para funções com transformadas de Fourier integráveis.

Figura 11.8: Núcleo de Fejér

No caso das séries de Fourier a demonstração baseou-se em obter aproximações da função por polinómios trigonométricos obtidas por convolução da função com o núcleo de Fejér em $[0, 2\pi]$. No caso presente usa-se o **núcleo de Fejér em \mathbb{R}** , definido por qualquer das fórmulas (Figura 11.8)

$$(11.10) \quad K_\lambda(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{\sin \frac{\lambda t}{2}}{\frac{\lambda t}{2}} \right]^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-|\omega|) e^{i\omega\lambda t} d\omega, \text{ com } \lambda > 0.$$

A 1ª fórmula ⁸ não está definida em $t=0$ mas estende-se por continuidade a este ponto com o valor $K_\lambda(0) = \lambda/(2\pi)$. Note-se que com $\lambda = n+1$, a 1ª fórmula para K_λ só difere da 1ª fórmula para o núcleo de Fejér considerado para séries de Fourier em (??) por o denominador ser agora $(\lambda t/2)^2$ quando era $(\sin \lambda t/2)^2$. A igualdade das duas fórmulas resulta simplesmente do seguinte cálculo do integral na 2ª fórmula e de usar uma identidade trigonométrica

⁸Note-se que a 1ª fórmula se pode escrever $K_\lambda(t) = (\lambda t/2) \operatorname{sinc} \lambda t/2$.

para o cosseno do ângulo duplo:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-|\omega|) e^{i\omega\lambda t} d\omega &= \int_0^1 (1-\omega) (e^{i\omega\lambda t} - e^{-i\omega\lambda t}) d\omega \\ &= \left[(1-\omega) \frac{e^{i\omega\lambda t} - e^{-i\omega\lambda t}}{i\lambda t} \right]_{\omega=0}^1 + \int_0^1 \frac{e^{i\omega\lambda t} - e^{-i\omega\lambda t}}{i\lambda t} d\omega \\ &= - \left[\frac{e^{i\omega\lambda t} + e^{-i\omega\lambda t}}{\lambda^2 t^2} \right]_{\omega=0}^1 = 2 \frac{1 - \cos \lambda t}{\lambda^2 t^2} = \left[\frac{\sin \frac{\lambda t}{2}}{\frac{\lambda t}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

O núcleo de Fejér em \mathbb{R} tem as propriedades seguintes.

(11.11) **Proposição:** O núcleo de Fejér K_λ definido por (11.10) é uma função par definida e contínua em \mathbb{R} , com $K_\lambda \geq 0$, $K_\lambda(0) = \lambda/(2\pi)$ e $K_\lambda(t) \rightarrow 0$ para $|t| \rightarrow \infty$, que satisfaz as propriedades seguintes:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda = 1$;
2. $\int_\delta^{+\infty} K_\lambda \rightarrow 0$ para $\lambda \rightarrow +\infty$ qualquer que seja $\delta > 0$.

Dem. As primeiras afirmações são consequências óbvias da 1ª fórmula para K_λ em (11.10) e do prolongamento por continuidade a $t=0$, como indicado acima.

1. a relação acima referida com o núcleo de Féjer no intervalo $[0, 2\pi]$ considerado para séries de Fourier para $\lambda = n+1$ dá

$$\left[\frac{\sin \delta}{\delta} \right]^2 \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_\lambda \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt,$$

pelo que fazendo $n \rightarrow +\infty$ se obtém que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\delta}^{\delta} K_\lambda$ está entre $\sin^2 \delta / \delta^2$ e 1 para todo $\delta > 0$, e portanto este limite é igual a 1. Como, com uma mudança de variável de integração se obtém $\int_{-\delta}^{\delta} K_\lambda = \int_{-\delta}^{\delta} \lambda K_1(\lambda t) dt = \int_{-\lambda\delta}^{\lambda\delta} K_1$, fazendo $\lambda \rightarrow +\infty$ obtém-se $\int_{-\infty}^{+\infty} K_1 = 1$. Também com mudança de variável de integração obtém-se $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} K_1 = 1$.

2. resulta da seguinte uma mudança de variáveis e da integrabilidade de K_1 em \mathbb{R} :

$$\int_\delta^{+\infty} K_\lambda = \int_{\lambda\delta}^{+\infty} K_1 \rightarrow 0, \text{ para } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Q.E.D.

Com o núcleo de Fejér pode-se estabelecer que a inversão de transformadas de Fourier integráveis com base na convolução do núcleo de Fejér

K_λ com uma função integrável convergir na norma de $L^1(\mathbb{R})$ para a própria função f .

(11.12) **Teorema de inversão de transformadas de Fourier integráveis:** *Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então $f = \mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}]$ q.t.p. em \mathbb{R} , e o valor principal de Cauchy do integral impróprio na definição de \mathfrak{F}^{-1} converge uniformemente para f .*

Dem. Seja K_λ o núcleo de Fejér definido em (11.10).

Da definição de convolução, tendo em conta $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda = 1$, e aplicando o Teorema de Fubini obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |(K_\lambda * f)(t) - f(t)| dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t-\tau) - f(t)] K_\lambda(\tau) d\tau \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-\tau) - f(t)| K_\lambda(\tau) dt d\tau \leq 2 \|f\|_{L^1} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda(\tau) d\tau = 2 \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Como para cada $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verifica-se $K_\lambda(\tau) \rightarrow 0$ para $\lambda \rightarrow +\infty$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |(K_\lambda * f)(t) - f(t)| dt = 0,$$

ou seja, $(K_\lambda * f) \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R})$, para $\lambda \rightarrow +\infty$.

Da 2ª fórmula na definição do núcleo de Fejér em (11.10) constata-se que $K_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{K}_\lambda(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, com

$$(11.13) \quad \mathfrak{K}_\lambda(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{|\omega|}{\lambda}\right) & , |\omega| < \lambda \\ 0 & , |\omega| > \lambda \end{cases}$$

Da propriedade (11.6.6), é $(K_\lambda * f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{K}_\lambda(\omega) \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$, o que conjugado com o facto já estabelecido $(K_\lambda * f) \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R})$, para $\lambda \rightarrow +\infty$, implica

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\omega|}{\lambda}\right) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow f \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}), \quad \text{para } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Como $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que o integral na expressão anterior converge uniformemente para $1/(2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}]$. *Q.E.D.*

O resultado anterior permite estabelecer a unicidade da transformada de Fourier, pelo que a transformação de Fourier $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ é uma função injectiva.

