Capítulo 10

Equações de Laplace e Poisson – Separação de variáveis, funções harmónicas, transformações conformes propriedade de valor médio, e princípio de máximo

10.1 Introdução

A **equação de Laplace** num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ (ou $D \subset \mathbb{C}$) é $\Delta u(x, y) = 0$, onde $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ é conhecido por **laplaciano** de u, também designado por $\operatorname{lap} u$. Às funções que satisfazem a equação de Laplace em D chama-se **funções harmónicas** em D. A importância das funções harmónicas para aplicações, nomeadamente no âmbito da física, química, biologia e engenharia, vem destas funções corresponderem a potenciais de campos vectoriais conservativos com divergência nula. Por esta razão, o estudo de funções harmónicas também é conhecido por **Teoria do Potencial**. Em muitas situações de aplicação, as soluções de equilíbrio são funções harmónicas. É o caso do campo gravitacional num conjunto sem massas, do campo eléctrico num conjunto sem cargas eléctricas, do campo de velocidades de um fluido incompressível, estacionário e irrotacional, da densidade em processos de difusão de natureza variada (em física, química, biologia).

É claro que a equação de Laplace num conjunto D é uma equação linear homogénea no espaço das funções C^2 em D, pelo que o conjunto das funções harmónicas em D é um espaço linear.

As funções harmónicas mais simples em $\mathbb{R}^2$ são as funções afins $(x,y) \mapsto ax+by+c$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$ constantes. Em coordenadas polares (r,θ) o laplaciano toma a forma $(r\partial/\partial r)(r\partial u/\partial r)+\partial^2 u/\partial\theta^2$, pelo que pode ser directamente observado que $\ln r$ é uma função harmónica no complementar da origem em todo o plano, e que qualquer função harmónica numa região sem a origem e que depende apenas de r é necessariamente da forma $a\ln r+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$ constantes. Também é imediato verificar que qualquer função contínua definida num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ de modo a dar o argumento θ do ponto em que é calculada é harmónica.

A equação linear não homogénea associada à equação de Laplace escreve-se $\Delta u(x,y) = \rho$ e é conhecida por **Equação de Poisson**. Por exemplo, esta equação é um modelo para o campo gravitacional num conjunto com densidade de massa ρ, e para o campo eléctrico num conjunto com densidade de carga eléctrica ρ.

10.2 Separação de variáveis na equação de Laplace

Considera-se a equação de Laplace num rectângulo $[0,A]\times[0,B]$ com condições de Dirichlet na fronteira

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(x,0)=f_1(x),\quad u(0,y)=f_2(y),\quad u(x,B)=f_3(x),\quad u(A,y)=f_4(y)\ ,\end{gathered}\tag{10.1}$$

para $x\in[0,A]$, $y\in[0,B]$.

Problemas deste tipo ocorrem como modelos em variadas aplicações, por exemplo para: o potencial electroestático num condutor oco de secção rectangular, as posições de equilíbrio de membranas elásticas com posição fixa na fronteira de um rectângulo, o escoamento de um fluido irrotacional incompressível num tubo de secção rectangular, a temperatura numa chapa rectangular em equilíbrio. Neste último caso, note-se que a equação do calor num rectângulo é $\partial u/\partial t-k\left(\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2\right)=0$ e as soluções de equilíbrio desta equação satisfazem $\partial u/\partial t = 0$, pelo que em situações de equilíbrio com os lados do rectângulo forçados a ter uma certa distribuição de temperatura, a temperatura no interior do rectângulo satisfaz a equação de Laplace com valores na fronteira (10.1).

Ao contrário das equações do calor e das ondas estudadas nos capítulos anteriores, que definem problemas de evolução, a equação de Laplace corresponde geralmente a problemas de equilíbrio como os que foram mencionados.

Consideramos **solução** do problema (10.1) em $[0,A]\times[0,B]$ qualquer função contínua $u:[0,A]\times[0,B]\to\mathbb{R}$ que satisfaz as condições na fronteira e a condição inicial dadas e é C^2 e verifica a equação diferencial no interior do domínio. Às funções que satisfazem a equação de Laplace num conjunto aberto D chama-se **funções harmónicas** em D.

Como a equação de Laplace é linear e, portanto, é válido o Princípio da Sobreposição, quando as condições na fronteira são nulas nos vértices do rectângulo, as soluções do problema considerado podem ser obtidas adicionando soluções de cada um dos quatro problemas que se obtêm com condições na fronteira nulas excepto num dos lados do rectângulo. Como estes problemas são idênticos, considera-se aqui apenas um deles, especificamente

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(x,0)=f_1(x),\ \ u(0,y)=u(x,B)=u(A,y)=0\ ,\end{gathered}\tag{10.2}$$

para $x\in[0,A]$, $y\in[0,B]$.

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções do problema da forma $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$. Substituindo na equação diferencial obtém-se $X''(x)\,Y(y)+X(x)\,Y''(y)=0$. Assim, para $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$ ser solução do problema tem de existir uma constante σ tal que

$$X''(x)-\sigma\,X(x)=0, \qquad\qquad Y''(y)+\sigma\,Y(y)=0$$

$$X(x)\,Y(0)=f_1(x),\quad X(0)\,Y(y)=X(x)\,Y(B)=X(A)\,Y(y)=0\ ,$$

para $(x,y)\in[0,A]\times[0,B]$. Para que a solução não seja nula, tem de ser $X(x),Y(y)\neq 0$ para alguns x,y e, portanto, $X(0)=X(A)=Y(B)=0$. Se $\sigma\neq -n^2\pi^2/A^2$ para todo $n\in\mathbb{N}$ a única solução da equação diferencial obtida para X que se anula nos pontos $x=0$ e $x=A$ é a solução nula. Se $\sigma=-n^2\pi^2/A^2$ com $n\in\mathbb{N}$ as soluções das equações diferenciais acima obtidas por separação de variáveis com as condições referidas dão soluções da forma

$$u_n(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{A}\,\sinh\frac{n\pi(B-y)}{A},\quad n\in\mathbb{N}\ ,$$

que satisfazem o problema (10.2) para os casos particulares em que $f_1(x)=u_n(x,0)$. Devido ao Princípio da Sobreposição, quando f_1 é uma combinação linear de funções deste tipo, obtém-se uma solução do problema que é a combinação linear das funções u_n com os mesmo coeficientes. Se f_1 não é uma combinação linear das funções u_n, avaliadas em $t=0$, é natural tentar obter soluções com representação em série

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\,\sin\frac{n\pi x}{A}\,\sinh\frac{n\pi(B-y)}{A}\tag{10.3}$$

e, portanto, considerar a representação de f_1 por uma série de Fourier de senos

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{A}\,, \tag{10.4}$$

com $b_n = k_n \sinh(n\pi B/A)$. Qualquer função contínua $f_1 : [0,A] \to \mathbb{R}$ com valor zero nos extremos do intervalo $[0,A]$ pode ser estendida ao intervalo $[-A,A]$ de forma a ser ímpar, pelo que tem uma série de Fourier de senos. Do teorema (**??**) sabe-se que uma condição suficiente para esta série de Fourier convergir uniformemente para a função f_1 no intervalo $[0,A]$ é que esta função seja contínua e tenha derivada integrável à Riemann neste intervalo.

Resta confirmar que a função dada pela fórmula (10.3) é solução do problema (10.2). Para majorar os termos da série nesta fórmula e das suas derivadas termo a termo convém começar por majorar as funções seno hiperbólico que aparecem na série. É fácil ver que

$$\begin{aligned}\frac{\sinh\frac{n\pi(B-y)}{A}}{\sinh\frac{n\pi B}{A}} &= \frac{e^{n\pi(B-y)/A} - e^{-n\pi(B-y)/A}}{e^{n\pi B/A} - e^{-n\pi B/A}} \\ &= e^{-n\pi y}\,\frac{1-e^{-2n\pi(B-y)/A}}{1-e^{-2n\pi B/A}} \le e^{-n\pi y}\,\frac{1}{1-e^{-2\pi B/A}}\,.\end{aligned}$$

Em consequência, a série cujos termos são os valores absolutos dos termos da série em (10.3), assim como as séries correspondentes obtidas derivando esta série termo a termo uma e duas vezes em relação a x e a y são dominadas em valor absoluto por um múltiplo da série $\sum n^2 e^{-n\pi y}$, pelo que são uniformemente convergentes em $[0,A]\times[y_0,B]$, com $0<y_0\le B$. Conclui-se que a função u é C^2, satisfaz a equação diferencial do problema em $]0,A[\times]y_0,B[$ e é continua em $[0,A]\times]y_0,B]$. Prosseguindo com derivações sucessivas da série na fórmula (10.3) termo a termo até ordem k e tomando os valores absolutos dos termos calculados obtêm-se séries dominadas por múltiplos de $\sum n^k e^{-n\pi y}$, pelo que a solução dada por essa fórmula é C^∞ em $]0,A[\times]0,B[$, mesmo que a condição na fronteira $u(x,0)=f_1(x)$ não tenha derivadas para além da primeira.

