Cronologia do desenvolvimento da análise complexa considerado neste livro

Século XVI (1ª metade)

1501

1511

1521

1531

1541

1545	Cardano	Refere pela primeira vez a possibilidade de considerar números que sejam raízes quadradas de números reais negativos

1550

Século XVI (2ª metade)

1551

1561

1571

1572	Bombelli	Expõe as propriedades algébricas dos números complexos. Introduz o símbolo $\sqrt{-1}$

1581

1591

1600

Século XVII (1ª metade)

1601

1611

1621

1629	Girard	Prevê a validade do Teorema Fundamental da Álgebra

1631

1641

1650

Século XVII (2ª metade)

1651

1661

1671

1681

1691

1700

Século XVIII (1ª metade)

1701		
1711		
1721		
1731		
1740	Euler	Refere a relação entre funções trigonométricas e a função exponencial numa carta a Johann Bernoulli
1741		
1748	Euler	Introduz o símbolo i , a notação $a+ib$ para números complexos, a expressão $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, a relação $e^{i\pi}=-1$, a Fórmula de De Moivre, introduz produtos infinitos de números complexos que, para reais, tinham sido introduzidos por Viéte em 1579
1750		

Século XVIII (2ª metade)

1751		
1752	d'Alembert	Utiliza funções complexas no estudo do movimento de fluidos
1752	Euler	Refere pela primeira vez a equação de Laplace, num trabalho de hidrodinâmica
1761		
1771		
1776	Euler	Apresenta o primeiro estudo sistemático das funções complexas e das suas aplicações a análise, hidrodinâmica e cartografia. Introduz as transformações conformes, com a designação "transformações infinitesimamente semelhantes", a propósito de cartografia. Refere pela primeira vez integrais de funções complexas, sem tornar rigorosa a definição
1777	Euler	
1781		
1789	Schubert	Introduz a designação "transformação conforme"
1791		
1799	Laplace	Estuda a equação de Laplace na sua obra em 5 volumes *Mécanique Céleste,* publicada entre 1799 e 1825
1799	Wessel	Refere a representação de números complexos num plano
1800		

Século XIX (1ª metade)