(11.14) Teorema de unicidade da transformada de Fourier:

Se as transformadas de Fourier de $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ são iguais, então $f = g$ q.t.p. em \mathbb{R} . Se f e g também são contínuas em \mathbb{R} , então $f = g$ em \mathbb{R} .

Dem. Nas condições referidas $(f - g)^\wedge = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$. Aplicando o teorema de inversão anterior conclui-se que $f - g = 0$ q.t.p. em \mathbb{R} . A última afirmação resulta da simples observação que a função nula é a única função contínua que é zero q.t.p. em \mathbb{R} . *Q.E.D.*

Uma outra consequência simples mas muito útil na utilização prática de transformadas de Fourier é a proposição seguinte que permite obter transformadas de Fourier de funções integráveis que são transformadas de Fourier de outras funções conhecidas. Esta observação corresponde à constatação da inversão da transformação de Laplace no conjunto das funções integráveis que são transformadas de Fourier de alguma função ser igual à própria transformação de Fourier a menos da reflexão no domínio em relação à origem e da expansão de escala no contradomínio em 2π , como já tinha sido sublinhado.

(11.15) Proposição: *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então $g(\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega)$ para $\omega \in \mathbb{R}$ equivale a $f(\omega) = 2\pi \mathfrak{F}[g](-\omega)$ para $\omega \in \mathbb{R}$. Ou seja, se $f, \mathfrak{F}[f] \in L^1(\mathbb{R})$, então $f(\omega) = 2\pi \mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f]](-\omega)$, ou ainda $\mathfrak{F}^{-1}[f](t) = (1/2\pi) \mathfrak{F}[f](-t)$.*

Dem. Resulta simplesmente de constatar que se $g = \mathfrak{F}[f]$ é integrável, então $f = \mathfrak{F}^{-1}[g]$ e

$$\mathfrak{F}[g](-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt = 2\pi \mathfrak{F}^{-1}[g](\omega) = f(\omega).$$

Q.E.D.

Por exemplo, das transformadas de Fourier calculadas nos exemplos (11.7), as dos exemplos 2., 3. e 7. são integráveis. Obtém-se imediatamente dos dois primeiros exemplos que a transformada de Fourier de $t \mapsto 2a/(a^2 + t^2)$ é $\omega \mapsto 2\pi e^{-a|\omega|}$, e a transformada de Fourier de $t \mapsto 2(\sin tT)/t$ é o impulso $\omega \mapsto p_T(\omega)$, onde como no exemplo 3. $p_T(\omega) = 1$ se $\omega < 1$ e $p_T(\omega) = 0$ se $\omega > 1$. Para o exemplo 7. esta observação é inútil porque este é um caso de auto-similaridade da transformada de Fourier, em que a transformada de Fourier da função é igual esta própria função, a menos de mudanças de escala no domínio e no contradomínio.

Os resultados anteriores têm duas outras consequências imediatas que interessa destacar, a primeira das quais é relativa à transformada de Fourier do núcleo de Fejér (Figura 11.9).

Figura 11.9: Transformada de Fourier do núcleo de Fejér

(11.16) **Proposição:** *A transformada de Fourier do núcleo de Fejér tem suporte $[-\lambda, \lambda]$ e no suporte é $\widehat{K}_\lambda(\omega) = 1 - |\omega|/\lambda$. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então $(K_\lambda * f)^\wedge$ tem mesmo suporte e neste $(K_\lambda * f)^\wedge(\omega) = (1 - |\omega|/\lambda) \widehat{f}(\omega)$.*

Dem. A 1ª afirmação é consequência imediata da unicidade de transformadas de Fourier e de K_λ ser igual à transformada de Fourier inversa da função no enunciado.

A 2ª afirmação resulta da propriedade geral da transformada de Fourier da convolução de duas funções ser o produto das respectivas transformadas de Fourier. *Q.E.D.*

A propósito de séries de Fourier foi provado o Teorema de Aproximação de Weierstrass garantindo a densidade dos polinômios trigonométricos em $L^1([0, 2\pi])$, e analisando a demonstração conclui-se que, mais especificamente, dos polinômios trigonométricos cujo período é um submúltiplo inteiro de 2π . Estes polinômios trigonométricos são as funções cujas séries de Fourier têm um número finito de coeficientes de Fourier diferentes de zero. O análogo deste resultado para a transformação de Fourier é a densidade das funções com transformadas de Fourier de suporte compacto em $L^1(\mathbb{R})$ que se estabelece a seguir.

(11.17) **Teorema de aproximação por funções com transformada de Fourier de suporte compacto:** *As funções com transformada de Fourier de suporte compacto são densas em $L^1(\mathbb{R})$.*

Dem. Na demonstração do teorema de inversão de transformadas de Fourier integráveis (11.12) provou-se que o conjunto das funções que são a convolução do núcleo de Frechét com funções integráveis é denso em $L^1(\mathbb{R})$. A proposição anterior implica que estas funções têm suporte compacto. *Q.E.D.*

De forma semelhante ao que se estabeleceu para os coeficientes de Fourier de funções periódicas C^k pode-se estabelecer a ordem de convergência para zero das transformadas de Fourier de funções C^k integráveis e com derivadas integráveis até à ordem k .

