Introdução

Exemplos de aplicações de equações diferenciais

Em muitas situações em matemática e nas suas aplicações é natural considerar modelos que estabelecem relações envolvendo não só valores de variáveis, mas também das suas variações expressas por derivadas. Às equações em que ocorrem derivadas das incógnitas chama-se equações diferenciais.

As equações diferenciais têm um papel fundamental em quase todas as áreas da Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia e em algumas áreas das ciências sociais.

Uma lista, mesmo que relativamente seleccionada, de assuntos estudados com base em equações diferenciais revela uma grande diversidade: movimento de corpos, dinâmica de fluidos, comportamento estático e dinâmico de estruturas em engenharias Civil e Mecânica, aerodinâmica, comportamento mecânico ou electromagnético de materiais, controlo de sistemas, análise de circuitos e de sinais, propagação de ondas, transporte de massa, transmissão de calor, energia ou sinais, cinética e dinâmica de reacções químicas, processos de combustão, dispersão de poluentes, desintegração radioactiva, reacções nucleares, mecânica quântica, transporte através de membranas, propagação de impulsos em neurónios, processamento em redes neuronais, comportamento mecânico ou fisiológico de tecidos ou orgãos em biologia, dinâmica de populações e sistemas ecológicos, propagação de doenças, etc.

Alguns dos assuntos mencionados levam a equações diferenciais de estudo difícil e são solicitações e estímulos importantes para a intensa actividade de investigação que decorre presentemente em equações diferenciais no âmbito da matemática. Neste texto, porém, não iremos considerar senão alguns dos aspectos mais simples do estudo de equações diferenciais.

Como motivação inicial, convém descrever aqui alguns exemplos de situações concretas simples em que ocorrem equações diferenciais.

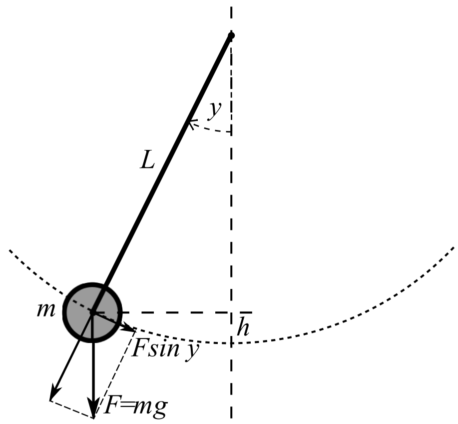

Figura 1.1: Pêndulo sujeito à acção da gravidade

1. Pêndulo. Considera-se o movimento newtoniano sem atrito de um pêndulo de massa m e comprimento L sujeito à gravidade (Figura 1.1). Designa-se por y o desvio angular do pêndulo da vertical e por h a altura da massa em relação à sua posição na vertical por baixo do eixo de rotação do pêndulo. Pode-se tomar para energia potencial devida à gravidade $U = mgh$ e a energia cinética é $K = mv^2/2$. Como $h = L(1-\cos y)$ e $v = L\dot{y}$, onde $\dot{y}$ designa a derivada de y, a energia total é $E = U + K = mgL(1-\cos y) + mL^2(\dot{y})^2/2$. Sem atrito a energia é conservada e $0 = \partial E/\partial t = mgL(\sin y)\dot{y} + mL^2\dot{y}\ddot{y}$. Logo

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L}\sin y \ .$$

Esta equação também pode ser obtida directamente da lei de Newton "força=massa×aceleração"; a força da gravidade é $F = mg$ e tem componente tangencial ao arco de circunferência descrito pelo pêndulo $F \sin y$, e a aceleração na mesma direcção é $L\ddot{y}$, o que dá a mesma equação.

Uma das aplicações mais antigas do pêndulo foi no primeiro sismómetro de que há notícia, construído no século I por Zhang Heng[1]. Galileo Galilei[2] propôs a aplicação de pêndulos em relógios mecânicos para melhorar a precisão da medida do tempo, e em 1620 Francis Bacon[3] propôs a aplicação de pêndulos para medida da gravidade. O primeiro relógio com base num pêndulo foi construído em 1656 por Huygens[4] e permitiu reduzir o erro de cerca de 15 minutos para 15 segundos por dia. Esta invenção foi importante para a navegação e comércio marítimos porque medir o tempo era a forma mais precisa de medir a longitude. Com melhorias mecânicas sucessivas, a regulação de relógios com pêndulos permaneceu a melhor forma de medir o tempo durante três séculos, tendo sido substituída por relógios regulados por oscilações de cristais de quartzo a partir de 1927.

