Capítulo 6

Equivalência entre holomorfia, analiticidade e teorema de Cauchy

6.1. Introdução

O resultado central deste capítulo é a equivalência entre holomorfia, analiticidade e validade do Teorema de Cauchy. Trata-se da importante unificação dos conceitos estabelecidos separadamente nos três últimos capítulos, com base em derivadas, séries de potências e integrais, respectivamente. É uma ilustração muito elegante e útil das particularidades das funções complexas.

A possibilidade de representação de funções complexas continuamente diferenciáveis no interior de círculos contidos no domínio de holomorfia por séries de potências[1] foi comunicada por Cauchy à Academia das Ciências de Turim em 1831. Cauchy não justificou a integração termo a termo de uma série usada na demonstração, o que levou P. Tchébychev[2] a assinalar em 1844 que tal só era possível em casos particulares, dificuldade que foi mais tarde ultrapassada com base no conceito de convergência uniforme, como se observou no capítulo anterior.

Em 1889, J. Morera[3] provou um recíproco do Teorema de Cauchy que estabelece que as funções complexas com integrais nulos sobre as fronteiras de triângulos fechados contidos no conjunto de continuidade da função integranda são holomorfas no interior desse conjunto.

---

[1] Esta simples situação no plano complexo permitiu clarificar de forma geral aspectos de convergência e divergência de séries de potências que na recta real não eram facilmente perceptíveis. Por exemplo, a função real $x \mapsto 1/(1+x^2)$ é indefinidamente diferenciável em toda a recta real e a sua série de Taylor centrada na origem $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ converge apenas para $|x|<1$ não havendo perca de diferenciabilidade da função nos pontos ± 1, enquanto a função complexa definida pela mesma expressão não está definida e tende para ∞ nos pontos $\pm i$, o que, de facto, implica que o raio de convergência da série é 1.

[2] Pafnuti Tchébychev (1821-1894).

[3] Jacinto Morera (1856-1909).

Com a contribuição de E. Goursat em 1900, que permitiu provar o Teorema de Cauchy para funções holomorfas sem a hipótese das derivadas destas funções serem contínuas, tornou-se possível estabelecer para funções complexas a equivalência dos conceitos de holomorfia e analiticidade, e destes com a existência de primitivas locais.

Neste capítulo também se prova o Teorema Fundamental da Álgebra (todo o polinómio complexo de grau maior ou igual a 1 tem pelo menos um zero e todos os zeros destes polinómios são números complexos). Este teorema tem uma longa história. Foi previsto por A. Girard[4] numa publicação que apareceu em 1629, mas resistiu a numerosas tentativas de demonstração durante quase dois séculos. As primeiras tentativas consideraram polinómios de coeficientes reais. J.R. d'Alembert apresentou uma tentativa de prova em 1746, L. Euler em 1749 e P.S. Laplace[5] em 1795. C.F. Gauss indicou em 1799, na sua tese de doutoramento, falhas nas tentativas dos matemáticos referidos e propôs uma prova que também se revelou incompleta. Em 1814 J.R. Argand publicou uma tentativa de prova baseada na ideia de d'Alembert, mas que também não resolveu a questão. Finalmente, em 1816 Gauss publicou uma prova correcta seguindo a ideia de Euler, e no mesmo ano apresentou uma outra prova. Em 1849, Gauss publicou mais uma prova, com base na ideia explorada na sua primeira tentativa, agora para polinómios com coeficientes complexos. As provas referidas eram demonstrações de existência não construtivas, isto é, não se baseavam num método que pudesse ser aplicado para obter aproximações dos zeros das funções. Por esta razão, K. Weierstrass tentou, sem sucesso, obter uma demonstração construtiva do teorema. A primeira prova deste tipo só foi obtida em 1940 por H. Kneser[6]. Em 1981, o seu filho M. Kneser[7] apresentou uma versão simplificada desta prova.

O capítulo tem uma secção dedicada ao teorema da função inversa (toda a função holomorfa num conjunto aberto tem inversa local holomorfa numa vizinhança de cada ponto onde a sua derivada é diferente de zero e, nessa vizinhança, transforma conjuntos abertos em conjuntos abertos), à caracterização da estrutura local das funções holomorfas em regiões (são constantes ou adições de potências inteiras de funções invertíveis holomorfas com constantes) e ao teorema da aplicação aberta (as imagens de regiões por funções holomorfas não constantes são regiões).