(11.18) **Proposição:** *Se $f \in C^k(\mathbb{R})$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ para $j = 1, 2, \dots, k$, então para $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é*

$$|\widehat{f}(\omega)| = |(f^{(j)})^\wedge(\omega)| |\omega|^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \min_{j=0,1,\dots,k} \|f^{(j)}\|_{L^1} |\omega|^{-j}.$$

Dem. Se $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ é $g(t) = \int_{-\infty}^t g'$ e da propriedade (11.5.8) resulta que $\widehat{g}(\omega) = (g')^\wedge(\omega)/(i\omega)$ para $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por indução finita obtém-se $|\widehat{f}(\omega)| = |(f^{(j)})^\wedge(\omega)/(i\omega)^j| = |(f^{(j)})^\wedge(\omega)|/|\omega|^j$ para $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De (11.5.5) é $|\widehat{f}(\omega)| \leq \|f\|_{L^1}$ e $|(f^{(j)})^\wedge(\omega)| \leq \|f^{(j)}\|_{L^1}$, pelo que se obtém a desigualdade pretendida. *Q.E.D.*

A integrabilidade em \mathbb{R} de funções contínuas tem estritamente a ver com a ordem de decrescimento das funções para zero no infinito. Assim, uma condição suficiente para que seja satisfeita para que uma função $f \in C^k(\mathbb{R})$ satisfaça a hipótese da proposição anterior é que existam $K, \epsilon > 0$ tal que $|f^{(j)}(t)| \leq K |t|^{-(1+\epsilon)}$, para $j = 1, 2, \dots, k$. Uma condição simples mais restritiva é a função $f \in C^k(\mathbb{R})$ ter suporte compacto, dado que neste caso a função e todas as derivadas até ordem k são zero suficientemente longe da origem e, portanto são integráveis.

Podemos agora estabelecer a inversão da transformação de Fourier de funções f sem hipóteses sobre a transformada de Fourier da função, no caso simples de $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ devido ao módulo da transformada de Fourier $|\widehat{f}(\omega)|$ decrescer mais rapidamente para zero do que $|\omega|^{-2}$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$ e, portanto, os valores absolutos da função integranda da correspondente transformada de Fourier inversa serem dominados por múltiplos

da função $\omega \mapsto |\omega|^{-2}$ que é integrável em todos os intervalos fechados que não contenham zero.

(11.19) **Teorema:** *Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, então $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e $f = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}]$ em \mathbb{R} , onde o valor principal de Cauchy do integral impróprio na definição de \mathfrak{F}^{-1} converge uniformemente.*

Dem. A proposição (11.18) garante que a função mensurável $|\widehat{f}(\omega)|$ é majorada pela função $\omega \mapsto \|f''\|_{L^1} |\omega|^{-2}$ que pertence a $L^1(\mathbb{R})$, pelo que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e a conclusão resulta do teorema (11.12). *Q.E.D.*

Tal como referido anteriormente, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ tem suporte compacto ficam automaticamente satisfeitas as outras condições da hipótese do resultado anterior, pelo que a inversão da transformada de Fourier é válida para funções C^2 de suporte compacto sem a necessidade de condições adicionais.

11.4 Critério de Dini para inversão da transformação de Fourier

Em consequência do resultado da secção anterior para funções C^2 integráveis, verifica-se $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, não sendo necessário considerar o valor principal de Cauchy do correspondente integral impróprio, o qual, aliás, converge uniformemente para o valor do integral pois $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Por isso, poder-se-ia à primeira vista pensar que não há necessidade de definir a transformação inversa de Fourier pelo valor principal de Cauchy de um integral impróprio em vez de ser definida pelo correspondente integral de Lebesgue em $]-\infty, +\infty[$. Contudo, é fácil ver que uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ que não é igual q.t.p. a uma função contínua não pode ter transformada de Fourier integrável. Caso contrário, devido aos teoremas (??) e (11.8), a transformada de Fourier inversa seria igual a uma função contínua, o que é contraditório. Na verdade, é o que acontece para as funções consideradas nos exemplos (11.7.3) a (11.7.5). Portanto, pelo menos nos casos referidos, a inversão da transformação de Fourier exige a consideração do valor principal de Cauchy de um integral impróprio como indicado na fórmula (11.9), o que acontece para uma classe mais ampla de funções. A situação aqui é análoga da convergência pontual de séries de Fourier.

A propósito da convergência pontual de séries de Fourier estabeleceu-se o Critério de Dini. Agora estabelece-se o resultado correspondente de inversão da transformação de Fourier. Tal como na secção precedente, segue-se um

caminho análogo ao percorrido para estabelecer o Critério de Dini para séries de Fourier.

Começa-se por observar que a convergência do valor principal do integral impróprio em (11.9) num ponto depende apenas do comportamento local da função f numa vizinhança desse ponto, de forma semelhante ao que se estabeleceu para séries de Fourier, apesar da transformada de Fourier de f ser definida por um integral que considera a função em todo \mathbb{R} .

(11.20) **Princípio de Localização de Riemann:** Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, o integral impróprio

$$\frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

converge num ponto $t \in \mathbb{R}$ se e só se para algum $\delta > 0$ existe o limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \frac{\sin T\tau}{\tau} d\tau,$$

que, em caso afirmativo é igual ao valor principal de Cauchy do integral impróprio.

Dem. Começa-se por observar da definição de \widehat{f} que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(t-s) ds + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin \omega(t-s) ds. \end{aligned}$$

É óbvio que o primeiro integral no lado direito define uma função par de ω e o segundo uma função ímpar. Da continuidade de \widehat{f} estabelecida no teorema (11.8) resulta que essas duas funções são contínuas. Assim, obtém-se

$$\frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{T \rightarrow +\infty} H(T),$$

onde

$$H(T) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(t-s) ds d\omega.$$

Logo, a convergência em valor principal de Cauchy do integral impróprio considerado é equivalente à convergência de $H(T)$ quando $T \rightarrow \infty$, e ambos os limites têm o mesmo valor. Portanto, interessa provar que $\lim_{T \rightarrow \infty} H(T)$ é igual ao limite considerado no enunciado.

Aplicando os teoremas de Tonelli e Fubini, e mudando de variável de

integração

$$\begin{aligned} H(T) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \int_0^T \cos \omega(t-s) d\omega ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{\sin T(t-s)}{t-s} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) \frac{\sin T\tau}{\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \frac{\sin T\tau}{\tau} d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \frac{\sin T\tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_\delta^{+\infty} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \sin T\tau d\tau. \end{aligned}$$

Para terminar a demonstração basta provar que o último integral converge para zero quando $T \rightarrow +\infty$. Ora, para $\tau > \delta$ é

$$\left| \frac{(f(t+\tau) + f(t-\tau))}{\tau} \right| \leq \frac{|f(t+\tau)| + |f(t-\tau)|}{\delta},$$

pelo que a integrabilidade de f implica a integrabilidade da função $\tau \mapsto [f(t+\tau) + f(t-\tau)]/\tau$. O Lema de Riemann-Lebesgue (??) implica que o último integral converge para zero quando $T \rightarrow +\infty$. *Q.E.D.*

Estabelece-se agora o Teorema de Inversão da Transformação de Fourier análogo ao Critério de Dini considerado na secção ?? para convergência pontual de séries de Fourier para funções seccionalmente diferenciáveis.