[1] Heng, Zhang (78-139).
[2] Galilei, Galileo (1564-1642).
[3] Bacon, Francis (1561-1626).
[4] Huygens, Christiaan (1629-1695).

2. Decaimento radioactivo. A velocidade de desintegração de um isótopo radioactivo é em cada instante proporcional à quantidade de isótopo nesse instante. Designado por $y(t)$ a quantidade de isótopo no instante t, o decaimento radioactivo do isótopo é descrito pela equação diferencial

$$\dot{y} = -ky \ ,$$

onde k é uma constante positiva a que se chama constante de decaimento. Uma aplicação do decaimento radioactivo é a datação radioactiva em arqueologia, geologia e datação de obras de arte antigas inventado por E. Rutherford[5] em 1905 e aperfeiçoado no início dos anos 1950 por W. Libby[6], em particular com o isótopo carbono-14.

3. Viga elástica unidimensional. Um modelo para a deflexão $y(x)$ num ponto x ao longo de uma viga elástica unidimensional com carga transversal $f(x)$ (Figura 1.2) é

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(c(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) = f(x) \ ,$$

onde $c(x)$ é a rigidez da viga à curvatura.

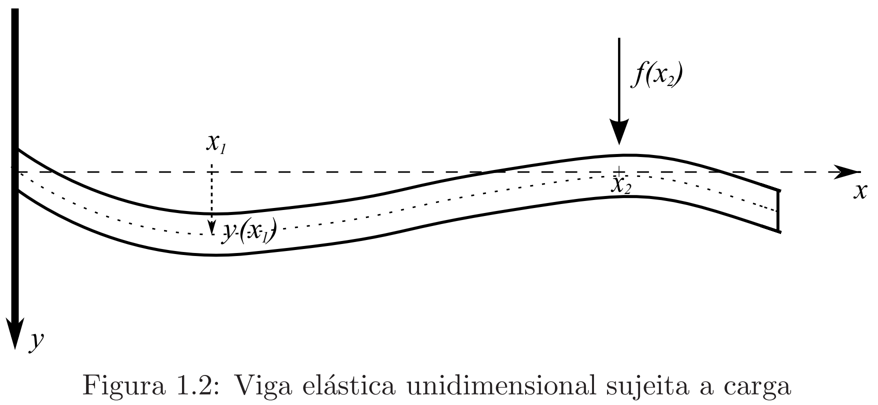

Figura 1.2: Viga elástica unidimensional sujeita a carga

4. Circuitos eléctricos. A corrente eléctrica i num circuito (Figura 1.3) com resistência R, condensador de capacidade C e bobina de coeficiente de auto-indução L em série ao qual é aplicada uma tensão eléctrica v pode ser descrita pela equação diferencial

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dv}{dt} \ .$$

[5] Rutherford, Ernest (1871-1937).

[6] Libby, Willard (1908-1980). Libby recebeu o Prémio Nobel da Química em 1960 pela sua contribuição para a datação baseada em carbono radioactivo.

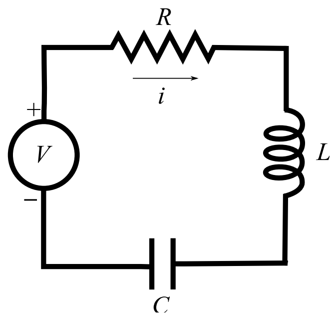

Figura 1.3: Circuito eléctrico RLC

5. Cinética química. Considera-se uma reacção química que envolve reagentes A, B, C, D, E como esquematizado

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C \;, \qquad C + D \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} E \;,$$

onde k_1, k_2, k_3, k_4 são as velocidades de reacção indicadas. Designando as diferenças das concentrações dos reagentes em relação às concentrações de equilíbrio por A, B, C, D, E em unidades apropriadas, de acordo com a combinação molecular verificada na reacção, um modelo simplificado da evolução das concentrações dos reagentes consiste em admitir que a velocidade de combinação é proporcional ao produto de potências das concentrações, em que os expoentes estão relacionados com as condições de equilíbrio das reacções, a chamada lei de acção das massas formulada em 1864 por Gulberg[7] e Waage[8]. No caso simplificado em que os expoentes são todos 1 obtém-se

$$\dot{A} = k_2 C - k_1 AB, \;\; \dot{B} = k_2 C - k_1 AB \;,$$

$$\dot{C} = k_1 AB - k_2 C + k_4 E - k_3 CD, \;\; \dot{D} = k_4 E - k_3 CD, \;\; \dot{E} = k_3 CD - k_4 E.$$