Demonstra-se, também, um resultado de Weierstrass obtido nos seus "cadernos de Munique" de 1841, que só foram publicados em 1894, estabelecendo que as sucessões e séries de funções analíticas uniformemente convergentes em conjuntos compactos são analíticas e podem ser indefinidamente derivadas termo a termo. Em particular, o processo de extensão de funções polinomiais a funções analíticas pela consideração de séries uniformemente convergentes não conduz a novas funções quando é aplicado a funções analíticas.

---

4 Albert Girard (1595-1632).
5 Pierre Simon Laplace (1749-1827).
6 Hellmuth Kneser (1898-1973).
7 Martin Kneser (1928-).

6.2. Equivalência de holomorfia, analiticidade e teorema de Cauchy local

O resultado seguinte estabelece para funções complexas que holomorfia e analiticidade são equivalentes, e dá uma Fórmula de Cauchy local para as derivadas de qualquer ordem de funções holomorfas.

(6.1) **Teorema:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto. Então* $f \in H(\Omega)$ *se e só se* f *é analítica em* Ω.

Em caso afirmativo, se $B_R(z) \subset \Omega$ *e* γ *é um caminho fechado seccionalmente regular em* $B_R(z) \setminus \{z\}$, f *e as suas derivadas satisfazem*

$$f^{(k)}(z)\,.\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw\,, \text{ para } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dem. Do teorema (5.6) sabe-se que se f analítica em Ω, então $f \in H(\Omega)$. Resta provar a recíproca.

Supõe-se $f \in H(\Omega)$ e $B_R(a) \subset \Omega$. Seja γ um caminho fechado seccionalmente regular em $B_R(a) \setminus \{a\}$. Da Fórmula de Cauchy em conjuntos convexos (teorema (4.12)) obtém-se

$$f(z)\,.\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \ , \text{ para } z \in B_R(a) \setminus \gamma^*.$$

Resulta da proposição (5.5) que $f\,.\mathrm{Ind}_\gamma$ é analítica em $B_R(a) \setminus \gamma^*$ e tem em cada círculo aberto $B_r(a) \subset \Omega \setminus \gamma^*$ a representação em série de potências

$$f(z)\,.\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n \,.$$

A unicidade dos coeficientes das séries de potências centradas num ponto que representam uma mesma função (fórmula (5.9) do teorema (5.6)) garante que é obtida a mesma série de potências qualquer que seja γ com as propriedades indicadas. Portanto, a representação em série de potências centrada em a que foi obtida é válida para todo $z \in B_R(a)$. Resulta que f é analítica em Ω.

A fórmula para as derivadas de f resulta das fórmulas no teorema (5.6). *Q.E.D.*

É de notar que o teorema anterior implica, para uma função $f \in H(\Omega)$, que o raio de convergência da série de Taylor centrada no ponto $a \in \Omega$ é a distância de a à fronteira de Ω, isto é, a única obstrução à convergência da série de Taylor de uma função diferenciável complexa para o correspondente valor de f a partir de uma certa distância do ponto a é a função não estar definida ou não ser holomorfa num ponto a essa distância de a. Esta situação contrasta com o que se verifica para funções reais diferenciáveis e permite explicar a limitação de raios de convergência de séries de Taylor de funções diferenciáveis reais pela ocorrência de pontos no plano complexo fora do eixo real onde as extensões complexas das funções reais consideradas não são diferenciáveis, como por exemplo no caso da função real $x \mapsto 1/(1+x^2)$ referido na introdução ao presente capítulo. O teorema anterior também garante que as derivadas de ordem arbitrariamente elevada de funções holomorfas num conjunto existem e são holomorfas nesse conjunto.

(6.2) **Corolário:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto e* $f \in H(\Omega)$. *Então* f *é indefinidamente diferenciável em* Ω e $f^{(k)} \in H(\Omega)$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Em particular,* f *é* C^∞.

Dem. É uma consequência imediata do teorema anterior, o qual garante que nas condições assumidas a função $f^{(k)}$ tem derivada em Ω, e do facto já conhecido da existência de derivada de uma função implicar a continuidade dessa função. *Q.E.D.*

Com base neste resultado pode-se demonstrar que o Teorema de Cauchy admite o seguinte recíproco.

(6.3) **Teorema de Morera:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que* $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ *para todo o triângulo fechado* $\Delta \subset \Omega$. *Então* $f \in H(\Omega)$.