Como os termos da série em (10.3) se anulam em todos os lados do rectângulo com excepção de $[0,A]\times\{0\}$, conclui-se que as condições na fronteira são todas satisfeitas no complementar deste conjunto na fronteira do rectângulo. Resta verificar que u é contínua nos pontos de $[0,A]\times\{0\}$, o que pode ser feito de forma semelhante ao que se fez no capítulo anterior para o problema semelhante para a equação do calor com base no Princípio do Máximo para a equação de Laplace que se obtém numa outra secção deste capítulo, segundo o qual o máximo e o mínimo de soluções não constantes da equação de Laplace num conjunto conexo só podem ocorrer na fronteira do conjunto.

Na verdade, como a série de Fourier de f_1 em (10.4) converge uniformemente para f_1 em $[0,A]$, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a sucessão de somas parciais da série $\{S_n(x,f_1)\}$ cuja soma é $f_1(x)$ satisfaz $|S_m(x,f_1) - f_1(x)| < \epsilon$ para $x \in [0,A]$, $m \geq N$ e, portanto, $|S_m(x,f_1) - S_n(x,f_1)| < 2\epsilon$ em $[0,A]$, $m,n \geq N$. Por outro lado, a sucessão de somas parciais $\{S_n(x,y,u)\}$ da série que define $u(x,y)$ em (10.3) é tal que a função $(x,y) \mapsto S_m(x,y,u) - S_n(x,y,u)$ satisfaz a equação de Laplace em $]0,A[\times]0,B[$ e tem valor zero na fronteira deste conjunto excepto no segmento $[0,A]\times\{0\}$, onde o seu valor absoluto é majorado por 2ϵ. Do Princípio do Máximo que se obtém mais à frente neste capítulo conclui-se que $|S_m(x,y,u) - S_n(x,y,u)| \leq 2\epsilon$ para $(x,y) \in [0,A]\times[0,B]$, $m,n \geq N$ e, portanto, a sucessão $\{S_n(x,y,u)\}$ converge uniformemente para uma função contínua em $[0,A]\times[0,B]$, pelo que $u(x,y) \to f_1(x_0)$ quando $(x,y) \to (x_0,0)$.

O Princípio do Máximo também permite provar. de forma análoga à do capítulo anterior para a equação do calor, que o problema de valores na fronteira considerado é bem posto no sentido de Hadamard. Na verdade, o mesmo problema mas com a condição na fronteira definida por uma função $\overline{f}_1$ em vez de f_1, tem solução $\overline{u}$ tal que $\overline{u} - u$ satisfaz o problema mas com a condição na fronteira definida por $\overline{f}_1 - f_1$ em vez de f_1, pelo que o Princípio do Máximo implica $\max|\overline{u} - u| \leq \max|\overline{f}_1 - f_1|$

Em resumo, fica estabelecido o resultado seguinte.

(10.5) **Teorema:** *Se as funções f_k, $k=1,2,3,4$, têm desenvolvimentos em séries de Fourier de senos uniformemente convergentes no respectivo domínio, então o problema com valores na fronteira para a equação de Laplace (10.1) tem solução única u. Esta solução é a soma das quatro soluções que se obtêm considerando os valores na fronteira nulos, excepto os que são especificados por uma das funções f_k, $k=1,2,3,4$. Cada uma destas soluções é dada, para $(x,y) \in [0,A]\times[0,B]$, por uma série do tipo de (10.3), a qual corresponde ao caso em que $f_2 = f_3 = f_4 = 0$, sendo a série uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de $]0,A[\times]0,B[$. O problema (10.1) é bem posto no sentido de Hadamard, isto é, se u é solução do problema e $\overline{u}$ é solução do mesmo problema com dados $\overline{f}_k$ em vez de f_k, então $\overline{u} \to u$ uniformemente em $[0,A]\times[0,B]$, quando $\overline{f}_k \to f_k$ uniformemente em $[0,A]$, para $k=1,2,3,4$. Além disso, a solução é C^∞ em $]0,A[\times]0,B[$.*

A Figura 10.1 ilustra graficamente a solução do problema com valores na fronteira para a equação de Laplace (10.1) com o método acima descrito.

Interessa considerar outros tipos de condições na fronteira para a equa-

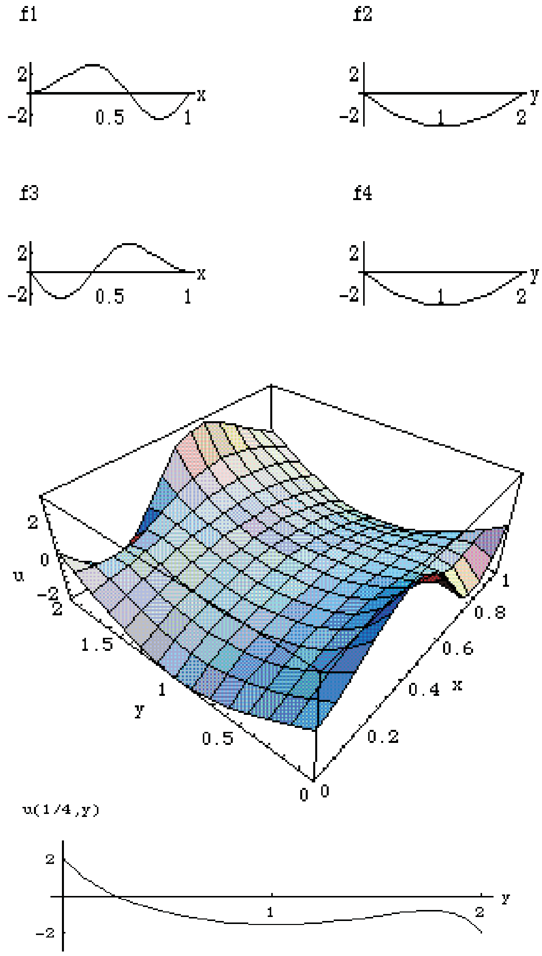

Figura 10.1: Solução do problema (10.1) com condições na fronteira indicadas no topo e $A=1$, $B=2$ e valor da solução sobre o segmento de recta com $x=1/4$

ção de Laplace bem como a sua resolução noutros domínios. O método de separação de variáveis e séries de Fourier pode também ser usado para resolver o problema de Dirichlet para a equação de Laplace num círculo, com uma mudança para coordenadas polares. Em coordenadas polares a equação de Laplace escreve-se

$$r^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\;.$$

O problema de Dirichlet num círculo de raio $R>0$ corresponde a exigir a verificação desta equação no interior do círculo e a condição na fronteira

$$u(R,\theta)=f(\theta)\,,\quad \theta\in[0,2\pi]\;,$$

com $f(0)=f(2\pi)$. A solução $u(r,\theta)$ tem de ser periódica com período 2π em θ. Para resolver este problema por separação de variáveis e séries de Fourier procuram-se soluções da forma $u(r,\theta)=\rho(r)\,T(\theta)$. Substituindo na equação diferencial obtém-se $[r^2\rho''(r)+r\rho'(r)]\,T(\theta)+\rho(r)\,T''(\theta)=0$. Assim, para $u(r,\theta)=\rho(r)\,T(\theta)$ ser solução do problema tem de existir uma constante σ tal que

$$r^2\rho''(r)+r\rho'(r)-\sigma\rho(r)=0\,,\quad T''(\theta)+\sigma\,T(\theta)=0\,,\quad \rho(R)=1\,,\quad T(\theta)=f(\theta)\,,$$

para $(r,\theta)\in[0,R]\times[0,2\pi]$. A equação diferencial para T só tem soluções diferentes de zero periódicas de período 2π se $\sigma=n^2$ com $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ e neste caso essas soluções são $a_n\sin(n\theta)+b_n\cos(n\theta)$ com $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ constantes arbitrárias se $n\in\mathbb{N}$, e $a_0/2$ com $a_0\in\mathbb{R}$ uma constante arbitrária se $n=0$. Para $\sigma=n^2$ a função $\rho(r)=r^n$ satisfaz a equação diferencial para ρ. Obtêm-se assim soluções da forma

$$u_n(r,\theta)=\Big(\frac{r}{R}\Big)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,,\qquad n\in\mathbb{N}\,,$$

que satisfazem o problema, mas com $u_n(R,\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$. Assim, é natural tentar obter soluções com representação em série

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{R}\Big)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{10.6}$$

e, portanto, considerar a representação de f por uma série de Fourier

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,.$$

Qualquer função contínua $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ com derivada integrável à Riemann neste intervalo e $f(0)=f(2\pi)$ tem uma série de Fourier do tipo indicado que converge uniformemente para a função f no intervalo $[0,2\pi]$.