6. Transmissão de doenças. Algumas doenças, como a febre tifóide, propagam-se através de portadores que são indivíduos infectados que transmitem a doença mas não manifestam sintomas. Designa-se por $x(t)$ e $y(t)$ a densidade de, respectivamente, portadores e indivíduos sãos mas susceptíveis numa população num instante t. Supõe-se que os portadores são removidos, por tratamento ou outros métodos a uma taxa $a > 0$ e que a doença se propaga de forma a que o crescimento de indivíduos doentes é proporcional ao produto das densidades de de portadores e indivíduos sãos susceptíveis, com um coeficiente de proporcionalidade $b > 0$. Um modelo simplificado para esta situação é dado pelas equações diferenciais

$$\dot{x} = -ax \,, \qquad \dot{y} = -bxy \;.$$

Com este modelo há uma fracção da população que escapa à doença.

[7]Gulberg, Cato (1836-1902).
[8]Waage, Peter (1833-1900).

7. Dinâmica de populações. Considera-se a evolução de duas espécies: predador e presa. Supõe-se que os predadores se alimentam exclusivamente de presas e que o seu crescimento médio por indivíduo é em cada instante proporcional à diferença entre o número de presas nesse instante e um mínimo m de presas necessários para assegurar a sobrevivência da espécie de predadores. Supõe-se que na ausência de predadores a espécie de presas tem um crescimento médio por indivíduo constante, e que a presença de predadores manifesta-se fazendo decrescer o crescimento das presas por uma quantidade proporcional à possibilidade de encontros predador-presa, que se supõe ser proporcional ao produto dos números de predadores e presas. Designando por x e y funções reais que dão boas aproximações para, respectivamente, o número de predadores e o número de presas em função do tempo, um modelo possível para a evolução das duas espécies ao longo do tempo é o **sistema de Lotka[9]-Volterra[10]** seguinte, com $a, b, c, m > 0$,

$$\dot{x} = a(y - m)x \;, \qquad \dot{y} = by - cxy \;.$$

Este modelo foi independentemente proposto por Lotka em 1925 e Volterra em 1926. Estas equações têm soluções que oscilam periodicamente.

O sistema de Lotka-Volterra também foi aplicado em economia por Giuseppe Palomba[11], em 1939, e por Richard Goodwin[12], em 1967, como modelo da interacção entre emprego e salário real (*i.e.*, a fracção dos salários no produto bruto), e numa outra aplicação como interacção entre dois sectores industriais concorrentes.

8. Equação do calor. A Lei de Fourier[13] para a propagação do calor, formulada em 1807, estabelece que o calor flui na direcção do gradiante da temperatura, no sentido contrário a este gradiante (do quente para o frio) e proporcionalmente à sua norma. Com base nesta lei e no teorema da divergência pode-se, com hipóteses apropriadas, obter para a temperatura u de um corpo com calor específico e condutividade térmica constantes a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(t, x, y, z) \;,$$

onde f é a função que dá o calor fornecido ao corpo em cada ponto e instante de tempo, e a é uma constante que depende do calor específico e da condutividade térmica. Esta equação também pode ser escrita $\partial u/\partial t - a \operatorname{lap} u = f$, onde $\operatorname{lap} u = \sum_{j=1}^{3} \partial^2 u/\partial x_j^2$ é o **laplaciano** de u, e é conhecida por **equação do calor**.

[9] Lotka, Alfred (1880-1949).
[10] Volterra, Vito (1860-1940).
[11] Palomba, Giuseppe (1908-1986).
[12] Goodwin, Richard (1913-1996).
[13] Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830).

9. Processos de reacção-difusão. A propagação do calor descrita anteriormente corresponde a um processo de difusão. Em certos processos químicos há a considerar a sobreposição de processos de reacção e difusão. Designa-se por $\mathbf{u} = (u_1, \ldots\ldots, u_n)$ a concentração de n espécies químicas num reactor sujeitas a difusão homogénea no reactor. Em certas situações, um modelo para a evolução das concentrações das espécies químicas é

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}\right) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \ ,$$

onde a função $\mathbf{f}$ descreve o processo de reacção entre as componentes de $\mathbf{u}$. Definindo o laplaciano de funções vectoriais $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ pelos laplacianos das componentes, $\operatorname{lap} \mathbf{u} = (\operatorname{lap} u_1, \operatorname{lap} u_2, \operatorname{lap} u_3)$, a equação de reacção-difusão considerada também pode ser escrita $\partial \mathbf{u}/\partial t - a \operatorname{lap} u = f(\mathbf{u})$.