Dem. Se $C \subset \Omega$ é um círculo aberto pode-se definir como na demonstração da existência de primitivas de funções holomorfas em conjuntos convexos (teorema (4.7)) uma função $F \in H(C)$ tal que $F' = f$. O resultado anterior implica $f \in H(\Omega)$. *Q.E.D.*

Com o corolário (6.2) também se pode provar que a razão incremental de uma função holomorfa f num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ entre dois pontos $w, z \in \Omega$, como função destas duas variáveis, pode ser estendida com os valores da derivada de f a uma função contínua em $\Omega \times \Omega$ que é holomorfa em Ω quando considerada como função de uma das variáveis com a outra fixa, o que é útil em várias situações.

(6.4) **Proposição:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto,* $f \in H(\Omega)$ *e* $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$g(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{, se } w \neq z \\ f'(z) & \text{, se } w = z\,. \end{cases}$$

Então, g *é contínua em* $\Omega \times \Omega$ *e as funções* $z \mapsto g(w,z)$ *com* $w \in \Omega$ *fixo, e* $w \mapsto g(w,z)$ *com* $z \in \Omega$ *fixo, são holomorfas em* Ω.

Dem. A continuidade de g em pontos de $(\Omega\times\Omega)\setminus\{(a,a): a\in\Omega\}$ é consequência imediata da continuidade de funções holomorfas, estabelecida no teorema (3.6), e da continuidade de diferenças e quocientes de funções holomorfas em pontos onde o denominador não se anula. A diferenciabilidade de f num ponto $a\in\Omega$ assegura a continuidade das funções de uma das variáveis, com a outra fixa, em pontos $(w,z)=(a,a)$, mas ainda é preciso provar a continuidade de g como função de duas variáveis nos pontos $(a,a)\in\Omega\times\Omega$. Para $(w,z)\in\Omega\times\Omega$ considera-se o caminho regular que une os dois pontos por um segmento de recta, $\xi_{w,z}(t)=t\,w+(1-t)\,z$, e $(u,v)=f$. Então

$$g(w,z)-g(a,a)=\frac{\int_0^1 (f\circ\xi)'}{w-z}-f'(a)=\frac{\int_0^1 f'(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt}{w-z}-f'(a)$$
$$=\frac{\int_0^1 f'(\xi(t))(w-z)\,dt}{w-z}-f'(a)=\int_0^1 (f'(\xi(t))-f'(a))\,dt.$$

O corolário anterior assegura que f' é contínua em Ω. Portanto, qualquer que seja $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $z,w\in B_\delta(a)$ implica $|f'(\xi(t))-f'(a)|<\varepsilon$, pois nestas condições $\xi(t)\in B_\delta(a)$ para todo $t\in[0,1]$. Em consequência $|g(w,z)-g(a,a)|$ $\le\int_0^1 |f'(\xi(t)-f'(a)|\,dt<\int_0^1\varepsilon=\varepsilon$, o que permite concluir que g é continua em (a,a).

Resta provar a diferenciabilidade das funções de uma variável, com a outra fixa, consideradas. Para cada $w\in\Omega$, a função definida em Ω por $z\mapsto g(w,z)$ é diferenciável em todos os pontos $z\neq w$, dado que somas, produtos e quocientes de funções diferenciáveis são diferenciáveis em pontos onde denominadores de quocientes não se anulam. Do teorema (6.1) sabe-se que as funções holomorfas são analíticas e do teorema (5.6) que o desenvolvimento de uma função analítica em série de potências centrada num ponto é a série de Taylor da função nesse ponto. Como $f\in H(\Omega)$, obtém-se, para todo $w\in\Omega$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(w,w+h)-g(w,w)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(w+h)-f(w)]/h-f'(w)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(w)}{k!}\,h^k-f(w)-f'(w)\,h\right]=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j+2)}(w)}{(j+2)!}\,h^j=\frac{f''(w)}{2},$$

pelo que $z\mapsto g(w,z)$ também é diferenciável em $z=w$. Portanto, para cada $w\in\Omega$, a função $z\mapsto g(w,z)$ é holomorfa em Ω. Trocando os papeis de w e z, prova-se que $w\mapsto g(w,z)$ é holomorfa em Ω. *Q.E.D.*

O teorema seguinte unifica, num conjunto aberto $\Omega\subset\mathbb{C}$, os conceitos de holomorfia, analiticidade, validade do Teorema de Cauchy na fronteira de triângulos fechados contidos em Ω e existência de primitivas locais em (conjuntos convexos de) Ω.