(11.21) **Teorema (Critério de Dini para inversão da transformação de Fourier):** Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, o limite da função $g(\tau) = [f(t+\tau) + f(t-\tau)]/2$ para $\tau \rightarrow 0$ existe, e para algum $\delta > 0$ a função $k_t(\tau) = [g(\tau) - \lim_{h \rightarrow 0} g(\tau)]/\tau$ é integrável em $[0, \delta]$, então $\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} [f(t+h) + f(t-h)]/2$. Em particular, $\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t)$ é $f(t)$ se f é contínua em t e é a média dos limites laterais esquerdo e direito de f em t se f tem uma descontinuidade de salto em t .

Dem. Do Princípio de Localização de Riemann anterior o valor principal de Cauchy do integral impróprio que dá $\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t)$ converge se e só se existe o limite

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^\delta g(\tau) \frac{\sin T\tau}{\tau} d\tau &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^\delta k_t(\tau) \sin T\tau d\tau \\ &+ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \left(\frac{\sin T\tau}{\tau} - \frac{\pi}{2\delta} \right) d\tau + \frac{\pi}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2}, \end{aligned}$$

e, caso este limite exista, é igual a $(\pi/2) \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t)$.

Do Lema de Riemann-Lebesgue o primeiro limite do lado direito é zero. O limite no 2º termo do lado direito, após mudança de variáveis de integração é $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^{T\delta} (\sin s)/s ds - \pi/2$, e como o lema que se segue a esta

demonstração dá que o limite do integral nesta expressão converge para $\pi/2$, o segundo limite do lado direito da expressão acima também é zero. Portanto, $(\pi/2) \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}](t)$ é igual à última parcela do lado direito na expressão, o que conclui a demonstração. *Q.E.D.*

$$(11.22) \text{ Lema: } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R (\sin t)/t dt = \pi/2.$$

Dem. Calcula-se o integral com métodos de Análise Complexa⁹. A função complexa $(\sin z)/z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2iz)$ estendida por continuidade a $z=0$ é holomorfa em \mathbb{C} . O Teorema de Cauchy garante que para $R > 1$ verifica-se

$$\int_{-R}^R \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = \pi [\varphi_R(1) - \varphi_R(-1)],$$

onde γ_R é o caminho indicado na Figura 11.10 e $\varphi_R(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_R} e^{itz}/z dz$. A função $z \mapsto e^{itz}/z$ tem um pólo simples em $z=0$, onde o resíduo é 1. Logo, prolongando o caminho dado de modo a fechá-lo pela semicircunferência α_R de raio R no semiplano complexo inferior e pela semicircunferência β_R também de raio R mas no semiplano complementar (Figura 11.10), obtém-se com a teoria dos resídus as duas fórmulas seguintes

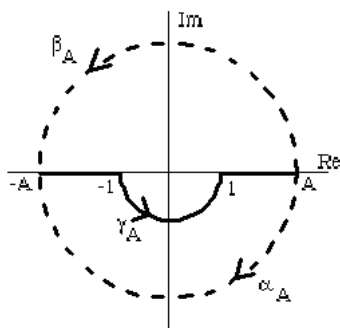


Figura 11.10: Caminho de integração no plano complexo para calcular $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R (\sin t)/t dt = \pi/2$ pelo Teorema dos Resídus

$$\varphi_R(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} \frac{e^{itz}}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^0 \frac{\exp(itR e^{i\theta})}{R e^{i\theta}} iR e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \exp(itR e^{i\theta}) d\theta,$$

$$\varphi_R(t) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_R} \frac{e^{itz}}{z} dz = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \exp(itR e^{i\theta}) d\theta.$$

⁹São frequentemente úteis métodos de Análise Complexa para cálculo de transformadas de Fourier ou das suas inversas, em particular devido à conveniência resultante do Teorema de Cauchy e do relacionado Teorema dos Resídus.

Como $|\exp(itRe^{i\theta})| = \exp(-Rt \sin \theta) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow +\infty$ se $t \sin \theta > 0$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue dá que os integrais no lado direito em cada uma das duas fórmulas anteriores tendem para zero se, respectivamente, $t < 0$ e $t > 0$. Portanto $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi_R(-1) = 0$ e $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi_R(-1) = 1$. Aplicando estes resultados na 1ª fórmula desta demonstração e notando que a função $t \mapsto (\sin t)/t$ é par, obtém-se a fórmula no enunciado. Q.E.D.

Tal como se observou a propósito de séries de Fourier, a verificação directa do critério de Dini é, em geral, incómoda, pelo que convém conhecer condições mais simples de verificar que impliquem a validade deste critério. Uma destas condições é a continuidade à Lipschitz à esquerda e à direita de um ponto, como foi estabelecido para séries de Fourier no corolário (??), e se afirma agora para transformadas de Fourier.

(11.23) **Corolário:** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é contínua à Lipschitz à esquerda e à direita de um ponto $t \in \mathbb{R}$, então o valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula da transformada de Fourier inversa de f converge pontualmente em t e têm-se as conclusões do critério de Dini em t .*

Dem. A demonstração é a mesma do corolário (??), mas utilizando o critério de Dini para a transformação de Fourier. Q.E.D.

Como pode ser útil dispor de condições de formulação simples baseadas nos resultados anteriores que garantam a convergência pontual de transformadas de Fourier inversas em todos os pontos de \mathbb{R} , também se afirma aqui o resultado correspondente ao estabelecido no corolário (??) para séries de Fourier de funções seccionalmente lipschitzianas.

(11.24) **Corolário:** *Se f é uma função seccionalmente lipschitziana em \mathbb{R} , então o valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula da transformada de Fourier inversa de f converge pontualmente em todos os pontos: em pontos t de continuidade de f para $f(t)$ e em pontos τ de descontinuidade de f para a média dos limites laterais de f em τ .*

Dem. A demonstração é a mesma do corolário (??), mas utilizando o critério de Dini para a transformação de Fourier. Q.E.D.