10. Dinâmica de fluidos. Considera-se o movimento de um fluido de densidade ρ e velocidade $\mathbf{v}$ em cada ponto do espaço ocupado pelo fluido. Com base no teorema da divergência e na lei de conservação de massa obtém-se a **equação da continuidade**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \ ,$$

com

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial z} \ .$$

No caso de um fluido incompressível com densidade constante $\rho = \rho_0$, a equação da continuidade é equivalente a $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

A **equação do movimento** pode ser obtida da lei de Newton "força= massa×aceleração", agora em termos das densidades de força e massa por unidade de volume. Da regra de derivação da função composta a aceleração em cada ponto é $(d/dt)\mathbf{v} = \partial \mathbf{v}/\partial t + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v}$, onde $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ é a matriz cujas linhas são os gradiantes de cada uma das componentes de $\mathbf{v}$, *i.e.,* é a matriz Jacobiana de $\mathbf{v}$ em relação às coordenadas espaciais com t constante. Portanto, a equação de Newton escreve-se $\rho\,[\partial \mathbf{v}/\partial t + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v}] = \mathbf{f}$, onde $\mathbf{f}$ é a densidade de força por unidade de volume em cada ponto.

A situação mais simples para um fluido com viscosidade é a do chamado **fluido newtoniano** incompressível de densidade constante ρ_0, em que a força por unidade de volume em cada ponto é $\mu \operatorname{lap} \mathbf{v} - \operatorname{grad} \pi + \mathbf{b}$, onde $\mu/\rho_0 > 0$ é a viscosidade cinemática, π é a pressão e $\mathbf{b}$ é a força externa por unidade de volume exercida em pontos interiores do material, como por a gravidade. As equações da continuidade e do movimento são as **equações de Navier[14]-Stokes[15]**

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v}\right] = \mu \operatorname{lap} \mathbf{v} - \operatorname{grad} \pi + \mathbf{b} \ .$$

[14]Navier, Claude-Louis Navier (1785-1836).
[15]Stokes, George Gabriel (1819-1903).

Um fluido incompressível com densidade constante e sem viscosidade chama-se **fluido ideal**. As correspondentes equações, conhecidas por **equações de Euler**[16], obtêm-se das anteriores com $\mu=0$, especificamente

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$
$$\rho_0\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad}\mathbf{v})\,\mathbf{v}\right] = -\operatorname{grad}\pi + \mathbf{b}\ .$$

Considera-se agora o caso particular do movimento de um fluido ideal, estacionário e com campo de velocidades gradiante. Diz-se que o movimento é **estacionário** se a velocidade $\mathbf{v}$ é independente do tempo, e que o campo de velocidades é gradiante se $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$ para alguma função escalar φ a que se chama um **potencial da velocidade**. Nestas condições é

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{lap}\varphi\ ,$$

pelo que o potencial da velocidade satisfaz a **equação de Laplace**[17] $\operatorname{lap}\varphi=0$ ou, mais explicitamente,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\ .$$

O caso mais simples de um fluido compressível é o de **fluido elástico**, em que a pressão é em cada ponto função da densidade, $\pi = \Pi(\rho)$, sem viscosidade. Supõe-se que a pressão é uma função estritamente crescente da densidade e define-se $\kappa(\rho) = \sqrt{\Pi'(\rho)}$. Então $\operatorname{grad}\pi = \Pi'(\rho)\operatorname{grad}\rho$ e as equações da continuidade e do movimento são

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$$
$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad}\mathbf{v})\,\mathbf{v}\right] = -\kappa^2(\rho)\operatorname{grad}\rho + \mathbf{b}\ .$$

Considerando $\mathbf{b}=0$ e o fluxo próximo de um estado de equilíbrio com densidade constante ρ_0 e velocidade nula com as equações obtidas das anteriores por linearização neste equilíbrio, obtêm-se as **equações da acústica**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}$$
$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\kappa^2(\rho_0)\operatorname{grad}\rho\ .$$

Derivando a 1ª equação em ordem a t e calculando a divergência da 2ª equação obtém-se $\rho''=\kappa(\rho_0)\operatorname{lap}\rho$, que se pode escrever

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \kappa^2(\rho_0)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right) = 0\ .$$

As soluções desta equação são ondas que se propagam com velocidade $\kappa(\rho_0)$, a que se chama velocidade do som, pelo que esta última equação é conhecida por **equação das ondas**.