Resta confirmar que a função u definida pela fórmula (10.6) é solução do problema. A série cujos termos são os valores absolutos dos termos da série nessa fórmula, assim como as séries correspondentes obtidas derivando esta série termo a termo uma e duas vezes em relação a r e a θ são dominadas em valor absoluto por um múltiplo da série $\sum n^2(r/R)^{n-2}$, pelo que são uniformemente convergentes em $[0,R_0]\times[0,2\pi]$, para todo $0<R_0<R$. Conclui-se que a função u é C^2, satisfaz a equação diferencial do problema em $[0,R[\times[0,2\pi]$ e é continua em $[0,R[\times[0,2\pi]$. Prosseguindo com derivações sucessivas termo a termo da série na fórmula para u até ordem k e tomando os valores absolutos dos termos calculados obtêm-se séries dominadas por múltiplos de $\sum n^k(r/R)^{n-k}$, pelo que a solução dada por essa fórmula é C^∞ em $]0,R[\times[0,2\pi]$, mesmo que a condição na fronteira $u(R,\theta)=f(\theta)$

não tenha derivadas para além da primeira. Falta apenas verificar que u é contínua nos pontos de $\{R\}\times[0,2\pi]$ da fronteira do círculo, o que pode ser feito tal como no caso anterior, com base no Princípio do Máximo para a equação de Laplace.

Vamos agora obter de (10.6) uma fórmula integral para a solução u directamente a partir da função f. Os coeficientes da série de Fourier de f são

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,, \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\cos n\varphi\,d\varphi\,, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\sin n\varphi\,d\varphi\,.$$

A série cujos termos são os valores absolutos da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n f(\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\;.$$

é dominada por $2\max_{[0,2\pi]}|f|\,\sum_{n=1}^{\infty}(R_0/R))^n$ para $(r,\theta)\in[0,R_0]\times[0,2\pi]$, com $R_0\in\,]0,R[$. Como esta série é uma série geométrica com razão menor do que um, a série considerada é uniformemente convergente em $[0,R_0]\times[0,2\pi]$. Logo, pode ser integrada termo a termo o que dá

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[f(\varphi)\cos n\theta\cos n\varphi+f(\varphi)\sin n\theta\sin n\varphi]\,d\theta\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\left(\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi\right)\cos n\theta+\left(\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi\right)\sin n\theta\right]\\
&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\;.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução u definida pela fórmula (10.6) pode ser escrita na forma

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\theta-\varphi)\right]d\varphi\;.$$

Com $z=r\,e^{i\theta}$ e $w=R\,e^{i\varphi}$, o termo entre parênteses rectos nesta fórmula pode-se escrever

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right)^n=\frac{1}{2}+\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n=\frac{1}{2}+\mathrm{Re}\left(1+\frac{z/w}{1-\frac{z}{w}}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right),$$

pelo que a fórmula acima para u pode ser escrita na forma

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{R\,e^{i\varphi}+r\,e^{i\theta}}{R\,e^{i\varphi}-r\,e^{i\theta}}\right)f(\varphi)\,d\varphi\;. \tag{10.7}$$

Como

$$\frac{(w+z)(\overline{w}-\overline{z})}{(w-z)(\overline{w}-\overline{z})} = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w|^2-2\,\mathrm{Re}(\overline{w}z)+|z|^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2\,R\,r\,\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,,$$

a fórmula para u pode-se escrever (Figura 10.2)

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, f(\varphi)\, d\varphi\,. \tag{10.8}$$

A qualquer das fórmulas (10.7) e (10.8) obtidas para a solução do problema de Dirichlet no círculo de raio R e centro na origem chama-se **Fórmula de Poisson**. Estas fórmulas foram obtidas por separação de variáveis e séries de Fourier sob a hipótese da função f ser contínua e ter derivada integrável à Riemann em $[0,2\pi]$, mas para a fórmula estar bem definida basta que f seja contínua. Pode-se provar que apenas com a hipótese de continuidade de f e $f(0)=f(2\pi)$ a Fórmula de Poisson anterior ainda dá uma solução da equação de Laplace no círculo de raio R e centro na origem, estando a dificuldade da prova na verificação que a função definida pela Fórmula de Poisson é contínua na fronteira desse círculo. Não vamos prosseguir esta questão aqui porque numa secção seguinte obtêm-se resultados mais gerais.

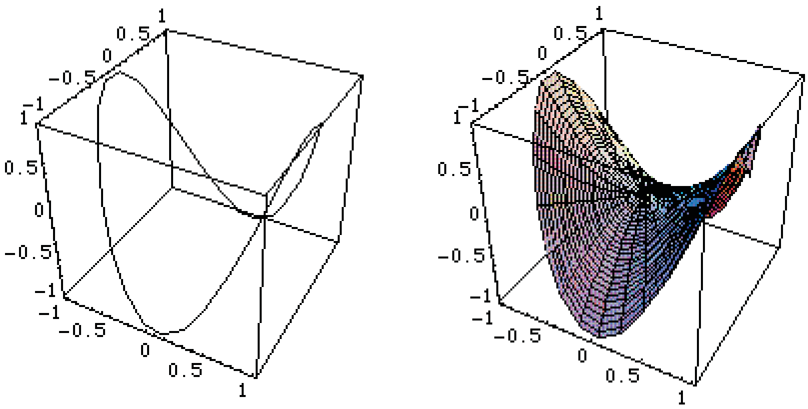

Figura 10.2: Solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace no círculo de raio 1, com valores na fronteira representados na figura da esquerda

10.3 Funções harmónicas e transformações conformes

Na secção anterior considerou-se a resolução da equação de Laplace em rectângulos e em círculos com separação de variáveis e séries de Fourier. Para resolver a equação em regiões diferentes do plano é útil explorar métodos de Análise Complexa[1]. De facto, as funções harmónicas em conjunto abertos de $\mathbb{R}^2$ e as funções holomorfas em conjunto abertos de $\mathbb{C}$ estão intimamente relacionadas, como mostra o resultado seguinte.

(10.9) **Teorema:** *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $W = \{x+iy : (x,y) \in D\} \subset \mathbb{C}$. Então:*

1. *Uma função de valores complexos em W é harmónica em W se e só se as suas partes real e imaginária são harmónicas em D.*
2. *As funções holomorfas em W são harmónicas em W.*
3. *Se $u : D \to \mathbb{R}$ é harmónica e C^2, então $g(x+iy) = \partial u/\partial x - i\, \partial u/\partial y$ é holomorfa em W.*
4. *Se $u : D \to \mathbb{R}$ é harmónica, então é localmente a parte real de uma função harmónica, isto é, em cada círculo em W existe uma função h holomorfa em W com parte real igual a u nesse círculo.*

Dem.

1. É imediata.

2. Recorda-se que se $u, v : D \to \mathbb{R}$ são C^2, então $f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ é holomorfa em W se e só se são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, e que as partes real e imaginária de funções holomorfas são C^∞. Assim, se f é holomorfa as condições de Cauchy-Riemann e a igualdade de derivadas mistas de segunda ordem implicam
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 0\,.$$

3. As funções $U = \partial u/\partial x$ e $V = -\partial u/\partial y$ são C^1 e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann
$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0\,,$$
logo $g(x+iy) = U(x,y) + i\, V(x,y)$ é holomorfa.

4. Basta provar o resultado num círculo fechado arbitrário contido em D. Sem perda de generalidade pode-se supor o círculo centrado na origem com um raio $R > 0$ (caso contrário faz-se uma translação de

[1] Para uma exposição simplificada dos aspectos de Análise Complexa aqui referidos ver, por exemplo, o texto do autor *Análise Complexa de Uma Variável e Aplicações*, Departamento de Matemática, IST, 2005.

coordenadas). Considera-se a função U que é solução da equação de Laplace no círculo e satisfaz a condição na fronteira especificada em coordenadas polares (r,θ) por $f(\theta)=u(R\cos\theta, R\sin\theta)$ e que é dada pela Fórmula de Poisson (10.7). Esta fórmula também dá U como função da variável complexa $z=r\,e^{i\theta}$ na forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R\,e^{i\varphi}+z}{R\,e^{i\varphi}-z}\right)f(\varphi)\,d\varphi\;.$$

A função integranda é holomorfa no interior do círculo $|z|<R$, logo U é a parte real de uma função holomorfa. Em consequência do Princípio do Máximo que se obtém numa secção seguinte deste capítulo, as soluções da equação de Laplace num conjunto limitado com os mesmos valores na fronteira, quando existem, são únicas. Conclui-se que $u=U$, o que termina a demonstração.