(6.5) **Teorema de Unificação:** *Se* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é um conjunto aberto e* $f:\Omega \to \mathbb{C}$, *então as propriedades seguintes são equivalentes:*

1) f *é holomorfa em* Ω.

2) f *é analítica em* Ω.

3) f *é contínua em* Ω *e* $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$, *para todo o triângulo fechado* $\Delta \subset \Omega$.

4) f *tem primitiva em todos os subconjuntos abertos convexos de* Ω.

Dem. A equivalência de 1) e 2) foi provada no teorema (6.1), a de 1) e 3) resulta do teorema (4.7), do Teorema de Morera (6.3) e da continuidade das funções holomorfas (teorema (3.6)), a de 1) e 4) resulta do teorema (4.7), da continuidade das funções holomorfas e do corolário (6.2) aplicados a F tal que $F' = f$. *Q.E.D.*

De um ponto de vista histórico, é interessante observar que Cauchy se baseou principalmente na caracterização 3), Weierstrass na 2) e Riemann na 1).

6.3. Teorema Fundamental da Álgebra

Com base na analiticidade das funções holomorfas, no Princípio do Módulo Máximo e no conceito de ordem de um zero de uma função analítica pode-se estabelecer o Teorema Fundamental da Álgebra que assegura que os zeros de polinómios complexos são números complexos e são tantos, contando multiplicidades, quanto a ordem do polinómio. Este resultado assume um interesse especial se recordarmos que os números complexos foram pela primeira vez considerados para obter zeros de polinómios reais que não tinham zeros reais.

(6.6) **Teorema Fundamental da Álgebra:** *Se* P *é um polinómio complexo de grau* $n \in \mathbb{N}$, *então* P *tem exactamente* n *zeros em* $\mathbb{C}$, *contando multiplicidades de zeros de acordo com as suas ordens como zeros de* P. *Mais especificamente, se* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, *com* $a_n \neq 0$, *então existe um número finito* $k \in \mathbb{N}$ *de zeros distintos de* P *em* $\mathbb{C}$, $z_1, \ldots, z_k$, *de ordens* $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, *respectivamente, tais que* $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ *e* $P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_k)^{m_k}$.

Dem. Escreve-se o polinómio P na forma $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, onde $a_n \neq 0$, visto que se supõe que P é um polinómio de grau n. Como $P(z) = z^n (a_n + a_{n-1}/z + \ldots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n)$, verifica-se $|P(r e^{i\theta})| \to +\infty$ quando $r \to +\infty$. Portanto, para $r > 0$ suficientemente grande é $|P(r e^{i\theta})| > |P(0)|$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Se P não tivesse zeros, então $f = (1/P) \in H(\mathbb{C})$ e portanto f seria analítica em $\mathbb{C}$, com $|f(0)| > |f(r e^{i\theta})|$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, o que contradiz o Princípio do Módulo

Máximo[8] (5.15). Conclui-se que existe pelo menos um zero z_1 de P. Se m_1 designa a ordem do zero z_1 de P, tal como definida na demonstração do teorema (5.10), verifica-se $P(z)=(z-z_1)^{m_1}P_1(z)$, onde $P_1(z)$ é um polinómio de ordem $n-m_1$. Se $n-m_1>0$, aplica-se a P_1 o argumento anterior, e assim sucessivamente, obtendo-se zeros z_j de ordens m_j de polinómios $P_j(z)$ de graus $n-(m_1+\ldots+m_j)$, para $j=1,2,\ldots,k-1$, até que $n-(m_1+\ldots+m_k)=0$, e $P(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k}P_k(z)$, onde $P_k(z)$ é um polinómio de grau zero, e portanto, é uma constante. É fácil ver que tem de ser $P_k(z)=a_n$. *Q.E.D.*

É útil verificar o que acontece com os zeros de polinómios com coeficientes reais.