[16]Euler, Leonhard Paul (1707-1783).
[17]Laplace, Pierre-Simon (1749-1827).

11. Electromagnetismo. O campo electromagnético em meios homogéneos isotrópicos é descrito com resultados práticos muito bons pelas **equações de Maxwell**[18]

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\
\operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho \\
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0\ ,
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{E}$ é o campo eléctrico, $\mathbf{H}$ é o campo magnético, $\mathbf{D}$ é o deslocamento eléctrico, $\mathbf{B}$ é a indução magnética, $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente eléctrica, ρ é a densidade de carga eléctrica,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\left(\frac{\partial E_2}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial y},\frac{\partial E_3}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial z},\frac{\partial E_1}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial x}\right),\ \ \operatorname{div}\mathbf{D}=\frac{\partial D_1}{\partial x}+\frac{\partial D_2}{\partial y}+\frac{\partial D_3}{\partial z},$$

e $\operatorname{rot}\mathbf{H}$, $\operatorname{div}\mathbf{B}$ satisfazem expressões análogas. Os campos estão ainda relacionados pelas leis de constituição do meio material considerado, $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, onde ϵ é a permissividade eléctrica e μ é a permeabilidade magnética. Supõe-se que os campos são todos C^2.

A equação idêntica à conservação de massa em fluidos acima descrita pela equação de continuidade em que ρ é a densidade de carga eléctrica expressa a conservação de carga eléctrica. Costuma-se neste caso chamar a $\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}$ densidade de corrente eléctrica, e a equação da continuidade é então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{J}\ .$$

Naturalmente esta equação tem de ser satisfeita, mas já é consequência da 2ª e 3ª equações de Maxwell. Na verdade, como os campos são C^2, as derivadas parciais de 2ª ordem são independentes da ordem de derivação, pelo que $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$ e $(\partial/\partial t)\operatorname{div}\mathbf{D}=\operatorname{div}\partial\mathbf{D}/\partial t$. Portanto, calculando a divergência de ambos os lados da 2ª equação de Maxwell obtém-se $\operatorname{div}\mathbf{J}=-(\partial/\partial t)\operatorname{div}\mathbf{D}$, o que com a 3ª equação de Maxwell dá $\operatorname{div}\mathbf{J}=-\partial\rho/\partial t$, que é a equação da continuidade para a carga eléctrica.

Embora seja, em geral, difícil lidar directamente com as equações diferenciais de Maxwell, em certos casos especiais obtêm-se equações diferenciais mais simples de grande utilidade prática. Por exemplo, no caso de um campo magnético estacionário, em que $\partial\mathbf{B}/\partial t=0$, a primeira equação de Maxwell dá $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, pelo que em conjuntos simplesmente conexos $\mathbf{E}$ é um gradiante e, portanto, existe um campo escalar V tal que $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}V$, a que se chama potencial eléctrico. Usando esta relação na terceira equação de

[18] Maxwell, James Clerk (1831-1879).

Maxwell, obtém-se $\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon\, \mathbf{E} = -\epsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\epsilon \operatorname{lap} V$, pelo que o potencial eléctrico satisfaz então a **equação de Poisson**[19]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}\,,$$

a qual se reduz à equação de Laplace em conjuntos sem cargas (onde $\rho = 0$).

Uma outra situação de grande interesse em electromagnetismo ocorre ao considerar um meio sem cargas eléctricas nem correntes, $\mathbf{J} = 0$ e $\rho = 0$. Calculando o rotacional de ambos os membros das duas primeiras equações de Maxwell obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}\,. \end{aligned}$$

Notando que para qualquer campo vectorial $\mathbf{f}$ de classe C^2 se verifica $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{f}) - \operatorname{lap} \mathbf{f}$, obtém-se das equações anteriores

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \operatorname{lap} \mathbf{E} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \operatorname{lap} \mathbf{H}\,.$$

Assim, cada uma das componentes escalares dos campos eléctrico e magnético satisfaz equações diferenciais da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0\,,$$

com $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, que também se pode escrever $\partial^2 u/\partial t^2 - v^2 \operatorname{lap} u = 0$. Esta é a **equação das ondas** referida no exemplo anterior a propósito de ondas acústicas em fluidos, mas no caso presente as soluções desta equação são ondas que se propagam com velocidade $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

A uma equação diferencial com derivadas em ordem a uma só variável independente, como nos exemplos 1 a 7 anteriores, chama-se **equação diferencial ordinária**. A uma equação diferencial com derivadas parciais em ordem a mais de uma variável independente, como nos exemplos 8 a 11, chama-se **equação diferencial parcial**. A **ordem** de uma equação diferencial é a maior ordem de derivadas das incógnitas na equação. As equações diferenciais dos exemplos anteriores são de 2ª ordem excepto as dos exemplos 2, 5, 6 e 7 que são de 1ª ordem, as dos exemplos 10 e 11 que são de 1ª ou 2ª ordem, e a do exemplo 3 que é de 4ª ordem.