Para o Critério de Dini anterior é imprescindível considerar a transformação de Fourier inversa definida em termos de valores principais de Cauchy

de integrais impróprios. Para funções integráveis e seccionalmente diferenciáveis que tenham descontinuidades por saltos a necessidade de considerar a transformação de Fourier inversa definida em termos de valores principais de Cauchy de integrais impróprios resulta das observações no início da presente secção, mas na verdade tal é necessário para uma classe mais ampla de funções.

A inversão da transformação de Fourier de funções f integráveis C^2 pôde ser facilmente obtida na secção anterior em consequência dos módulos das transformadas de Fourier $|\widehat{f}(\omega)|$ decrescerem mais rapidamente para zero do que $|\omega|^{-2}$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$ e, portanto, os valores absolutos das funções integrandas das correspondentes transformadas de Fourier inversas serem dominados por múltiplos da função $\omega \mapsto |\omega|^{-2}$ que é integrável em todos os intervalos cujo fecho não contém zero. Neste caso o valor principal de Cauchy do integral impróprio considerado na transformação inversa de Fourier converge uniformemente em \mathbb{R} .

A majoração correspondente para funções C^1 leva à função $\omega \mapsto |\omega|^{-1}$ que não é integrável em intervalos ilimitados, pelo que o argumento não pode ser aplicado neste caso. Contudo, também analogamente a séries de Fourier, é possível estender a inversão da transformação de Fourier para funções C^1 , e até para funções diferenciáveis f com hipóteses adicionais de integrabilidade.

No caso das séries de Fourier bastou adicionar à diferenciabilidade de f a hipótese de f' ser integrável, pois num intervalo limitado tal implica que f' é de quadrado integrável (o que é essencial na demonstração dada que usa a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as séries de Fourier que assim são de quadrado somável) e, além disso, a continuidade de integrais indefinidos de f garante a integrabilidade da própria função f (o que é necessário para considerar coeficientes de Fourier e transformadas de Fourier). Como estas condições não são automaticamente satisfeitas no intervalo ilimitado $]-\infty, +\infty[$, a condição de f ser integrável e \widehat{f}' ser de quadrado integrável¹⁰ têm de ser adicionadas às hipóteses de diferenciabilidade de f e integrabilidade de f' .

Além disso, como se viu na secção anterior, a inversão de transformadas de Fourier integráveis é o análogo natural do resultado que estabelece que a convergência uniforme da série de Fourier de um função contínua implica que o limite da série é a própria função. A inversão de transformadas de Fourier integráveis, por si só, não garante que a convergência uniforme para uma função h do valor principal de Cauchy do integral impróprio na definição da transformada de Fourier inversa de uma função $g = \mathfrak{F}[f]$ implique $h = f$, pois g pode não ser integrável (e também a correspondente função integranda pode não ser integrável (à Lebesgue) em \mathbb{R} mas existir o valor

¹⁰No Apêndice D prova-se que se $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então $\widehat{f}' \in L^2(\mathbb{R})$.

principal de Cauchy do integral impróprio). Contudo, o Critério de Dini que se acabou de demonstrar permite estabelecer a inversão da transformação de Fourier de funções $f \in C^1$ integráveis com derivada de quadrado integrável, precisamente com a mesma ideia utilizada para séries de Fourier de funções diferenciáveis com derivada de quadrado integrável. Para séries de Fourier a ideia consistiu em majorar somas de termos simétricos da série de Fourier por uma função integrável em vez dos próprios termos da série e para integrais de Fourier a ideia análoga é majorar integrais da transformada de Fourier em subintervalos simétricos em vez da própria transformada de Fourier. Em ambos os casos esta majoração é feita com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, de onde a necessidade da hipótese de quadrado integrável.

Como já foi mencionado, no Apêndice D prova-se que $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ implica $\widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R})$, pelo que a condição na hipótese do resultado seguinte pode ser substituída por $f \in L^1(\mathbb{R})$ ser diferenciável e $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(11.25) **Teorema:** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é diferenciável em \mathbb{R} , $f' \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R})$, então $f = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{f}]$ em \mathbb{R} , onde o valor principal de Cauchy do integral impróprio na definição de \mathfrak{F}^{-1} converge uniformemente.*

Dem. Verifica-se $f(t) = \int_{-\infty}^t f'$. A propriedade (11.5.8) dá $\widehat{f}(\omega) = \widehat{f'}(\omega)/(i\omega)$ para $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $1 < A < B$

$$\int_{\{A < |\omega| < B\}} |\omega \widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |(\widehat{f'})(\omega)|^2 d\omega = \|(\widehat{f'})\|_{L^2}^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtém-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{A < |\omega| < B\}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right| &= \left| \int_{\{A < |\omega| < B\}} \omega \widehat{f}(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega \right| \\ &\leq \left(\int_{\{A < |\omega| < B\}} |\omega \widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \left(\int_{\{A < |\omega| < B\}} \left| \frac{e^{i\omega t}}{\omega} \right|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &\leq \|(\widehat{f'})\|_{L^2}^2 \left(2 \int_A^B \frac{1}{\omega^2} d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como o integral impróprio $\int_1^{+\infty} 1/\omega^2 d\omega$ é convergente, também

$$\int_{-B}^{-1} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_1^{+B} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

converge uniformemente em \mathbb{R} quando $B \rightarrow +\infty$. Devido ao teorema (11.8) a transformada de Fourier \widehat{f} é contínua em \mathbb{R} , pelo que o integral de Riemann

$\int_{-1}^{+1} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ existe. Portanto,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

define uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e o valor principal de Cauchy do integral impróprio converge uniformemente em \mathbb{R} .

O Critério de Dini em (11.21) assegura que $g = f$. *Q.E.D.*

No apêndice D estabelece-se o Teorema de Inversão da Transformação de Fourier sob outros tipos de condições. Em particular, da analogia com séries de Fourier, é de esperar que as condições para funções de quadrado integrável sejam particularmente simples.