Q.E.D.

É também útil o resultado seguinte.

(10.10) **Proposição:** *A composição de uma função harmónica com uma função holomorfa é harmónica.*

Dem. Suponhamos que $T=u+iv$ é holomorfa num conjunto aberto $W\subset\mathbb{C}$, onde u e v têm valores reais, e f é harmónica em $T(W)$. Da regra de derivação da função composta obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(f\circ T) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\circ T\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\circ T\right)\frac{\partial v}{\partial x}\;,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f\circ T) = &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\circ T\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\circ T\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\circ T\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ &+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\circ T\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\circ T\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\circ T\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\;,\end{aligned}$$

e fórmulas idênticas trocando x com y. Adicionando a última fórmula com a correspondente com derivadas em ordem a y e aplicando as equações de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x=\partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y=-\partial v/\partial x$, obtém-se

$$\Delta(f\circ T) = (\Delta f\circ T)\left(\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\circ T\right)\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta u + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\circ T\right)\frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta v\,.$$

Como T é holomorfa, resulta do teorema anterior que u e v são harmónicas. Portanto $\Delta f=0$, $\Delta u=0$, $\Delta v=0$, logo $\Delta\,(f\circ T)=0$. Conclui-se que $f\circ T$ é harmónica em W. *Q.E.D.*

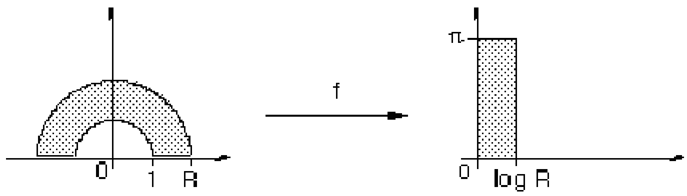

Figura 10.3: Transformação conforme de uma semicoroa circular num rectângulo do plano complexo, $T(z)=\log z$

Em consequência do resultado anterior, uma função complexa T holomorfa num conjunto W com inversa holomorfa transforma funções harmónicas no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in W\}$ em funções harmónicas no conjunto $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+iv \in T(W)\}$ e vice-versa. Assim, para resolver a equação de Laplace num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ pode ser útil transformar variáveis por uma função holomorfa injectiva, que necessariamente tem derivada diferente de zero em todos os pontos. Estas funções definem **transformações conformes** que preservam ângulos entre curvas e razões de expansão e contracção de comprimentos localmente em torno de cada ponto. Portanto, as transformações conformes são particularmente úteis na resolução da equação de Laplace em subconjuntos do plano e foram um instrumento determinante no desenvolvimento de áreas de aplicação como mecânica de fluidos, aerodinâmica, elasticidade de sólidos e electromagnetismo, pela facilidade com que permitiram obter soluções da equação de Laplace em subconjuntos do plano por simples transformações de coordenadas.

O Teorema de Transformação de Riemann da Análise Complexa estabelece que qualquer subconjunto aberto simplesmente conexo do plano complexo diferente de todo o plano pode ser transformado por uma transformação conforme no círculo aberto de raio 1 e centro na origem. Além disso, se a fronteira do conjunto simplesmente conexo é uma curva seccionalmente regular, então a transformação conforme referida pode ser estendida ao fecho do conjunto por uma função contínua bijectiva com inversa contínua. Como se estabelece a existência e a unicidade de solução de problemas de valores na fronteira para a equação de Laplace no círculo em que os valores na fronteira são dados por uma função contínua, fica-se, portanto, com um resultado muito geral de existência e unicidade de solução para problemas de valores na fronteira para a equação de Laplace em subconjuntos abertos simplesmente conexos do plano que não sejam todo o plano, com os valores na fronteira especificados por uma função contínua. Como aplicações consideram-se os exemplos seguintes.

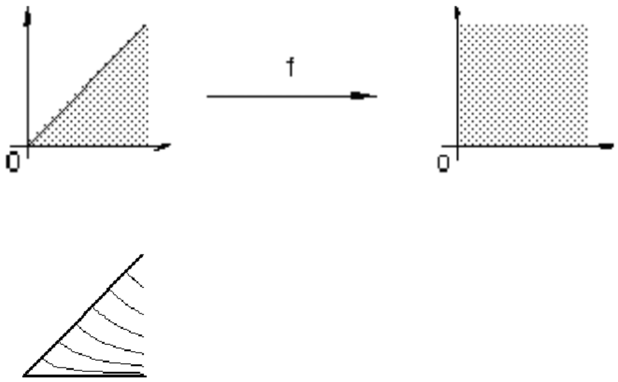

Figura 10.4: Transformação conforme $T(z)=z^2$ do sector do 1º quadrante limitado pelo semieixo real positivo e pela bissectriz do quadrante sobre todo o 1º quadrante, e linhas de nível da solução $u(x,y)=2cxy$ da equação de Laplace nesse sector com condições homogéneas de Dirichlet no semieixo horizontal e de Neumann na bissectriz do quadrante

(10.11) **Exemplos:**

1. Pretende-se resolver a equação de Laplace numa semicoroa circular limitada por semicircunferências de raios 1 e $R > 1$, com condições de Neumann nulas nas semicircunferências e condições de Dirichlet na parte da fronteira que consiste de segmentos de recta, com valor 1 num dos segmentos e 0 no outro. A solução deste problema descreve, entre outras situações, a distribuição da temperatura no equilíbrio de uma placa com a configuração de semicoroa circular, isolada termicamente no seu contorno curvo e com os extremos rectilíneos mantidos a temperaturas fixas diferentes.

   A transformação $T(z)=\log z=\log r\, e^{i\theta}=\log r+i\theta$, com $1\le r\le \log R$, $0 \le \theta \le \pi$ em que log designa o logaritmo principal, transforma a semicoroa circular, que no plano complexo consiste nos pontos $r\, e^{i\theta}$, no rectângulo dos pontos $x+iy$, $x\in[0,\log R]$, $y\in[0,\pi]$ (Figura 10.3). O problema fica transformado na resolução da equação de Laplace para uma função U no rectângulo $[0,\log R]\times[0,\pi]$ com condições na fronteira $\partial U/\partial x = 0$ nos lados em que $x = 0$ ou $x = \log R$, $U = 0$ no lado em que $y = 0$ e $U = 1$ no lado em que $y = \pi$. É claro que este problema tem a solução $U(x,y) = (\pi - y)/\pi$. Assim, como $x = \log r$ e $y = \theta$, a solução da equação de Laplace na semicoroa circular com as condições de fronteira inicialmente consideradas é em coordenadas polares $u(r,\theta)=(\pi-\theta)/\pi$.

2. As soluções da equação de Laplace no sector do plano xy no 1º qua-

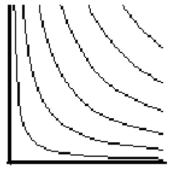

Figura 10.5: Linhas de nível da solução $u(x,y)=2cxy$ da equação de Laplace no 1^{o} quadrante com condições de Dirichlet na fronteira

drante limitado pelo eixo dos xx e pela bissectriz do quadrante, com condição de Dirichlet nula no eixo do x e condição de Neumann nula na bissectriz, podem ser facilmente obtidas notando que a função $T(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$ define uma transformação conforme do sector considerado no plano complexo sobre o 1^{o} quadrante (Figura 10.4). Na verdade, soluções da equação de Laplace no 1^{o} quadrante com condição de Dirichlet nula no eixo horizontal do X e condição de Neumann nula no eixo vertical do Y são $U(X,Y)=cY$, com c constante, pelo que $u(x,y)=2cxy$ é solução do problema de valor na fronteira para a equação de Laplace considerado inicialmente. Em electroestática, as linhas de nível de u (Figura 10.5) dão equipotenciais na vizinhança de um canto de $45°$ formado por um condutor perfeito plano com um isolador perfeito também plano, sem cargas no sector definido entre planos e considerando nulo o potencial do condutor.