[19]Poisson, Simeon-Dénis (1781-1840).

Neste texto definimos **solução de uma equação diferencial** num conjunto aberto S como sendo uma função contínua e com todas as derivadas que aparecem na equação também contínuas em S que satisfaz a equação em S. É usual chamar **soluções clássicas** às soluções de equações diferenciais neste sentido .

No estudo de equações diferenciais é frequentemente apropriado considerar soluções que satisfazem condições mais fracas. Na verdade, de um ponto de vista estritamente matemático a noção de solução de uma equação diferencial é uma questão de escolha de um equilíbrio delicado em cada situação concreta: se as condições são muito fortes pode acontecer que não existam soluções e se são muito fracas pode haver demasiadas soluções. Do ponto de vista de aplicações, a noção deve ser apropriada à aplicação considerada: por exemplo, em aplicações em circuitos eléctricos, e em particular em circuitos electrónicos digitais assim como em certos problemas de controlo de sistemas em que convém usar comandos descontínuos, pode ser desejável considerar soluções de equações diferenciais ordinárias com descontinuidades num conjunto numerável de pontos. Em mecânica dos meios contínuos é vulgar ter equações diferenciais que estabelecem relações pontuais resultantes de considerar equações integrais em volumes que são localizadas fazendo os volumes tenderem para pontos, como é o caso das que foram consideradas nos exemplos anteriores 8 a 11; portanto, é razoável considerar como soluções funções que satisfazem as equações integrais mesmo que as derivadas que aparecem na equação não sejam todas contínuas, ou funções que satisfazem as equações integrais e correspondam a "energia" limitada, ou outra condição que faça sentido para a aplicação em causa. Este tipo de questões, inevitáveis num estudo mais amplo de equações diferenciais, não são consideradas neste texto.

O termo "equação diferencial" foi introduzido por G.W. Leibniz[20] em 1676. A importância da ideia de resolver equações diferenciais foi expressa de forma dramática por I. Newton[21], também de 1676, na frase "dada uma equação qualquer envolvendo quantidades variáveis calcular derivadas e vice versa". Newton dava tal importância a esta ideia que a escreveu na forma do anagrama[22] *"aaaaaa cc d æ eeeeeeeeeeee ff iiiiiii 111 nnnnnnnnn oooo*

[20] Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716).

[21] Newton, Isaac (1642-1727).

[22] Os filósofos naturais do século XVII expressavam frequentemente o que consideravam ser as suas descobertas mais importantes por anagramas em latim para defenderem a prioridade de descoberta antes dos resultados serem publicados. Por exemplo, Galileo Galilei usou em 1610 *"smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras"* para *"altissimum planetam tergeminum observavi"*, que pode ser traduzido por "observei que o planeta mais distante tem uma forma tripla", referindo-se à descoberta dos anéis de Saturno; Robert Hooke publicou primeiro a lei da elasticidade da força proporcional à extensão, hoje conhecida como lei de Hooke, em 1660 na forma do anagrama *"ceiiinosssttuv"* para *"for ut tensio, sic vis"*, que pode ser traduzido por "como a extensão, também a força".

qqqq rr ssss tttttttt vvvvvvvvvvvv x" numa carta dirigida a H. Oldenburg[23], em 24 de Outubro de 1676, com a intenção de que fosse enviada a Leibniz em resposta a perguntas deste sobre como Newton tinha chegado à fórmula binomial com expoente real arbitrário em termos de séries[24], embora a carta só tenha sido enviada por H. Oldenburg a Leibniz em Maio de 1677. Na verdade, reordenando as letras na frase em latim *"data æquatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa"* e ordenando-as por ordem alfabética obtém-se o anagrama acima, como foi esclarecido por Newton numa nota contida na edição do seu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de 1687. A notação para derivada em ordem ao tempo com um ponto sobre a variável, como em $\dot{y}$, também se deve a Newton, em 1665.