(6.7) **Corolário:** *Se P é um polinómio complexo de grau $n\in\mathbb{N}$, com coeficientes reais, então P tem exactamente n zeros em $\mathbb{C}$, contando multiplicidades de zeros de acordo com as suas ordens como zeros de P, e os zeros que não são números reais ocorrem necessariamente em pares conjugados de zeros de ordens iguais .*

Dem. Se $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$ tem coeficientes reais, então $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$, pelo que se w é um zero de P também $\overline{w}$ é um zero de P. Estes dois zeros são distintos se e só se w não é um número real. Neste caso, as ordens dos dois zeros conjugados de P são iguais, pois $P(z)=(z-w)^m g(z)$, com $g(w)\neq 0$, implica $P(z)=\overline{P(\bar{z})}=(z-\overline{w})^m\,\overline{g(\bar{z})}$, com $\overline{g(\overline{w})}\neq 0$. *Q.E.D.*

6.4. Estrutura local de funções holomorfas e teorema da aplicação aberta

Os contradomínios de funções holomorfas numa região só podem ser uma região ou um ponto. Nesta secção prova-se este facto, bem como outros aspectos relacionados, incluindo o seguinte Teorema da Função Inversa que estabelece a existência de inversa local holomorfa de uma função holomorfa com derivada diferente de zero num ponto.

(6.8) **Teorema da Função Inversa:** *Seja $\Omega\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto, $\varphi\in H(\Omega)$, $a\in\Omega$ e $\varphi'(z_0)\neq 0$. Então existe uma vizinhança $V\subset\Omega$ de z_0 tal que:*

1) φ é injectiva em V e φ' não tem zeros em V,

2) $W=\varphi(V)$ é um conjunto aberto,

3) A inversa de φ em V, $\varphi^{-1}:W\to V$, é holomorfa e $(\varphi^{-1})'=1/(\varphi'\circ\varphi^{-1})$ em W.

---

[8] Em alternativa, pode-se substituir o Princípio do Módulo Máximo pela Propriedade de Valor Médio. Uma outra alternativa é usar o Teorema de Liouville, dado que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z)=0$ implica que f é limitada e, portanto, constante igual a zero em $\mathbb{C}$, o que só seria possível se P tivesse grau zero.

Dem. Se $(u,v)=\varphi$, $(x,y)=z$, a função em $\mathbb{R}^2$ tal que $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ é C^1 e, das Condições de Cauchy-Riemann o seu jacobiano é $J(u,v)=(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y)-(\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)$ $=(\partial u/\partial x)^2+(\partial v/\partial x)^2=|\varphi'|^2$. Logo, o Teorema da Função Inversa para funções em $\mathbb{R}^2$ implica a existência de uma vizinhança V de $(x_0,y_0)=z_0$ onde a função é injectiva, $J(u,v)\neq 0$, $W=(u,v)(V)$ é aberto e a inversa $(u,v)^{-1}:W\to V$ é diferenciável, pelo que a função complexa dada φ tem as propriedades indicadas no enunciado, faltando apenas verificar a fórmula para a derivada em 3). Esta resulta de derivar a equação $\varphi\circ\varphi^{-1}(z)=z$, o que dá $(\varphi'\circ\varphi^{-1})(\varphi^{-1})'=1$ e, portanto, a fórmula no enunciado. *Q.E.D.*

Com base no teorema anterior, na propriedade dos zeros de funções holomorfas não identicamente nulas serem isolados, no conceito de ordem de zeros destas funções e na existência de primitiva local de funções holomorfas pode-se estabelecer a caracterização seguinte das funções holomorfas em regiões. Esta caracterização mostra que a estrutura local das funções holomorfas não constantes numa região é relativamente simples: a menos da adição de constantes são potências inteiras de funções invertíveis holomorfas.

(6.9) **Teorema (estrutura local das funções holomorfas em regiões):** *Seja $\Omega\subset\mathbb{C}$ uma região e $f:\Omega\to\mathbb{C}$ uma função não constante em Ω. Então a função f é holomorfa em Ω se e só se cada ponto $z_0\in\Omega$ tem uma vizinhança $V\subset\Omega$ tal que*

$$f(z)=w_0+(\varphi(z))^m,\ \textit{para todo}\ z\in V,$$

onde $w_0=f(z_0)$, m é a ordem do zero z_0 da função $f-w_0$, φ é uma bijecção holomorfa de V sobre um círculo aberto $B_r(0)$ tal que $\varphi(z_0)=0$ e φ' não tem zeros em V (Figura 6.1).

Dem. É claro, da holomorfia de funções obtidas por somas e composições de funções holomorfas, que uma função f da forma indicada em vizinhanças de todos os pontos de Ω é holomorfa neste conjunto.