1801		
1806	Argand	Refere a representação de números complexos num plano
1811	Gauss	Refere a identificação de números complexos com pontos num plano e uma noção rigorosa de integrais de funções complexas, numa carta enviada a F.W. Bessel
1811	Legendre	Introduz o termo "Função Gama" e a notação Γ para esta função
1812	Poisson	Contribui decisivamente para o estudo de funções harmónicas
1814	Cauchy	Refere integrais complexos de forma análoga à de L. Euler em 1777 numa memória à Academia de Ciências de Paris. Aponta a possibilidade de diferença nos valores de integrais sobre caminhos com as mesmas extremidades que delimitam uma região onde a função integranda tem pólos
1816	Gauss	Introduz o termo "número complexo". Prova pela primeira vez o Teorema Fundamental da Álgebra para polinómios com coeficientes reais, previsto por A. Girard em 1629, depois de tentativas de d'Alembert (1746), Euler (1749), Laplace (1795), o próprio Gauss na sua tese de doutoramento (1799), Argand (1814) e outros
1817	Bolzano	Adopta pela primeira vez a noção actual de função nas suas lições sobre continuidade, só publicadas em 1930
1820	Poisson	Obtém a Fórmula de Poisson para funções harmónicas no interior de um círculo, a partir de valores dados por uma função contínua definida na fronteira
1821	Cauchy	Define convergência de sucessões e de séries. Introduz a noção actual de função. Refere pela primeira vez a fórmula para o raio de convergência de uma série de potências, mas não a prova. Obtém o primeiro critério de convergência para produtos infinitos
1823	Cauchy	Define integral rigorosamente pela primeira vez, para funções reais contínuas em intervalos limitados e fechados
1825	Cauchy	Define derivada. Publica a memória de 1814 acima referida, com uma nota de 1822 onde refere o Teorema de Cauchy para funções C^1 e rectângulos alinhados com os eixos. Define integral de função complexa, mas sem referências geométricas. Estabelece a invariância de integrais com as mesmas extremidades e o Teorema de Cauchy em conjuntos simplesmente conexos, para funções C^1
1826	Abel	Estabelece a existência do raio de convergência de séries de potências e a convergência absoluta no interior do círculo de convergência
1826	Cauchy	Introduz o termo "resíduo" para a diferença de integrais sobre caminhos com as mesmas extremidades que delimitam uma região com um pólo, que identificou em 1814. Estabelece o Teorema dos Resíduos para funções C^1 com singularidades isoladas
1828	Green	Contribui para o estudo das funções harmónicas em *Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Elasticity and Magnetism.* Introduz a noção de Função de Green
1829	Jacobi	Introduz o seno elíptico e o correspondente integral elíptico
1829	Dirichlet	Usa a definição actual de função, a propósito do conceito de integral
1831	Gauss	Prova pela primeira vez o Teorema Fundamental da Álgebra para polinómios com coeficientes complexos. Publica a representação de números complexos num plano
1831	Cauchy	Estabelece a Fórmula de Cauchy em círculos para funções C^1, numa memória dedicada a mecânica celeste. Comunica à Academia de Turim a representação de funções complexas C^1 por séries de potências no interior de círculos contidos no domínio de uma função holomorfa, embora sem justificar a integração de séries termo a termo usada na prova
1837	Hamilton	Introduz a notação (a,b) para números complexos
1839	Gauss	Inicia a Teoria do Potencial com uma publicação sobre forças centrais inversamente proporcionais ao quadrado da distância, como é o caso dos campos gravitacional, eléctrico e magnético. Este trabalho contém o Propriedade de Valor Médio para funções harmónicas
1841	Weierstrass	Prova nos seus "Cadernos de Munique", publicados apenas em 1894, que as sucessões e séries de funções analíticas uniformemente convergentes em conjuntos compactos são analíticas e podem ser derivadas termo a termo. Obtém as representações em série de Laurent na vizinhança de singularidades isoladas. Introduz a notação $\|z\|$ para o módulo de números complexos e reais
1842	Weierstrass	Identifica que as funções analíticas podem ter "fronteiras naturais" para além das quais não podem ser prolongadas
1843	Laurent	Estabelece a representação em série de Laurent na vizinhança de singularidades isoladas, embora já figurasse nos "Cadernos de Munique" de K. Weierstrass de 1841, publicados só em 1894
1844	Tchébychev	Assinala, a propósito da memória de Cauchy de 1831, que a integração de séries de potências termo a termo só é possível em casos particulares
1844	Cauchy	Prova o Teorema de Liouville
1846	Weierstrass	Introduz nas suas aulas o estudo de "fronteiras naturais" de funções analíticas para além das quais não podem ser prolongadas
1848	Stokes e Seidel	Introduzem, independentemente, a convergência uniforme de sucessões e séries para a integração termo a termo
1849	Gauss	Dá uma nova prova do Teorema Fundamental da Álgebra seguindo a ideia da sua tentativa falhada de 1799, mas agora para polinómios com coeficientes complexos
1850		

Século XIX (2ª metade)