A teoria das equações diferenciais começou no final do século XVII, quando G.W. Leibniz, I. Barrow[25], I. Newton, Jacob Bernoulli[26], Johann Bernoulli[27] determinaram soluções de algumas equações diferenciais muito simples, de 1ª e 2ª ordens, associadas a problemas de mecânica e geometria. Outros iniciadores notáveis da teoria das equações diferenciais foram J. Riccati[28], D. Bernoulli[29] e L. Euler. As soluções dessas equações podiam ser expressas em termos de funções elementares [30]. No período que se seguiu imediatamente a esse trabalho pioneiro foi desenvolvido um conjunto de truques e métodos sistemáticos para determinar soluções de equações diferenciais em termos de funções elementares. Estes resultados fazem parte da chamada **teoria quantitativa das equações diferenciais**.

Ficou claro relativamente cedo, com uma demonstração de J. Liouville[31] em 1835, que apenas uma classe restrita de equações diferenciais pode ser resolvida em termos das funções elementares (o que aplicado a equações diferenciais $\dot{y}=f(t)$ implica que as funções reais de variável real f primitiváveis em termos de funções elementares também constituem uma classe restrita). Em particular, Liouville estabeleceu que as funções primitiváveis em ter-

[23] Oldenburg, Henry (1618-1677), diplomata, teólogo e filósofo natural alemão que foi o primeiro secretário da *Royal Society* inglesa e é creditado como tendo sido o primeiro editor de uma revista científica com arbitragem por pares, *The Philosophical Transactions of the Royal Society*, iniciada em 1665 sob o nome mais simples *Philosophical Transactions*.

[24] $(1+x)^\alpha = \sum_{k=o}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, onde $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)/k!$.

[25] Barrow, Issac (1630-1677).

[26] Bernoulli, Jacob (1654-1705).

[27] Bernoulli, Johan (1667-1748).

[28] Riccati, Jacopo (1676-1754).

[29] Bernoulli, Daniel (1700-1782).

[30] Em linguagem simples, uma função elementar real (respectivamente, complexa) é uma função de variáveis reais (respectivamente, complexas) que pode ser expressa por fórmulas envolvendo um número finito de potências, raízes, exponenciais, logaritmos e constantes através de composições e das quatro operações elementares de números reais (soma, diferença, produto e divisão). Note-se que, as funções trigonométricas complexas e as suas inversas são funções elementares.

[31] Liouville, Joseph (1809-1882).

mos de funções elementares são necessariamente somas finitas de funções elementares e logaritmos de funções elementares, mas mesmo estas podem não ser primitiváveis em termos de funções elementares, como é o caso da função elementar definida por $f(t) = e^{-t^2}$. O esclarecimento desta questão é semelhante a provar a inexistência de fórmulas resolventes para equações algébricas polinomiais de ordem superior a 4 em termos de radicais, como foi feito por Galois[32]. Em ambos os casos são usados métodos algébricos da teoria de grupos[33]: no caso de equações algébricas polinomiais grupos finitos e no caso de equações diferenciais grupos de Lie[34][35].

Assim, o estudo das equações diferenciais prosseguiu no sentido de obter rigorosamente propriedades de soluções a partir da análise da equação, mas sem a resolver, o que constitui a chamada **teoria qualitativa das equações diferenciais** e é uma parte da **teoria dos sistemas dinâmicos**. É uma área em que são usados métodos de quase todos os campos da matemática (análise funcional, teoria da medida, geometria diferencial, topologia diferencial, topologia algébrica, álgebra, teoria dos números, etc.) e na qual decorre importante actividade de investigação. Pode-se dizer que o principal iniciador desta área foi H. Poincaré[36], matemático com contribuições impressionantes num vasto leque de domínios e pioneiro em várias áreas da matemática que tiveram grande desenvolvimento no século XX, além da teoria qualitativa das equações diferenciais, topologia diferencial e topologia algébrica. Um outro iniciador da teoria qualitativa de equações diferenciais foi A.M. Lyapunov[37], em particular por contribuições sobre **estabilidade**.

A partir de cerca de 1950, com o progressivo aumento das capacidades de cálculo de computadores electrónicos, tornou-se possível resolver numericamente uma grande classe de equações diferenciais. O estudo de processos de resolução numérica de equações diferenciais é uma importante área da Análise Numérica que tem tido um grande impacto na teoria das equações diferenciais e nas suas aplicações, nomeadamente no âmbito da Engenha-

[32] Galois, Èvariste (1811-1832).