11.5 Fenómeno de Gibbs na transformação de Fourier

Dado o paralelismo entre séries de Fourier e transformação de Fourier não é de estranhar que também seja observado o Fenómeno de Gibbs com a transformação de Fourier quando na fórmula da transformação inversa de Fourier se consideram as aproximações sucessivas do valor principal de Cauchy do integral impróprio por integrais centrados em zero de larguras finitas tendentes para infinito.

Para ilustrar o Fenómeno de Gibbs na transformação de Fourier consideram-se os exemplos análogos dos considerados para séries de Fourier, nomeadamente o de um impulso rectangular e o de um impulso em rampa.

(11.26) Exemplos:

1. Sabe-se do exemplo (11.7.4) que a transformada de Fourier de um impulso rectangular de altura 2

$$2p_T(t) = \begin{cases} 2 & , |t| < T \\ 0 & , |t| > T \end{cases}$$

é

$$2\widehat{p}_T(\omega) = \frac{4 \sin \omega T}{\omega}.$$

Com base no Critério de Dini, sabe-se que a transformação inversa de Fourier de \widehat{p}_T dá a função original p_T nos pontos de continuidade e dá o valor médio dos limites laterais nos pontos de descontinuidade,

neste caso o valor 1 nos pontos $\pm T$. Para simplicidade de notação prolonga-se a função inicial a estes dois pontos com o valor indicado.

A transformação de Fourier inversa dá

$$2p_T(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{p_T}](t) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sin \omega T}{\omega} e^{i\omega t} d\omega .$$

Considera-se a aproximação- Ω da transformada de Fourier inversa que corresponde aos extremos de integração iguais a $\pm\Omega$, com $\Omega > 0$. Obtém-se para $\pi/2$ vezes a aproximação da transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{2i\omega} e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{e^{i\omega(t+T)} - e^{i\omega(t-T)}}{2i\omega} d\omega \\ &= \int_0^{+\Omega} \frac{e^{i\omega(t+T)} + e^{-i\omega(t+T)} - e^{i\omega(t-T)} + e^{-i\omega(t-T)}}{2i\omega} d\omega \\ &= \int_0^{\Omega} \frac{\sin \omega(t+T)}{\omega} d\omega - \int_0^{\Omega} \frac{\sin \omega(t-T)}{\omega} d\omega . \end{aligned}$$

Assim, definindo a função dada por

$$(11.27) \quad \phi_{\Omega}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin \Omega s}{s} ds - 1 ,$$

obtém-se para a aproximação- Ω da transformada de Fourier inversa $\phi_{\Omega}(t+T) - \phi_{\Omega}(t-T)$, ou seja a aproximação- Ω é a diferença de translações de ϕ_{Ω} no domínio por comprimentos iguais à distância da origem aos pontos de descontinuidade do impulso rectangular, e

$$\mathfrak{F}^{-1}[2\widehat{p_T}](t) = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \phi_{\Omega}(t+T) - \phi_{\Omega}(t-T) .$$

É de notar a semelhança entre a função ϕ_{Ω} que descreve as aproximações- Ω da transformada de Fourier inversa correspondente ao impulso de altura 2 e largura $2T$ centrado na origem e a função Φ_n , definida em (??) que foi usada para descrever o fenómeno de Gibbs para a função periódica de impulsos rectangulares de altura 2 e largura 2π , definida por

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin ns}{\sin s} ds - 1 , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Na verdade, ϕ_n só difere de Φ_n pelo denominador da função integranda na 1ª ser s e na 2ª ser $\sin s$, o que para valores de s próximos de zero é idêntico até à 3ª ordem em s . Em particular, o 1º extremo de ϕ_{Ω} para $t > 0$ ocorre no ponto $t > 0$ tal que $\sin \Omega t = 0$, ou seja $t = \pi/\Omega$,

e é um máximo relativo porque $\phi''_{\Omega}(\pi/\Omega) = -2\Omega^2/\pi < 0$. O valor deste máximo relativo é

$$\phi_{\Omega}\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/\Omega} \frac{\sin \Omega s}{s} ds - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sinc } \tau d\tau - 1.$$

e, portanto, não só é independente de Ω como é igual ao mesmo $\Delta = 0,1789797\dots$ encontrado a propósito de Fenómeno de Gibbs em séries de Fourier. Dado que $\phi_{\Omega} + 1$ é uma função ímpar, quando $\Omega \rightarrow +\infty$ o limite do gráfico de ϕ_{Ω} em $t = 0$ é o segmento de recta $\{0\} \times [-\Delta, 2 + \Delta]$.

Da mesma forma como se fez para Φ_n , prova-se que os extremos relativos alternam entre máximos e mínimos relativos, a sucessão dos valores absolutos dos extremos relativos de ϕ_{Ω} ao longo de $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ é estritamente decrescente para zero em $+\infty$ e, para cada k fixo, o ponto onde ocorre o k -ésimo extremo relativo tende para zero quando $\Omega \rightarrow +\infty$.

Tal como no exemplo correspondente de séries de Fourier, pode-se concluir que a convergência da transformada de Fourier inversa para o impulso rectangular considerado é uniforme em subconjuntos fechados de \mathbb{R} sem pontos de descontinuidade, ou seja, em conjuntos fechados que não contenham os pontos $\pm T$, e não é uniforme em qualquer conjunto que contenha um destes pontos, embora o gráfico da aproximação- Ω da transformada de Fourier inversa convirja uniformemente para a união do gráfico do impulso rectangular considerado com os dois segmentos de recta verticais nos pontos de descontinuidade $\{\pm T\} \times [-\Delta, 2 + \Delta]$ que excedem em Δ os limites laterais do impulso rectangular considerado nestes pontos, o maior dos limites laterais no sentido positivo das ordenadas e o menor dos limites laterais no sentido negativo das ordenadas (Figura 11.11).