Suponhamos agora que $f\in H(\Omega)$ e seja $\rho>0$ tal que $\overline{B_\rho(z_0)}\subset\Omega$. Do teorema (5.10) sabe-se que os zeros de funções holomorfas são isolados e, como $\overline{B_\rho(z_0)}$ é compacto, os zeros de $f-w_0$ neste conjunto são em número finito, pelo que existe $0<\rho'<\rho$ tal que z_0 é o único zero de $f-w_0$ em $\Omega'=B_{\rho'}(z_0)$ e

(6.10) $$f(z)-w_0=(z-z_0)^m g(z),\ \text{para}\ z\in\Omega',$$

onde $g\in H(\Omega')$ e g não tem zeros em Ω'. Portanto, $g'/g\in H(\Omega')$ e, como Ω' é um conjunto aberto convexo, sabe-se do teorema (4.7) que g'/g tem uma primitiva $h\in H(\Omega')$ em Ω'. Verifica-se

$$\left(g\,e^{-h}\right)'=g'e^{-h}-g\,e^{-h}h'=e^{-h}\left(g'-g\frac{g'}{g}\right)=0,\ \text{em}\ \Omega'.$$

Portanto, existe uma constante $c\in\mathbb{C}$ tal que $g=c\,e^h$. Sem perda de generalidade, supõe-se $c=1$ e $g=e^h$, visto que, para tal, basta considerar uma outra primitiva de g'/g

obtida adicionando uma constante apropriada a h. Define-se $\varphi(z)=(z-z_0)e^{h(z)/m}$, para $z\in\Omega'$. Elevando ambos os membros desta equação a m e substituindo em (6.10) obtém-se a fórmula no enunciado. A mesma equação garante que $\varphi\in H(\Omega')$, pois dá uma fórmula para esta função em termos de produtos e composições de funções holomorfas. Obtém-se directamente $\varphi(z_0)=0$ e $\varphi'(z_0)\neq 0$. A existência de uma vizinhança V' de z_0 tal que φ' não tem zeros em V' e φ é uma bijecção de V' sobre o conjunto aberto $W'=\varphi(V')$ resulta do Teorema da Função Inversa (6.8). Como o conjunto W' é aberto e contém $\varphi(z_0)=0$, existe um círculo aberto $B_r(0)\subset W'$. Dado que φ é contínua em V' as suas imagens inversas de conjuntos abertos são conjuntos abertos, pelo que tomando $V=f^{-1}[B_r(0)]$ conclui-se a demonstração do teorema. *Q.E.D.*

Como a potência de expoente $m\in\mathbb{N}$ é uma função m-para-1 de qualquer círculo aberto de centro na origem mas sem a origem, $B_\rho(0)\setminus\{0\}$, sobre $B_{\rho^m}(0)\setminus\{0\}$, o teorema anterior garante que uma função f holomorfa e não constante numa região é, numa vizinhança V de cada ponto z_0 da região, uma função m-para-1 de $V\setminus\{z_0\}$ para $B_{r^m}(w_0)\setminus\{0\}$, onde w_0, m, r são como no enunciado do teorema (Figura 6.1). Quando $m>1$, diz-se que z_0 é um ponto de ramificação de ordem m.

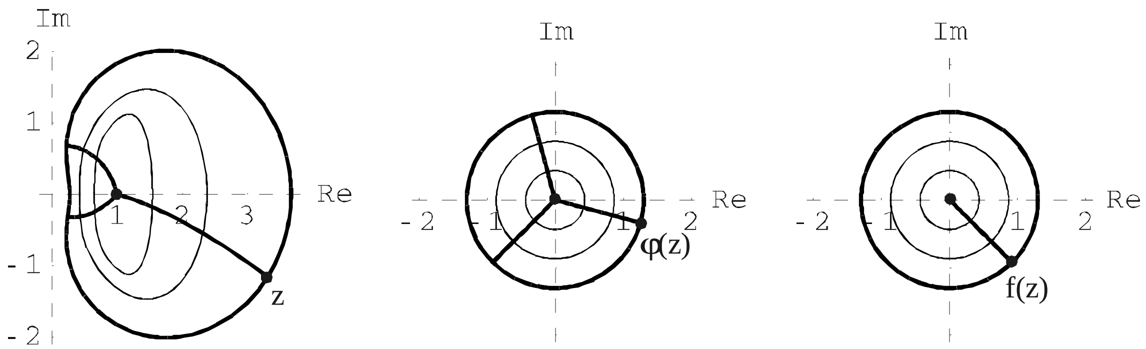

Figura 6.1: Vizinhança de um ponto de ramificação de ordem $m=3$
(exemplo com $z_0=1, w_0=0, \varphi(z_0)=0$, $\varphi(z)=\ln z$, $f(z)=(\ln z)^3$)

É útil explicitar a consequência seguinte dos teoremas anteriores que, juntamente com o Teorema da Função Inversa (6.8), implica que, para funções holomorfas, a não anulação da derivada é necessária e suficiente para a injectividade local, em contraste com o que se verifica para funções reais diferenciáveis.