A mesma transformação conforme pode ser usada para obter as soluções da equação de Laplace no 1^{o} quadrante com condição de Dirichlet nula em toda a fronteira, obtendo-se tal como anteriormente a solução $u(x,y)=2cxy$. Entre outras possibilidades, as linhas de nível desta função (Figura 10.4) podem corresponder às linhas de fluxo de um fluido incompressível irrotacional na vizinhança de um canto com paredes impenetráveis.

3. Pretende-se obter a solução limitada da equação de Laplace no complementar do círculo de raio 1 e centro na origem em $\mathbb{R}^2$ que satisfaz a condição $u(x,y)=x+1$ na circunferência de raio 1. Neste caso a região onde se quer resolver a equação de Laplace é ilimitada. A função $T(z)=1/z=1/(x+iy)=(x-iy)/(x^2+y^2)$ transforma o exterior do círculo de raio 1 do plano complexo no interior do mesmo círculo e é holomorfa nesse conjunto (Figura 10.6). Assim, o problema fica transformado em determinar a solução $U(a,b)$ da equação de Laplace no círculo de raio 1 que satisfaz $U(a,b)=a+1$ para $a^2+b^2=1$. É fácil ver que a solução deste problema é $U(a,b)=a+1$ para $a^2+b^2\leq 1$. Portanto, a solução da equação de Laplace do problema inicial no exterior do círculo é $u(x,y)=x/(x^2+y^2)+1$ (Figura 10.6).

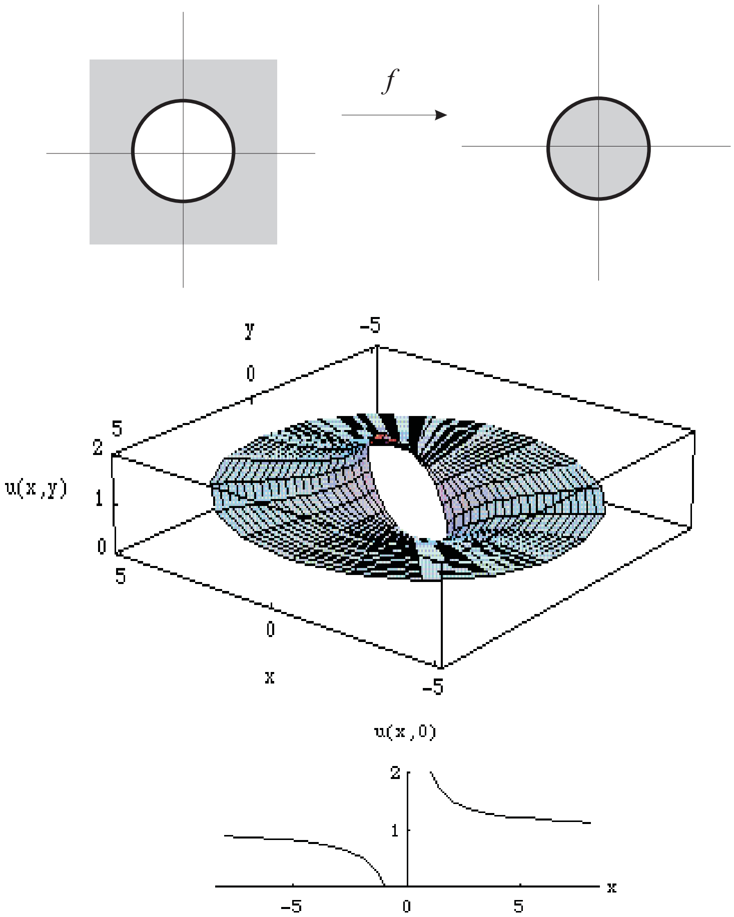

Figura 10.6: Solução da equação de Laplace no exterior do círculo de raio 1 e centro na origem com transformação conforme sobre esse círculo

10.4 Teorema de Valor Médio e Princípio do Máximo para funções harmónicas

As soluções das equações de Laplace (ver Figuras 10.1 a 10.6) satisfazem a propriedade importante de em cada ponto interior ao domínio terem valores iguais à sua média em bolas centradas nesse ponto e também iguais à sua média nas fronteiras dessas bolas. Esta propriedade das soluções das equações de Laplace pode ser estabelecida com base nas **Fórmulas de Green** que resultam do Teorema da Divergência. Dado que as situações em dimensão superior a dois não envolvem dificuldades adicionais, o resultado seguinte estabelece-as para qualquer dimensão finita.

(10.12) **Proposição (Fórmulas de Green):** *Se* $D \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio regular e* f, g *são funções com valores reais* C^2 *em* $\overline{D}$*, então:*

1ª Fórmula de Green: $\int_{\partial D} g f_\nu = \int_D (\nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f)$,

2ª Fórmula de Green: $\int_{\partial D} (g f_\nu - f g_\nu) = \int_D (g\Delta f - f\Delta g)$,

onde f_ν, g_ν designam as derivadas direccionais, respectivamente de f e g, na direcção da normal exterior unitária ν a D definida em ∂D.

Dem. Verifica-se $\operatorname{div}(g\nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f$. O Teorema da Divergência para a função $g\nabla f$ no domínio regular D dá a 1ª fórmula. Subtraindo a esta a fórmula análoga com f e g trocadas, obtém-se a 2ª fórmula. *Q.E.D.*

Uma aplicação imediata da 1ª Fórmula de Green permite obter um resultado de unicidade de solução de problemas de Dirichlet, problemas de Neumann e até problemas mistos para a equação de Poisson.

(10.13) **Teorema de unicidade de solução para a equação de Poisson:** *Sejam u e v funções contínuas no fecho de um domínio regular com cantos conexo $D \subset \mathbb{R}^n$ que são C^2 e satisfazem a equação de Poisson $\Delta u = \rho$ no interior de D, e sejam u_ν, v_ν as derivadas direccionais, respectivamente de u e v, na direcção da normal exterior unitária ν a D definida em ∂D excepto nos cantos. Se $u = v$ em $S \subset \partial D$ e $u_\nu = v_\nu$ em $\partial D \setminus S$, então $u - v$ é constante em $\overline{D}$; se $S \neq \emptyset$, então $u = v$ em $\overline{D}$.*

Dem. Com $f = u - v$, a 1ª Fórmula de Green com $g = f$ dá[2] $\int_{\partial D} f f_\nu = \int_D \|\nabla f\|^2$ e $f f_\nu = 0$ em ∂D, pelo que os integrais acima são iguais a zero. Como $\|\nabla f\|$ é contínua em $\overline{D}$, obtém-se $\nabla f = 0$ em $\overline{D}$. Segue-se que $u - v = f$ é constante no conjunto conexo $\overline{D}$. Se $S \neq \emptyset$, $f = 0$ em pelo menos um ponto pelo que a constante é zero, logo $u - v = f = 0$. *Q.E.D.*

A 1ª Fórmula de Green também permite obter a Propriedade de Valor Médio para funções harmónicas.

(10.14) **Propriedade de Valor Médio para Funções Harmónicas:** *Se u é uma função C^2 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\Delta u = 0$, então para toda a bola $B = B_R(\mathbf{y}) \subset D$ é*

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{\operatorname{vol}_{n-1}(\partial B)} \int_{\partial B} u \ , \qquad u(\mathbf{y}) = \frac{1}{\operatorname{vol}_n(B)} \int_B u \ ,$$

onde $\operatorname{vol}_{n-1}(\partial B) = \int_{\partial B} 1$ *e* $\operatorname{vol}_n(B) = \int_B 1$.

[2] Em aplicações a mecânica, hidrodinâmica, aerodinâmica e electromagnetismo o lado direito desta fórmula é frequentemente múltiplo de uma energia.