1851	Riemann	Explora as condições de Cauchy-Riemann. Prova o Teorema de Unicidade de funções analíticas, o Princípio do Módulo Máximo, o Teorema da Aplicação Aberta. Introduz o plano complexo estendido e a Superfície Esférica de Riemann. Estabelece as bases do prolongamento analítico e considera as Superfícies de Riemann. Prevê o Teorema da Transformação de Riemann, que só veio a ser provado em 1912 por Carathéodory. Considera os princípios de Reflexão e de Dirichlet e usa-os, mas não os prova
1851	Sylvester	Descobre os divisores elementares da factorização de funções inteiras
1854	Riemann	Estende a definição de integral de uma função real para funções limitadas em intervalos limitados e fechados, adopta a noção actual de função. Desenvolve o prolongamento analítico de funções com base em superfícies de Riemann
1854	Weierstrass	Contribui de forma decisiva para o desenvolvimento do estudo de produtos infinitos de números complexos e de funções complexas. Dá uma fórmula para o recíproco da Função Gama como produto infinito e observa que é uma função inteira
1857	Riemann	Introduz a noção de conectividade para superfícies e regiões do plano
1859	Riemann	Introduz a Função Zeta de Riemann como função meromorfa no plano complexo relacionada com a distribuição dos números primos, identifica os seus zeros fora da faixa crítica $0\leq \mathcal{Re}\, z\leq 1$ e formula a Hipótese de Riemann de que os zeros na faixa crítica têm parte real ½
1861	Weierstrass	Desenvolve o prolongamento analítico de funções com base na noção de “elemento de função analítica”
1866	Weierstrass	Publica os primeiros resultados sobre “fronteiras naturais” de funções analíticas para além das quais não podem ser prolongadas, embora as tivesse identificado em 1842 e incluído nas suas aulas em 1863
1866	Duhamel	Define comprimento de curvas pelo limite de comprimentos de linhas poligonais nelas inscritas
1866	Jordan	Introduz a noção de homotopia de caminhos
1867	Goursat	Introduz um processo de construir funções holomorfas com “fronteiras naturais” (ver Weierstrass (1842, 1863, 1866))
1868	Casorati e Sohotsky	Estabelecem que os valores de uma função numa vizinhança de uma singularidade essencial são densos em $\mathbb{C}$
1869	Schwarz e Christoffel	Obtêm a Fórmula de Schwarz-Christoffel para uma transformação Conforme de um círculo aberto num polígono aberto
1869	Kronecker	Introduz a noção de número de rotação de um caminho em relação a um ponto
1869	Schwarz	Prova o Princípio de Reflexão e explora-o para prolongamento analítico
1870	Schwarz	Prova o Lema de Schwarz e que os automorfismos conformes num círculo são transformações de Möbius determinadas por três parâmetros reais
1870	Weierstrass	Mostra com exemplos que a existência de minimizantes no Princípio de Dirichlet não está assegurada no quadro clássico, o que só foi resolvido num quadro adequado em 1810, independentemente, por Courant, Hilbert e Weyl
1871		
1872	Schwarz	Prova a existência de solução para o Problema de Dirichlet num círculo
1873	Schwarz	Introduz a Função Modular
1876	Maxwell	Identifica a equivalência da estabilidade de um sistema linear com a localização dos zeros da sua função característica no semiplano complexo esquerdo
1876	Weierstrass	Publica o Teorema de Factorização de Weierstrass, descobrindo os divisores elementares independentemente de Sylvester (1851)
1877	Mittag-Leffler	Estabelece a expansão de funções meromorfas em fracções parciais
1879	Picard	Estabelece o Pequeno e o Grande teoremas de Picard, com base na Função Modular
1880	Poincaré	Considera as funções automorfas (invariantes sob um subgrupo discreto dos automorfismos de um círculo) e estuda-as no período 1880-84
1880	Weierstrass	Afirma que todas as regiões são domínios de holomorfia de alguma função, mas não o prova. Simplifica a prova de Mittag-Leffler de 1877 para a expansão de funções meromorfas em fracções parciais