2. Considera-se o impulso em rampa linear crescente de altura 2 e largura 1 centrado em zero

$$\mathfrak{S}(t) = \begin{cases} 1+t, & t \in]-1, 1[\\ 0 & , t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Sabe-se do exemplo (11.7.3) que a transformada de Fourier desta função é

$$\widehat{\mathfrak{S}}(\omega) = \frac{-2e^{-i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2}.$$

Com base no Critério de Dini, sabe-se que a transformação inversa de Fourier de $\widehat{\mathfrak{S}}$ dá a função original \mathfrak{S} nos pontos de continuidade, logo também o valor 0 no ponto -1 , e dá o valor médio dos limites laterais nos pontos de descontinuidade, neste caso o valor 1 no ponto

Figura 11.11: Fenómeno de Gibbs na transformação de Fourier inversa para um impulso rectangular de altura 2 e largura $2T$ centrado em $t=0$

1. Para simplicidade de notação prolonga-se a função inicial a estes dois pontos com o valor indicado.

A transformação de Fourier inversa dá

$$\mathfrak{S}(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{\mathfrak{S}}](t) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-2e^{-i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

Observa-se que, com a função ϕ_Ω definida em (11.27), se verifica

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{-2e^{-i\omega}}{i\omega} d\omega = \frac{-2}{\pi} \int_0^\Omega \frac{\sin \omega(t-1)}{\omega} d\omega = -\phi_\Omega(t-1) - 1.$$

Assim, considerando também a função ψ_Ω definida por

$$\psi_\Omega(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} e^{i\omega t} d\omega,$$

obtém-se que a aproximação- Ω da transformada de Fourier inversa é neste caso igual a $\psi_\Omega(t) - \phi_\Omega(t-1) - 1$, ou seja a aproximação- Ω é a diferença entre ψ_Ω e a translação de ϕ_Ω no domínio por um comprimento igual à distância da origem ao ponto de descontinuidade da função dada menos 1, e

$$\mathfrak{F}^{-1}[\widehat{\mathfrak{S}}](t) = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} [\psi_\Omega(t) - \phi_\Omega(t-1) - 1].$$

A análise da função ϕ_Ω já foi feita no exemplo anterior. Resta analisar a função ψ_Ω .

Figura 11.12: Caminhos de integração no plano complexo para calcular $h_{\Omega,\delta}(t)$ pelo Teorema dos Resíduos

Para analisar ψ_Ω de uma forma expedita usam-se aqui métodos de Análise Complexa¹¹. Começa-se por observar que com uma mudança da variável de integração para o simétrico

$$\psi_\Omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Adicionando esta fórmula e a da definição de ψ_Ω , obtém-se

$$\psi_\Omega(t) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{(e^{i\omega} - e^{-i\omega})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})}{\omega^2} d\omega.$$

O valor deste integral de uma função de variável real pode ser calculado integrando a função de variável complexa $z \mapsto (e^{iz} - e^{-iz})(e^{izt} - e^{-izt})/z^2$. Esta função estendida por continuidade a $z = 0$, com o valor $-4t$, é holomorfa em \mathbb{C} . O Teorema de Cauchy garante que para $0 < 1 < \Omega$ é

$$\psi_\Omega(t) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\gamma_\Omega} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{izt} - e^{-izt})}{z^2} dz,$$

onde γ_Ω é o caminho indicado na Figura 11.12, que consiste na concatenação do segmento de recta no eixo real de $-\Omega$ a -1 , com a semicircunferência de raio 1 e centro na origem contida no semiplano

¹¹Como já foi referido, são frequentemente úteis métodos de Análise Complexa para cálculo de transformadas de Fourier ou das suas inversas, em particular devido à simplificação que pode resultar do Teorema de Cauchy e do relacionado Teorema dos Resíduos.

complexo inferior, e com o segmento de recta no eixo real de 1 a $+\Omega$. Com $h_\Omega(t) = 1/(2\pi i) \int_{\gamma_\Omega} e^{izt}/z^2 dz$, obtém-se da fórmula de definição de ψ_Ω que $\psi_\Omega(t) = i [h_\Omega(t-1) - h_\Omega(t+1)]$.

A função complexa $z \mapsto e^{izt}/z^2$ é uma função meromorfa em \mathbb{C} com um pólo de ordem 2 na origem, onde tem resíduo it , dado que $e^{izt}/z^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (izt)^k/k!$ e o coeficiente de z^{-1} nesta expansão é it . Prolongando o caminho γ_Ω de modo a fechá-lo pela semicircunferência α_Ω de raio Ω no semiplano complexo inferior e pela semicircunferência β_Ω também de raio Ω mas no semiplano superior (Figura 11.12), com o Teorema dos Resíduos¹² obtém-se para $h_\Omega(t)$ as duas fórmulas seguintes

$$\begin{aligned} h_\Omega(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_\Omega} \frac{e^{itz}}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^0 \frac{\exp(it\Omega e^{i\theta})}{\Omega^2 e^{2i\theta}} \Omega e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\exp(it\Omega e^{i\theta})}{\Omega e^{i\theta}} d\theta, \\ h_\Omega(t) &= it - \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_\Omega} \frac{e^{itz}}{z^2} dz = it - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\exp(it\Omega e^{i\theta})}{\Omega e^{i\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Como $|\exp(it\Omega e^{i\theta})/(\Omega e^{i\theta})| = \exp(-\Omega t \sin \theta)/\Omega \rightarrow 0$ quando $\Omega \rightarrow +\infty$ se $t \sin \theta > 0$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue dá que os integrais no lado direito em cada uma das duas fórmulas anteriores tendem para zero se, respectivamente, $t < 0$ e $t > 0$. Portanto $\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} h_\Omega(t) = 0$ se $t < 0$, e $\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} h_\Omega(t) = it$ se $t > 0$, e

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \psi_\Omega(t) = i \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} [h_\Omega(t-1) - h_\Omega(t+1)] = \begin{cases} 2 & , t > 1 \\ t+1 & , |t| < 1 \\ 0 & , t < -1, \end{cases}$$

assim como, para $t \geq 0$,

$$\left| \psi_\Omega(t) - \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \psi_\Omega(t) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-\Omega \sin \theta}}{\Omega} d\theta.$$

Como o integral no lado direito converge para zero quando $\Omega \rightarrow +\infty$, qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\Omega > \epsilon$ implica que o lado esquerdo da desigualdade é menor do que ϵ para todo $t > 0$, ou seja $\psi_\Omega \rightarrow 0$ uniformemente quando $\Omega \rightarrow +\infty$. Como tanto ψ_Ω como $\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \psi_\Omega$ são funções ímpares, a convergência é uniforme em \mathbb{R} .