Dem. A 1ª Fórmula de Green com $f=u$, $g=1$ no domínio regular $B_R(\mathbf{y})$, $r\in]0,R[$ dá $\int_{\partial B_r} u_\nu = \int_{B_r} \Delta u = 0$. Mudando de variáveis de integração com $\rho = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ e $\mathbf{t}=(\mathbf{x}-\mathbf{y})/r$, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r} u_\nu &= r^{n-1}\int_{\|\mathbf{t}\|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\mathbf{y}+r\mathbf{t})\ d\mathbf{t}\\ &= r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\|\mathbf{t}\|=1} u(\mathbf{y}+r\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{1-n}\int_{\partial B_r} u\right).\end{aligned}$$

Portanto, com $F(r) = r^{1-n}\int_{\partial B_r} u$ é $F'(r) = 0$, logo $F(r) = R^{1-n}\int_{\partial B_R} u$, para $r\in]0,R]$. Dado que u é contínua em $B_R(\mathbf{y})$ verifica-se a fórmula $u(\mathbf{y}) = \lim_{r\to 0}(\int_{\partial B_r} u)/\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_r)$. Como $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_r) = r^{n-1}\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1)$, o limite quando $r\to 0$ dá a 1ª fórmula no enunciado. Uma vez que $\mathrm{vol}_{n-1}(B_1) = n\,\mathrm{vol}_n(B_1)$ a fórmula pode ser escrita para $r\le R$ na forma $n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\,r^{n-1}u(\mathbf{y}) = \int_{\partial B_r} u$. Integrando em $r\in]0,R[$ e usando o Teorema de Fubini obtém-se

$$\mathrm{vol}_n(B_1)\,R^n\,u(\mathbf{y}) = \int_0^R \left(\int_{\partial B_r} u\right) dr = \int_{B_R} u\ ,$$

de onde resulta a 2ª fórmula, pois $\mathrm{vol}_n(B_R) = R^n\mathrm{vol}_n(B_1)$. *Q.E.D.*

A Propriedade de Valor Médio anterior tem como consequência imediata o seguinte Princípio do Máximo.

(10.15) **Princípio do Máximo para Funções com a Propriedade de Valor Médio:** *Seja u uma função contínua num conjunto aberto conexo $D\subset\mathbb{R}^n$ que satisfaz em cada bola $B(\mathbf{y})\subset\mathbb{R}^n$ com fecho contido em D a Propriedade de Valor Médio $u(\mathbf{y}) = \left(\int_B u\right)/\mathrm{vol}_n(B)$.*

1. *Se u tem máximo ou mínimo em D, então é constante em D.*
2. *Se D é limitado e u é contínua em $\overline{D}$, então o máximo e o mínimo de u em $\overline{D}$ são assumidos necessariamente na fronteira ∂D.*
3. *Se u é solução C^2 da equação de Laplace em D, então não tem máximo nem mínimo neste conjunto. Se D é limitado e u é contínua em $\overline{D}$, então o máximo e o mínimo de u em $\overline{D}$ são necessariamente assumidos na fronteira ∂D.*

Dem. Se u tem um máximo M em D, então existe $\mathbf{y}\in D$ tal que $u(\mathbf{y}) = M$ e $u^{-1}(\{M\})\ne\emptyset$. Como u é contínua em D o conjunto $u^{-1}(\{M\})$ é fechado relativamente a D. Se $\mathbf{z}\in u^{-1}(\{M\})$ e $B = B_r(\mathbf{z})$ é uma bola incluída em D, é $0 = u(\mathbf{z}) - M = \int_B (u - M)/\text{vol}_n(B) \leq 0$, pelo que $u = M$ em $B_r(\mathbf{z})$. Portanto, $u^{-1}(\{M\})$ também é um conjunto aberto relativamente a D. Como os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados relativamente a um conjunto conexo são este conjunto e o conjunto vazio, conclui-se que $u^{-1}(\{M\}) = D$. Para um mínimo aplica-se o resultado anterior a $-u$. A afirmação 2. é consequência imediata da 1. e do Teorema de Weierstrass que garante que uma função contínua num conjunto compacto tem necessariamente um máximo e um mínimo. As conclusões sobre soluções da equação de Laplace resultam de 1. e 2. e de (10.14) implicar que estas soluções satisfazem a Propriedade de Valor Médio no enunciado. *Q.E.D.*

Como corolário imediato deste teorema pode-se obter a unicidade de solução do problema de Dirichlet para as equações de Poisson e Laplace num conjunto aberto e limitado $D \subset \mathbb{R}^n$.

(10.16) **Corolário (unicidade de soluções das equações de Poisson e Laplace com condições de Dirichlet na fronteira):** *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado e aberto e u, v são soluções de um problema de Dirichlet para a equação de Poisson ou de Laplace em D, então $u = v$ em D.*

Dem. A função $u - v$ satisfaz a equação de Laplace em D, pelo que o teorema anterior implica que os seus valores máximo e mínimo em cada componente conexa de D são assumidos na fronteira dessa componente. Como a função $u - v$ é nula em ∂D, segue-se que é identicamente zero em cada componente conexa de D e, portanto, em todo D. *Q.E.D.*

10.5 Existência de soluções das equações de Laplace e Poisson em bolas de $\mathbb{R}^n$

É fácil determinar soluções da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n$ com simetria radial: r^{2-n} para $n \neq 2$ e $\log r$ para $n = 2$, onde r é a distância a um ponto fixo de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ fixo define-se a **solução fundamental**[3] normalizada da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{y}\}$ por (Figuras 10.7)

[3]Para campos de forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância a partículas em $\mathbb{R}^3$, como no caso do campo gravítico e do campo eléctrico, a solução fundamental é o potencial de uma partícula unitária na origem. O gradiante deste potencial é o campo de forças devido à partícula.

$$\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \Gamma(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = \begin{cases} \frac{1}{n\,(2-n)\,\mathrm{vol}_n(B_1)} \, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}, & n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \qquad\qquad , & n = 2\,, \end{cases}$$

onde B_1 é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Verifica-se

$$D_j\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)}\,(x_j-y_j)\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{-n}\,,$$

$$D_{jk}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)}\left[\delta_{jk}\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 - n(x_j-y_j)(x_k-y_k)\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{-n-2}\,,$$

onde $\delta_{jk}=1$ se $j=k$ e $\delta_{jk}=1$ se $j\neq k$, pelo que se obtêm as desigualdades

$$|D_j\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leq \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)}\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1-n}\,,$$

$$|D_{jk}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leq \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)}\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{-n}\,.$$

A 2ª Fórmula de Green na proposição (10.12), aplicada com $f=u$ e $g=\Gamma$ no conjunto $D\backslash B_r$ onde D é um domínio regular que contém B_r, dá

$$\int_{D\backslash B_r} \Gamma\Delta u = \int_D (\Gamma\, u_\nu - u\,\Gamma_\nu) + \int_{\partial B_r} (\Gamma\, u_\nu - u\,\Gamma_\nu)\,.$$

Como $\Gamma(r)\, n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\, r^{n-1}$ é igual a $r/(2-n)$ para $n\neq 2$ e a $r\log r$ para $n=2$, quando $r\to 0$ verifica-se

$$\left|\int_{\partial B_r} \Gamma\, u_\nu\right| = \left|\Gamma(r)\int_{\partial B_r} u_\nu\right| \leq |\Gamma(r)|\, n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\, r^{n-1}\sup_{B_r}\|\nabla u\| \to 0$$

$$\int_{\partial B_r} u\,\Gamma_\nu = -\Gamma'(r)\int_{\partial B_r} u = \frac{-1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\, r^{n-1}}\int_{\partial B_r} u \to u(\mathbf{y})\,.$$

Substituindo na expressão obtida com a 2ª Fórmula de Green obtém-se a seguinte **representação de Green** para funções $u\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$

$$u(\mathbf{y}) = \int_D [\, u(\mathbf{x})\,\Gamma_\nu(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, u_\nu(\mathbf{x})\,]\, d\mathbf{x} + \int_D \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\Delta u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Como Γ é C^∞, uma das consequências da representação de Green é que as soluções da equação de Laplace $\Delta u=0$ em D são C^∞ neste conjunto.

Se $D\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio regular e $v\in C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$ satisfaz a equação de Laplace $\Delta v = 0$ em D, com $g = u$, $f = v$ na 2ª Fórmula de Green da proposição (10.12) obtém-se

$$\int_{\partial D} (u\, v_\nu - v\, u_\nu) + \int_D v\Delta u = \int_D u\Delta v = 0\,.$$