1881		
1882	Poincaré	Estabelece o modelo da geometria hiperbólica ou de Lobatchevsky no círculo unitário do plano complexo
1883	Poincaré	Define ordem de função inteira. Inicia o estudo das funções complexas de várias variáveis
1884	Mittag-Leffler	Estende para funções holomorfas o Teorema de Factorização de Weierstrass que tinha sido estabelecido por Weierstrass em 1876 para funções inteiras. Estabelece o Teorema de Mittag-Leffler: dado um conjunto sem pontos limite num aberto existe uma função meromorfa nesse aberto cujos pólos são os elementos do conjunto dado e com partes principais nesses pólos especificadas como se queira
1885	Runge	Prova a propagação da convergência uniforme de sucessões de funções holomorfas em compactos da fronteira para toda uma região limitada, o que constituiu um primeiro passo na direcção do Teorema de Vitali, estabelecido em 1903. Prova o teorema de existência para domínios de holomorfia previsto por Weierstrass em 1880. Estabelece o Teorema de Runge de aproximação de funções holomorfas por funções racionais
1887	Harnack	Estabelece que os limites de sucessões de funções harmónicas uniformemente convergentes são funções harmónicas e que sucessões crescentes de funções harmónicas são uniformemente convergentes em conjuntos compactos ou convergem para $+\infty$ em todos os pontos
1888	Poincaré e Volterra	Estabelecem que o conjunto de elementos de uma função analítica global centrados num ponto é numerável (Teorema de Poincaré-Volterra)
1889	Pringsheim	Apresenta a teoria geral da convergência de produtos infinitos de números complexos
1889	Morera	Prova o recíproco do Teorema de Cauchy
1889	Hurwitz	Prova o Teorema de Hurwitz, estabelecendo que a não existência de zeros dos termos de sucessões uniformemente convergentes em subconjuntos compactos de um conjunto aberto passa para o limite quando este não é a função zero
1890	Schwarz	Prova o Teorema da Transformação de Riemann para regiões com fronteiras formadas por um número finito de curvas analíticas e sem cúspidas, pelo método alternativo da Teoria do Potencial, baseado no integral de Poisson e no Princípio de Reflexão
1891		
1892	Hadamard	Prova a fórmula para o raio de convergência de séries de potências enunciada por A.L. Cauchy em 1821
1893	Hadamard	Estabelece o Teorema de Factorização de Hadamard parafunções inteiras de ordem finita
1894	Stieltjes	Prova a propagação da convergência uniforme de sucessões de funções holomorfas em compactos de uma subregião para toda a região, o que constituiu um segundo passo, depois do dado por Runge em 1885, na direcção do Teorema de Vitali, estabelecido em 1903
1894	Weierstrass	Publica os seus “Cadernos de Munique” de 1841 com os resultados acima mencionados nessa data
1895	Poincaré	Introduz as noções de cadeia, ciclo e homologia
1896	Hadamard	Usa o Teorema de Factorização de Hadamard (1892) para provar o Teorema dos Números Primos relativo à distribuição assimptótica destes números (no mesmo ano de La Valée Poussin deu uma outra prova para este resultado)
1896	Borel	Prova o Pequeno Teorema de Picard com uma propriedade elementar de funções inteiras: $0\leq\ e^{f}+e^{g}=1$ implica f e g são constantes
1897	Borel	Dá uma nova expressão para a ordem de função inteira, introduzida por Poincaré em 1883
1897	Hilbert	Prova o caso particular do teorema de Runge (1885) de aproximação de funções holomorfas em compactos por funções polinomiais
1899	Jensen	Estabelece a Fórmula de Jensen que relaciona a média do logaritmo do módulo de uma função holomorfa sobre uma circunferência com o módulo da função no centro e os módulos dos zeros da função no círculo limitado pela circunferência
1900	Goursat	Prova o Teorema de Cauchy para funções diferenciáveis sem exigir continuidade das derivadas