¹²O Teorema dos Resíduos pode ser consultado em textos básicos de Análise Complexa, como por exemplo o texto do autor *Análise Complexa de Uma Variável e Aplicações*, Departamento de Matemática, IST, 2005.

Conclui-se que a transformada de Fourier inversa do impulso em rampa considerado converge uniformemente para essa mesma função em subconjuntos fechados de \mathbb{R} sem pontos de descontinuidade, ou seja, em conjuntos fechados que não contenham o ponto 1, e a convergência não é uniforme em qualquer conjunto que contenha este ponto, embora o gráfico da aproximação- Ω da transformada de Fourier inversa convirja uniformemente para a união do gráfico do impulso em rampa considerado com o segmento de recta vertical no ponto de descontinuidade $\{1\} \times [-\Delta, 2+\Delta]$ que excedem em $\Delta = 0,1789797\dots$ os limites laterais do impulso em rampa considerado no ponto 1, o maior dos limites laterais no sentido positivo das ordenadas e o menor dos limites laterais no sentido negativo das ordenadas (Figura 11.13).

Figura 11.13: Fenómeno de Gibbs na transformação de Fourier inversa para um impulso em rampa de altura 2 e largura 2 centrado em $t=0$

Analogamente a séries de Fourier, o Fenómeno de Gibbs na Transformação de Fourier descrito nos exemplos anteriores é paradigmático do que acontece em geral com a inversão da transformação de Fourier de funções integráveis e seccionalmente diferenciáveis com derivada integrável e de quadrado integrável em \mathbb{R} , e possivelmente com descontinuidades de salto. O resultado seguinte estabelece este facto e que a transformação de Fourier inversa de funções deste tipo converge em todos os pontos. Em subconjuntos fechados de \mathbb{R} sem pontos de descontinuidade da função a convergência é uniforme para a própria função, e em pontos de descontinuidade a convergência é para a média dos limites laterais nesses pontos e não é uniforme em qualquer conjunto que contenha pontos de descontinuidade.

Como já foi mencionado a propósito de séries de Fourier, no Apêndice D prova-se que $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ implica $\widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R})$, pelo que a condição na hipótese do resultado seguinte pode ser substituída por f ser seccionalmente diferenciável com $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Além disso, como as funções seccionalmente diferenciáveis de suporte compacto são necessariamente integráveis e como em intervalos compactos I se verifica sempre $L^2(I) \subset L^1(I)$, obtêm-se as conclusões do resultado seguinte sob a hipótese de simplesmente f ser seccionalmente diferenciável com suporte compacto e $f' \in L^2(\mathbb{R})$, condições estas que são asseguradas pela hipótese mais restritiva mas ainda mais simples de verificar de f ser seccionalmente C^1 com suporte compacto.

(11.28) **Teorema:** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é seccionalmente diferenciável com $f' \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R})$, então o valor principal de Cauchy do integral impróprio na fórmula de inversão da transformação de Fourier converge em todos os pontos: para $f(t)$ se t é um ponto de continuidade e para a média dos limites laterais, $[f(t-) + f(t+)]/2$, se t é um ponto de descontinuidade. A convergência é uniforme em subconjuntos fechados de \mathbb{R} sem pontos de descontinuidade de f .*

Na vizinhança de qualquer ponto de descontinuidade a convergência não é uniforme e ocorre o Fenómeno de Gibbs, com overshooting e undershooting, respectivamente do lado do limite lateral de f maior e menor nesse ponto. Mais especificamente, o gráfico da aproximação- Ω da transformada de Fourier inversa da função converge uniformemente para a união do gráfico de f com segmentos de recta verticais em cada ponto de descontinuidade que excedem em ambos os sentidos o segmento de recta delimitado pelos limites laterais de f , em comprimentos iguais a cerca de 8,95% do salto nesse ponto, mais precisamente a

$$\frac{|f(t+) - f(t-)|}{2} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau - 1 \right] = |f(t+) - f(t-)| \cdot 0,0894899 \dots$$

Dem. A demonstração é semelhante à do resultado análogo para séries de Fourier e deixa-se como exercício. *Q.E.D.*

11.6 Notas históricas

A transformação de Fourier foi introduzida pelo próprio J. Fourier, por S.D. Poisson e por A.L. Cauchy.

A primeira contribuição de Fourier foi num artigo sobre a propagação do calor apresentado à Academia das Ciências de Paris em 1811 e publicado

apenas em 1824, devido à controvérsia gerada pelas suas contribuições sobre séries de Fourier, embora também fosse referida no seu livro *La Théorie Analytique de la Chaleur* publicado em 1822. Os trabalhos de Fourier contêm a fórmula integral de Fourier para a inversão da transformação de Fourier, embora sem ter sido estabelecida de forma rigorosa.

Poisson introduziu o integral de Fourier num artigo com o título *Mémoire sur la théorie des ondes* publicado também em 1816.

Cauchy introduziu o integral de Fourier num artigo de 1816 com o título *Théorie de la propagation des ondes* que foi o primeiro trabalho sistemático sobre ondas de superfície em fluidos. Em 1823 e 1827, Cauchy considerou o teorema do integral de Fourier relativo à inversão da transformação de Fourier, tomada como função de variável complexa, e aplicou integrais de contorno no plano complexo para calcular inversas de transformadas de Fourier a propósito da resolução de equações diferenciais parciais. Em 1825 e 1845 Cauchy também trabalhou em métodos de "cálculo operacional" para resolver equações diferenciais, embora este tipo de métodos já tivesse sido usado anteriormente por outros autores.

Em 1836, J. Liouville considerou a passagem de séries de Fourier a integrais de Fourier, ou seja de espectro discreto a espectro contínuo, em relação com a equação do calor e com base no trabalho de Poisson.

Contudo, a transformação de Fourier só foi tornada rigorosa com trabalhos de vários matemáticos no final do século XIX e no início do século XX, inclusivamente com a adopção do integral de Lebesgue. O desenvolvimento da análise de Fourier veio a originar a área da matemática conhecida por Análise Harmónica. Charles Louis Fefferman¹³ recebeu em 1978 a Medalha Fields por contribuições nesta área.

¹³Fefferman, Charles Louis (1949-).