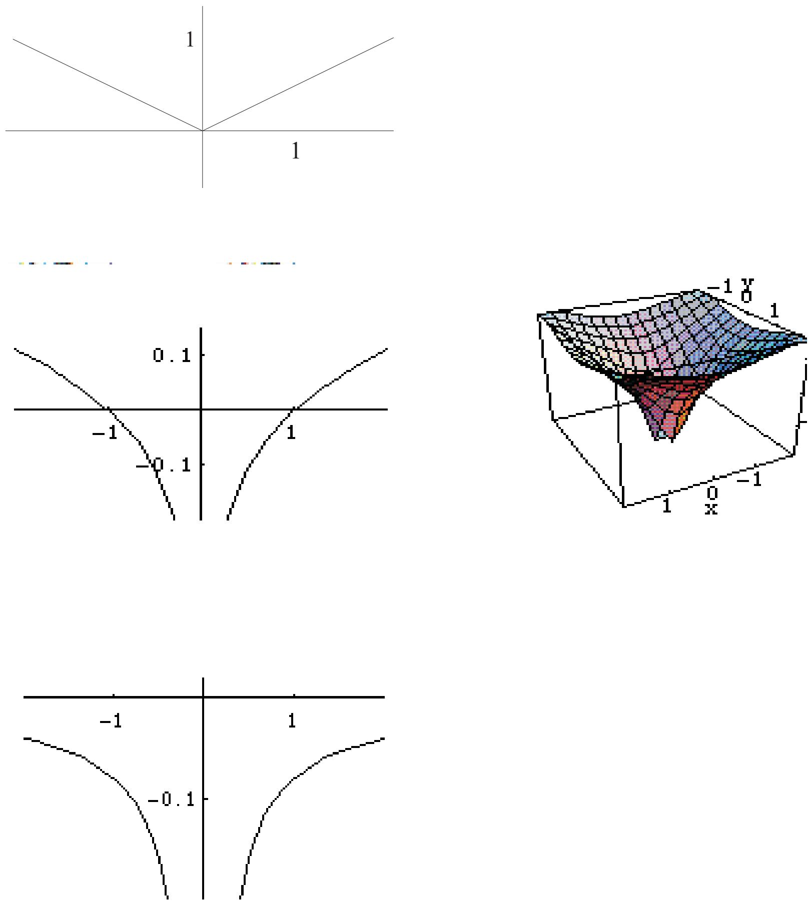

Figura 10.7: Solução fundamental da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n$, para $n=1,2,3$

Adicionando à representação de Green, com $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})+v(\mathbf{x})$ dá

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\partial D} [\, u(\mathbf{x})\, G_\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) - G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, u_\nu(\mathbf{x}) \,]\, d\mathbf{x} + \int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \Delta u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\ .$$

Se $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ para $\mathbf{x}\in\partial D$ obtém-se a seguinte fórmula de representação para funções $u\in C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\partial D} u(\mathbf{x})\, G_\nu(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x} + \int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \Delta u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\ .$$

A função $G:\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{y}\in D, \mathbf{x}\in \overline{D}\backslash\{\mathbf{y}\}\,\} \to \mathbb{R}$ com estas propriedades é conhecida por **Função de Green** (do problema de Dirichlet) para D, ou por **Função de Green de 1ª espécie** para D. Sabe-se do corolário (10.16) que se a função de Green existe é única em $C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$.

A última fórmula anterior dá uma representação de soluções em $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ para as equações de Poisson $\Delta u = \rho$ e de Laplace (com $\rho = 0$) num domínio regular D, para funções ρ limitadas e integráveis em D expressa em termos da própria função ρ, de uma função de Green para D e dos valores que a solução satisfaz na fronteira ∂D.

Não consideramos aqui a existência de funções de Green na situação mais geral, mas apenas o caso em que D é uma bola em $\mathbb{R}^n$. É fácil verificar que a função de Green G para $B_r(0)$ satisfaz para $\mathbf{x}, \mathbf{x} \in B_r(0)$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \Gamma(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) - \Gamma\left(\left\|\frac{\|\mathbf{y}\|}{r}\,\mathbf{x} - \frac{r}{\|\mathbf{y}\|}\,\mathbf{y}\right\|\right), & \mathbf{y} \neq 0 \\ \Gamma(\|\mathbf{x}\|) - \Gamma(r) & , \quad \mathbf{y} = 0\,, \end{cases}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Gamma\left(\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\frac{\|\mathbf{x}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2}{r^2} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + r^2}\right),$$

$$G_\nu = \frac{\partial G}{\partial\,\|\mathbf{x}\|} = \frac{r^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\,r}\;\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{-n} \geq 0\,,$$

pelo que a única candidata $u \in C^2(B_r(0)) \cap C^0(\overline{B_r(0)})$ a solução da equação de Laplace em $B_r(0)$ é dada em termos dos seus valores na fronteira pela **Fórmula de Poisson** seguinte que generaliza a fórmula (10.8) que tinha sido obtida para o caso particular de $n = 2$

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\,r} \int_{\partial B_r} \frac{r^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n}\;u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,.$$

Note-se que fazendo $\mathbf{y} = 0$ recupera-se a Propriedade de Valor Médio para soluções da equação de Laplace em (10.14). Para estabelecer a existência de solução em $C^2(B_r(0)) \cap C^0(\overline{B_r(0)})$ para o problema de Dirichlet na bola $B_r(0)$ basta verificar que a função definida na última fórmula é solução do problema.

Chama-se **núcleo de Poisson** à função

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\,r}\;\frac{r^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n}\,. \tag{10.17}$$

O resultado seguinte dá as propriedades principais do núcleo de Poisson.

(10.18) **Proposição:** *O núcleo de Poisson K satisfaz $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ para $\mathbf{x} \in \partial B$, $\mathbf{y} \in B$ e $\int_{\partial B} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x} = 1$ para $\mathbf{y} \in B$.*

Dem. A 1ª afirmação é óbvia da fórmula que define o núcleo de Poisson. A 2ª afirmação resulta de aplicar a Fórmula de Poisson a $u=1$ *Q.E.D.*

Com o núcleo de Poisson obtém-se o resultado seguinte.

(10.19) **Teorema de existência de solução da equação de Laplace numa bola de $\mathbb{R}^n$:** *Seja $B=B_r(0)\subset\mathbb{R}^n$ e f uma função contínua em ∂B_r. Então o problema de Dirichlet para a equação de Laplace*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{em } B \\ u &= f \quad \text{em } \partial B \end{aligned}$$

tem solução única em $C^2(B)\cap C^0(\overline{B})$, dada pela Fórmula de Poisson

$$u(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{n\,\mathrm{vol}_n(B_1)\,r} \int_{\partial B_r} \frac{r^2-\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^n}\, u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \ , & \mathbf{y}\in B \\ f(\mathbf{y}) \ , & \mathbf{y}\in\partial B \ . \end{cases}$$

A solução u é C^∞ em B.

Dem. Pode-se concluir que u é harmónica em B sabendo que a função de Green G, e portanto também G_ν, são harmónicas em B ou, em alternativa, calculando directamente o laplaciano de u. Do corolário (10.16) sabe-se que a solução é única. É claro que a fórmula de Poisson dá u como produto de duas funções C^∞ em B, pelo que u é C^∞ em B. Resta provar que u é contínua em ∂B. Seja K o núcleo de Poisson, $\epsilon>0$ arbitrário e $\mathbf{y_0}\in\partial B$. Como f é contínua em ∂B, existe $\delta>0$ tal que $|f(\mathbf{y})-f(\mathbf{y_0})|<\epsilon$ para $\mathbf{y}\in B$ com $\|\mathbf{y}-\mathbf{y_0}\|<\delta$. Como f é contínua no conjunto compacto ∂B, o seu valor absoluto tem um máximo $M\geq 0$ nesse conjunto. Portanto, se $\|\mathbf{y}-\mathbf{y_0}\|<\sigma$, com $\sigma<\delta/2$, é

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{y})-u(\mathbf{y_0})| &= \left| \int_{\partial B} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\,[u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y_0})]\ d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{\partial B\cap B_\delta(\mathbf{y_0})} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y_0})|\ d\mathbf{x} \\ &\qquad + \int_{\partial B\setminus B_\delta(\mathbf{y_0})} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y_0})|\ d\mathbf{x} \\ &\leq\ \epsilon + \frac{2Mr^{n-2}\,(r+\|\mathbf{y}\|)\,(r-\|\mathbf{y}\|)}{(\delta/2)^n} \leq\ \epsilon + \frac{2Mr^{n-2}\,2r\sigma}{(\delta/2)^n}\ . \end{aligned}$$

Para $\sigma>0$ suficientemente pequeno, é $|u(\mathbf{y})-u(\mathbf{y_0})|<2\epsilon$. Conclui-se que u é contínua em $\mathbf{y_0}$. Em consequência, u é contínua em $\overline{B}$. *Q.E.D.*

É possível provar a existência de solução de problemas de Dirichlet para a equação de Laplace em subconjuntos abertos limitados conexos de $\mathbb{R}^n$ cujas fronteiras satisfazem certas condições gerais, como por exemplo a **condição da esfera exterior**: para cada ponto da fronteira existe uma bola que contém esse ponto na sua fronteira e tem fecho contido no exterior do conjunto com excepção do ponto referido. No caso de $n=2$ uma condição mais fraca que assegura o resultado é que nenhuma componente conexa do complementar do conjunto seja simplesmente um ponto. Uma forma elementar de provar estes resultados[4] é com o **Método de Perron**[5].