[33] Um **grupo** é um conjunto G com uma operação que a cada par de elementos $a,b \in G$ faz corresponder um elemento $a \cdot b = g(a,b) \in G$ e satisfaz: *(i)* associatividade, *i.e.,* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; *(ii)* existência de identidade, *i.e.,* $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, para todo $a \in G$; e *(iii)* existência de inverso de cada $a \in G$, *i.e.,* $a^{-1} \in G$ tal que $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. A principal razão da importância dos grupos é permitem descrever simetrias. A primeira definição abstracta de grupo data de 1854 e deve-se a Arthur Cayley (1821-1895), mas já tinham sido usados grupos de simetria por Galois precisamente para a questão da existência ou não de fórmulas resolventes de equações algébricas polinomiais em termos de radicais.

[34] Lie, Sophus (1842-1899).

[35] Um **grupo de Lie** é um grupo G com uma operação $a \cdot b = g(a,b) \in G$, em que G é uma variedade diferencial C^∞ de dimensão finita e tanto g como a inversão $a \mapsto a^{-1}$ são funções C^∞. Os grupos de Lie foram introduzidos em 1870 por S. Lie para estudar propriedades de equações diferenciais.

[36] Poincaré, Henri (1854-1912).

[37] Lyapunov, Aleksandr Mikhailovich (1857-1918).

ria. Contudo, o estudo e a validação dos métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, uma área que também se mantém muito activa na investigação corrente em matemática, baseia-se na teoria qualitativa das equações diferenciais. Sem a aplicação da teoria qualitativa para validação dos resultados numéricos obtidos em computador estes não assumiriam a utilidade e o significado que têm e não teria sido possível desenvolver muitos dos processos numéricos de cálculo que se têm revelado úteis.

O recente grande aumento das capacidades de processamento de computadores veio pôr ao dispor de matemáticos um verdadeiro instrumento laboratorial para experiências sobre o comportamento das soluções de equações diferenciais. Este tipo de "matemática experimental" assumiu um papel substancial na investigação da própria teoria qualitativa de equações diferenciais por permitir explorar propriedades das soluções, visualizar conjuntos de soluções, testar conjecturas.

Nos exemplos anteriores restringimos-nos a situações simples que podem ser consideradas ao nível elementar deste texto. Acontece que as aplicações de equações diferenciais vão muito além do que foi apontado. De facto, muitas das aplicações da matemática às ciências experimentais e à engenharia envolvem equações diferenciais. Por outro lado, além das consequências para situações de aplicações concretas, o estudo de equações diferenciais teve grande importância na origem de áreas da matemática que se tornaram disciplinas com especificidade própria. Logo na parte final do século XVII, a formulação de problemas de geometria e de mecânica em termos de equações diferenciais, com destaque para a equação de Newton para o movimento de corpos, esteve na origem do próprio desenvolvimento do cálculo diferencial e integral e, portanto, da Análise Matemática. Também, mais de um quarto dos famosos 23 **Problemas de Hilbert** apresentados por D. Hilbert[38] no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900 como sendo os mais importantes problemas de matemática em aberto na altura e que foram fortemente influentes na investigação matemática no século XX, são de ou motivados por equações diferenciais[39] Na verdade, o estudo de equações diferenciais encontra-se nas raízes do desenvolvimento de muitas outras áreas como, por exemplo, Álgebra Linear, Teoria dos Grupos de Lie, Análise Funcional, Análise Harmónica, Análise Numérica, Cálculo de Variações,

[38]Hilbert, David (1862-1943).

[39] 1º) Hipótese do *Continuum*, i.e., de inexistência de conjuntos com cardinalidade entre a de $\mathbb{N}$ e a de $\mathbb{R}$ (ver as notas históricas do capítulo sobre séries de Fourier onde se mostra que a motivação foi do estudo de séries de Fourier a propósito de equações diferenciais); 16º) Descrever as posições relativas de ovais definidas por curvas algébricas reais e como ciclos limite de equações diferenciais definidas por campos vectoriais polinomiais no plano; 19º) As soluções de problemas regulares do cálculo de variações são necessariamente analíticas? 20º) Todos os problemas variacionais com certas condições de fronteira têm soluções? 21º) Existência de equações diferenciais lineares para cada grupo de monodromia dado; 23º) Desenvolver o cálculo de variações para além do conhecido.

Teoria da Elasticidade, Dinâmica de Fluidos, Teoria do Electromagnetismo, Teoria do Controlo, Mecânica Quântica.