(6.11) **Teorema:** *Se $\Omega\subset\mathbb{C}$ aberto e $f\in H(\Omega)$ é injectiva em Ω, então $f'\neq 0$ em Ω e $f^{-1}\in H(\Omega)$.*

Dem. Seja $z_0\in\Omega$ arbitrário. Se f é injectiva em Ω, então não é constante em qualquer vizinhança de z_0, pelo que a fórmula no enunciado do teorema (6.9) dá a sua estrutura local. Logo f só é injectiva se a ordem da potência m nessa fórmula é 1, o que implica $f'(z_0)\neq 0$. Como $z_0\in\Omega$ é arbitrário, concluiu-se que $f'\neq 0$ em Ω. Aplicando o Teorema da Função Inversa (6.8) obtém-se que a inversa de f é holomorfa numa vizinhança de cada ponto de Ω, pelo que é holomorfa em Ω. *Q.E.D.*

Uma outra consequência imediata dos teoremas anteriores é o Teorema da Aplicação Aberta anunciado no início desta secção.

(6.12) **Teorema da Aplicação Aberta:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *e* $f \in H(\Omega)$ *não constante*[9] *em* Ω. *Se* Ω *é aberto, então* $f(\Omega)$ *é aberto. Se* Ω *é uma região, então* $f(\Omega)$ *é uma região.*

Dem. Do teorema (6.9), para cada ponto $z_0 \in \Omega$ existe um círculo aberto $B_r(f(z_0)) \subset f(\Omega)$, pelo que $f(\Omega)$ é um conjunto aberto. Como f é contínua em Ω, se Ω é conexo também $f(\Omega)$ é conexo. Na verdade, se A, B são conjuntos abertos disjuntos tais que $f(\Omega) = A \cup B$, então $\Omega = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, onde as imagens inversas $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ são conjuntos disjuntos que são abertos porque as imagens inversas de conjuntos abertos por funções contínuas são conjuntos abertos. Como Ω é conexo, uma destas imagens inversas tem de ser Ω, pelo que também um dos conjuntos A, B tem de ser Ω, o que implica que $f(\Omega)$ é conexo. *Q.E.D.*

O teorema anterior garante que as funções holomorfas não constantes transformam conjuntos abertos em conjuntos abertos, de tal forma que cada componente conexa do conjunto aberto de partida é transformada numa componente conexa aberta do conjunto de chegada. Além disso, uma consequência imediata dos dois últimos resultados é que uma função holomorfa e injectiva num conjunto aberto é um homeomorfismo (i.e., uma bijecção contínua com inversa contínua) deste conjunto na sua imagem.

É interessante observar que pode ser obtida uma demonstração alternativa do Princípio do Módulo Máximo para funções analíticas (5.15) a partir do Teorema da Aplicação Aberta (6.12). Na verdade, se f é uma função holomorfa não constante num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $a \in \Omega$, resulta deste teorema que $f(\Omega)$ é um conjunto aberto que contém $f(a)$ e, portanto, existe $r > 0$ tal que $B_r(f(a)) \subset f(\Omega)$. É claro que $B_r(f(a))$ contém pontos com valores absolutos superiores a $|f(a)|$, pelo que $|f|$ não pode ter máximos locais em Ω a não ser que seja constante neste conjunto. Esta demonstração mostra que o Princípio do Módulo Máximo para funções analíticas é uma consequência de propriedades topológicas das transformações definidas por funções analíticas.

Um outro aspecto da estrutura local de funções holomorfas é o da contagem do número de zeros ou do número de pontos onde é assumido um qualquer valor w_0 (contando multiplicidades) num círculo centrado num ponto. O resultado seguinte dá uma fórmula para contar estes pontos pela integração de uma função apropriada sobre um caminho que percorre a circunferência que delimita o círculo.