A representação de Green permite obter o seguinte resultado simples de existência de solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson.

(10.20) **Teorema de existência de solução da equação de Poisson:** *Se $D\subset\mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado e aberto tal que o problema de Dirichlet para a equação de Laplace ($\rho=0$) correspondente ao problema de Dirichlet para a equação de Poisson*

$$\begin{aligned} \Delta u &= \rho \quad \text{em } B \\ u &= f \quad \text{em } \partial B \end{aligned}$$

tem solução em $C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$ qualquer que seja a função f contínua em ∂D, então o problema de Dirichlet para a equação de Poisson com $\rho\in C^1(D)\cap C^0(\overline{D})$ e condição na fronteira ∂D igual a zero tem solução única em $C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$, dada por $u(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y}) + \int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, para $\mathbf{y}\in D$, onde v é a solução do correspondente problema de Dirichlet para a equação de Laplace e G é a 1ª função de Green para D.

Dem. Sabe-se do corolário (10.16) que se a solução existe então é única. Da representação de Green, a única candidata a solução é dada pela fórmula no enunciado. Como $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ para $\mathbf{x}\in\partial D$ verifica-se $u=v$ em ∂D, pelo que u satisfaz a condição na fronteira. Como $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\xi(\mathbf{x})$, onde Γ é a solução fundamental normalizada da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{y}\}$ e $\xi\in C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$ satisfaz a equação de Laplace em D, basta observar que o **Potencial Newtoniano** $\int_D \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ de ρ em D pertence a $C^2(D)\cap C^0(\overline{D})$. *Q.E.D.*

[4]Para uma exposição simplificada do Método de Perron no plano complexo ver por exemplo o texto do autor *Análise Complexa de Uma Variável e Aplicações*, Departamento de Matemática, IST, 2005. O método aí descrito para o plano complexo pode ser generalizado para $\mathbb{R}^n$ sem dificuldades. Uma exposição clara do Método de Perron directamente em $\mathbb{R}^n$ encontra-se no livro Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977, que é uma boa referência para o estudo de equações diferenciais elípticas gerais.

[5]Perron, Oskar (1880-1975).

10.6 Caracterização das funções harmónicas pela Propriedade de Valor Médio

Provou-se no teorema (10.14) que uma solução C^2 da equação de Laplace num conjunto aberto satisfaz a Propriedade de Valor Médio. Usando a Fórmula de Poisson pode mesmo estabelecer-se que esta propriedade é uma caracterização das soluções da equação de Laplace no conjunto. Mais precisamente, que uma função contínua é solução da equação de Laplace num conjunto aberto se e só se satisfaz a Propriedade de Valor Médio. Esta propriedade é particularmente informativa sobre a natureza das soluções da equação de Laplace e ajuda a entender a associação desta equação a situações de equilíbrio de processos de difusão, como por exemplo para a equação do calor, pois é de esperar que tais processos façam evoluir funções de forma a equilibrar os seus valores de modo a não terem desvios em relação a médias de valores próximos.

O resultado seguinte estabelece a equivalência entre uma função ser harmónica num conjunto aberto, e ser contínua e satisfazer a Propriedade de Valor Médio nesse conjunto. Assim, poderíamos definir uma função harmónica num conjunto aberto como sendo uma função contínua com a propriedade de valor médio e tal bastaria para se poder provar que a função tem de ser indefinidamente diferenciável e satisfazer a equação de Laplace no conjunto considerado.

(10.21) **Teorema:** *Seja u uma função com valores reais contínua num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. A função u é harmónica em D se e só se satisfaz a Propriedade de Valor Médio em D.*

Dem. O teorema (10.14) garante que as funções harmónicas em D satisfazem a Propriedade de Valor Médio neste conjunto. Resta provar a recíproca. Se B é uma bola aberta tal que $\overline{B} \subset D$, o teorema (10.14) garante que existe uma função h harmónica em B e contínua em $\overline{B}$ tal que $u = h$ em ∂D. Como tanto u como h satisfazem a Propriedade de Valor Médio em B, também u–h satisfaz esta propriedade em B. Do Princípio do Máximo (10.15) resulta $u-h=0$ em B, pelo que $u=h$ é harmónica em D. *Q.E.D.*

10.7 Notas históricas

A equação de Laplace apareceu pela primeira vez publicada em 1752 num trabalho de L. Euler sobre os princípios do movimento de fluidos. Apareceu depois na obra de P.S. Laplace *Mécanique Celeste*, publicada em vários volumes entre 1799 e 1825.

S.D. Poisson contribuiu de decisivamente para o estudo das funções harmónicas em 1811 e 1812 e obteve em 1820 a Fórmula de Poisson para um círculo. Inspirado nos trabalhos de Laplace em mecânica celeste G. Green, nas suas próprias palavras "considerando quanto desejável era que um poder de acção universal, como a electricidade, fosse, tanto quanto possível, submetido à possibilidade de ser calculado", iniciou uma teoria matemática do electromagnetismo em 1928 com o trabalho *Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism*, onde também contribuiu para o estudo das funções harmónicas.

Em 1839 e 1840 C. Gauss iniciou a Teoria do Potencial como área específica de estudo, com uma publicação sobre forças centrais inversamente proporcionais ao quadrado da distância (como é o caso do campo gravitacional e do campo eléctrico). Nesta altura Gauss desconhecia o trabalho de G. Green já referido, o qual só ficou conhecido após W. Thomson[6] promover a sua reimpressão em 1846. Por esta razão, verificam-se no trabalho de Gauss sobreposições com o trabalho de Green que vão ao ponto de, tal como Green, ter utilizado o termo "potencial" para designar a função harmónica cujo gradiante é o campo de forças. Uma das importantes contribuições de Gauss neste âmbito foi a Propriedade de Valor Médio para funções harmónicas.

O Problema de Dirichlet foi considerado desde cedo e veio a ser conhecido por este nome na sequência dos trabalhos de Riemann de 1851 mencionados mais à frente. Com base em considerações físicas havia a convicção de que o problema tinha de ter solução única, pois correspondia a situações que se podiam concretizar fisicamente, no âmbito das áreas de aplicação acima mencionadas, pela fixação de valores na fronteira de um domínio limitado que deviam dar origem a uma solução. Contudo, a existência de solução do Problema de Dirichlet só foi provada em 1872, e apenas para o caso particular em que a região é um círculo, por H.A. Schwarz, apesar da Fórmula de Poisson que dá uma função harmónica por um integral que envolve os valores fixados na fronteira do círculo estar disponível desde 1820, como se referiu acima. A dificuldade, que só foi ultrapassada em 1872, era em provar que a função definida pela Fórmula de Poisson no interior do círculo é contínua na fronteira sempre que a função que define os valores na fronteira é contínua. Era, também, necessário provar que não havia mais soluções do problema, mas a questão da unicidade de solução, no caso de existência, já se encontrava na altura resolvida com base na Propriedade de Valor Médio.

É de referir que P.G. Dirichlet considerou uma modificação das ideias de Gauss para fundação da Teoria do Potencial e propôs a determinação de funções harmónicas como funções que minimizam o integral do quadrado da norma do gradiante de funções definidas na região considerada. Nos casos concretos de aplicação referidos este problema do Cálculo de Variações corresponde a minimizar a energia e, de um ponto de vista físico, é natural

[6]Thomson, William (Lord Kelvin) (1824-1907).

esperar que as soluções de equilíbrio minimizem a energia do sistema. B. Riemann veio a chamar a esta ideia, do âmbito do Cálculo de Variações, **Princípio de Dirichlet** e utilizou-a, em 1851, para obter propriedades de funções harmónicas.

A validade do Princípio de Dirichlet só foi estabelecida rigorosamente por volta de 1910, por vários matemáticos que incluíram D. Hilbert[7] , H. Weyl[8] e R. Courant[9], com métodos que exigiram novas importantes contribuições do âmbito da Análise Funcional para ultrapassar sérias dificuldades encontradas no problema de minimização considerado. Este resultado veio a constituir a base dos chamados Métodos Variacionais em Equações Diferenciais.

O Método de Perron para estabelecer a existência de soluções da equação de Laplace em regiões gerais foi desenvolvido por Oskar Perron em 1923.

O Princípio do Máximo para equações diferenciais parciais elípticas foi estabelecido por E. Hopf[10] em 1927, embora tenha havido contribuições anteriores de outros matemáticos para casos particulares.

[7]Hilbert, David (1862-1943).
[8]Weyl, Hermann (1885-1955).
[9]Courant, Richard (1888-1972).
[10]Hopf, Eberhard (1902-1983).