Século XX (1ª metade)

1901	Osgood	Prova a propagação da convergência pontual de sucessões de funções holomorfas num subconjunto denso a toda uma região, o que constituiu um terceiro passo, depois dos de Runge em 1885 e Stieltjes em 1894, na direcção do Teorema de Vitali, estabelecido em 1903
1902	Lebesgue	Estende de forma geral o conceito de integral de funções na sua tese de doutoramento intitulada *Intégrale, Longeur, Aire*
1903	Vitali	Prova, para sucessões de funções holomorfas e localmente limitadas numa região, a propagação da convergência pontual num subconjunto com pontos limite na região (e da convergência da sucessão e das sucessões das suas derivadas de todas as ordens num ponto fixado na região) a convergência uniforme em subconjuntos compactos da região
1904	Hurwitz	Prova um primeiro resultado particular do tipo do Teorema de Bloch que foi depois estabelecido por Bloch em 1924
1904	Schottky	Estabelece o Teorema de Schottky
1906	Joukovski	Introduz a transformação conforme de Joukovski e usa-a para calcular a força de sustentação de uma asa de avião, constituindo o primeiro método de cálculo da aerodinâmica de asas de aviões
1907	Montel	Estende para funções holomorfas as ideias de Ascoli (1883) e Arzelà (1885) para funções reais relativas a compacidade em espaços de funções contínuas com a convergência uniforme em conjuntos compactos
1908	Phragmén Lindelöf	Provam o Princípio de Phragmén-Lindelöf
1910	Hilbert, Weyl, Courant	Estabelecem, independentemente, a validade do Princípio de Dirichlet com metodologias fundamentais para o desenvolvimento da Análise Funcional e do Cálculo de Variações que formaram a base dos Métodos Variacionais em Equações Diferenciais
1911	Carathéodory, E. Landau	Provam que a hipótese da sucessão ser localmente limitada no Teorema de Vitali pode ser substituída pela de existirem dois números complexos omitidos por todos os termos da sucessão
1912	Osgood	Dá uma prova do teorema de existência para domínios de holomorfia, com base no Teorema de Factorização de Weierstrass, alternativa à obtida por Runge em 1885
1912	Montel	Introduz o termo "família normal"
1912 1913	Carathéodory	Prova o Teorema da Transformação de Riemann (1912) e a possibilidade de extensão homeomorfa da transformação à fronteira quando esta é uma curva seccionalmente regular (1913)
1913	Weyl	Torna rigorosa a noção de Superfície de Riemann com base no conceito de variedade complexa
1915	Koebe	Dá uma prova construtiva do Teorema da Transformação de Riemann
1915	Blaschke	Prova o Teorema de Blaschke: se uma sucessão limitada de funções holomorfas no círculo unitário aberto converge num conjunto numerável de pontos $\{a_n\}$ tal que a série $\sum(1-\lvert a_n\rvert)$ diverge, então a sucessão converge uniformemente em subconjuntos compactos do círculo
1921		
1922	Féjer F. Riesz	Mostram que no Teorema da Transformação de Riemann, a transformação pode ser obtida por solução de um problema variacional de maximização da derivada num ponto, simplificando as provas de Carathéodory (1912) e Koebe (1915)
1923	Perron	Prova a existência de solução do Problema de Dirichlet em conjuntos limitados cujo complementar não contém pontos isolados
1924	Bloch	Prova o Teorema de Bloch
1925	Nevanlinna	Refina os teoremas de Picard com uma teoria da distribuição dos valores de funções meromorfas (Teoria de Nevanlinna)
1926	E. Landau	Simplifica a prova do Teorema de Bloch obtida por Bloch em 1924
1929	E. Landau	Introduz a "Constante de Bloch" e a" Constante de Landau". Dá uma prova simplificada dos teoremas de Picard com base nos teoremas de Bloch (1924) e Shottky (1904)
1929	Carathéodory Ostrowski	Simplificam, independentemente, a prova do Teorema da Transformação de Riemann baseada na contribuição de Féjer e F. Riesz (1922), evitando a consideração de derivadas
1931		
1932	Pringsheim	Publica uma prova de existência para regiões de holomorfia com base em séries de Goursat e credita-a a Hartogs
1936	Nevanlinna	Introduz a noção de medida harmónica
1937	Ahlfors Grunsky	Obtêm estimativas para a Constante de Bloch com desvio < 1% e conjecturam o valor da constante (ainda não provado)
1938	Besse	Simplifica a prova de existência para regiões de holomorfia obtida por Pringsheim em 1932, com base na noção de conjunto bem distribuído de pontos fronteiros visíveis da região
1939	Wielandt	Prova o teorema de unicidade para a equação funcional da Função Gama
1940	Kneser	Prova construtivamente pela primeira vez o Teorema Fundamental da Álgebra, depois de tentativas de vários matemáticos, entre os quais K. Weierstrass
1941		
1943	Rademacher	Obtém estimativas para a Constante de Landau com desvio < 10% e conjectura o valor da constante (ainda não provado)
1950		

Século XX (2^a metade)

1951	Artin	Estabelece o Teorema de Cauchy Global em termos da noção de homologia de ciclos
1951	Margelyan	Prova que no Teorema de Runge de aproximação polinomial de funções holomorfas a hipótese da função ser holomorfa num compacto pode ser enfraquecida para contínua num compacto e holomorfa no seu interior
1961		
1971	Dixon	Publica uma prova simplificada do Teorema e da Fórmula de Cauchy Globais
1971	Eastermann	Dá uma prova mais simples do Teorema de Bloch, provado por Bloch (1924) e Landau (1926). Dá uma prova do Grande Teorema de Picard que usa o Teorema de Bloch, mas não o de Shottky
1976	Glicksberg	Estende o Teorema de Rouché para a hipótese $\|f-g\|<\|f\|+\|g\|$
1976	Grabiner	Dá uma prova simplificada do Teorema de Runge
1981	M. Kneser	Simplifica a prova construtiva do Teorema Fundamental da Álgebra obtida pelo seu pai H. Kneser em 1940
1990	Bonk	Simplifica a prova de Ahlfors e Grunsky (1937) para obter estimativas da Constante de Bloch
1991		
1992	Eremenko Sodin	Provam o Pequeno Teorema de Picard com base em propriedades elementares de funções harmónicas (teorema de unicidade, escalamentos e desigualdade de Harnack)
1994	Lewis	Simplifica a prova de Eremenko e Sodin (1992) para o Pequeno Teorema de Picard, baseada em funções harmónicas
2000		