Antes de enunciar e demonstrar este resultado convém entender a razão pela qual se espera que uma fórmula deste tipo funcione. Os pontos onde uma função f assume um valor w_0 são os zeros da função $f - w_0$, pelo que o problema é sempre um de

[9] Quando f é constante em Ω, $f(\Omega)$ é um ponto.

contagem de zeros. Neste caso, o resultado seguinte estabelece que o número de zeros de uma função f holomorfa num círculo fechado de centro num ponto a cuja fronteira não tem zeros de f é $\left(1/(2\pi i)\right)\int_\gamma (f'/f)$, onde γ é um caminho regular simples que percorre a circunferência fronteira do círculo no sentido positivo, ou seja, contrário ao dos ponteiros do relógio. A função $w = f(z)$ transforma o caminho γ num caminho regular fechado $\Gamma = f \circ \gamma$ e verifica-se

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_I \frac{(f'\circ\gamma)\gamma'}{f\circ\gamma} = \int_I \frac{(f\circ\gamma)'}{f\circ\gamma} = \int_\Gamma \frac{1}{w}\,dw \ ,$$

onde I é o intervalo onde γ está definido. O valor do último integral é, por definição, $(2\pi\, i)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(0)$, pelo que é igual ao número de voltas N que o caminho Γ dá em torno da origem quando o caminho γ dá uma volta sobre a circunferência. Suponhamos que os zeros de f no círculo são simples e que não há mais de um zero no mesmo raio do círculo. Enquanto o raio da circunferência passa uma vez por cada ponto do círculo no domínio durante uma volta em torno do centro a sua imagem passa N vezes pelo ponto zero no contradomínio (Figura 6.2). No caso dos zeros serem simples, isto implica que há N pontos no círculo considerado onde f é zero, pelo que a fórmula conta efectivamente os zeros de f. No caso em que os zeros de f não são todos simples ou há zeros num mesmo raio do círculo considerado é também possível ver, em particular com base na estrutura local das funções holomorfas estabelecida no teorema (6.9), que a fórmula considerada conta os zeros de f, com as suas multiplicidades (Figura 6.2).

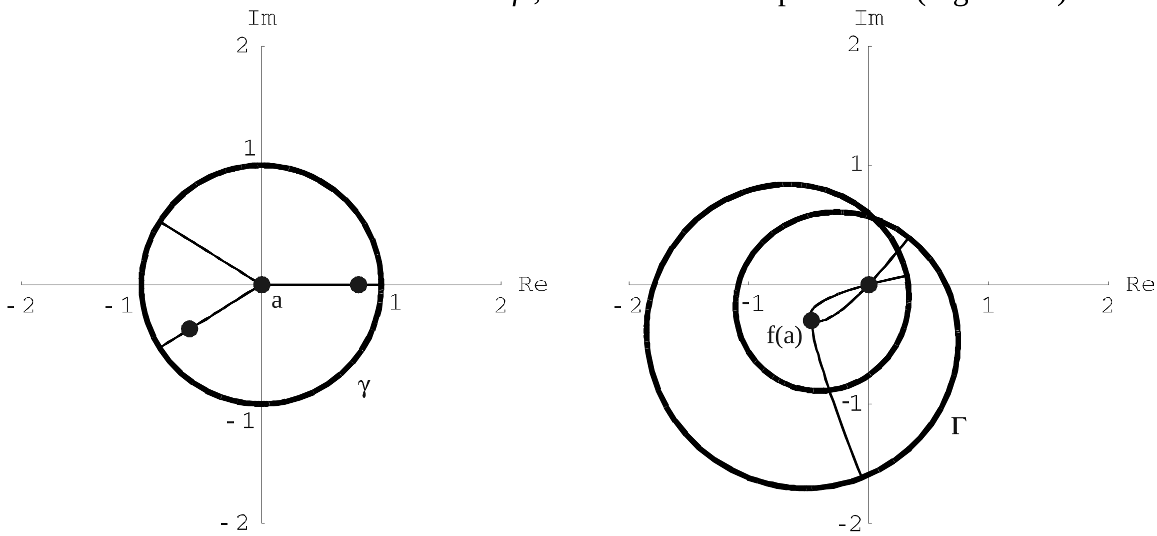

Figura 6.2: Correspondência local entre valores de z e de $f(z)$;
contagem de zeros e do número de pontos onde f assume um mesmo valor[10]

É interessante notar (Figura 6.2) que, no caso em que Γ não passa no ponto $f(a)$, existe um círculo no contradomínio com centro neste ponto e contido numa mesma

[10] A função considerada nesta figura é $z \mapsto (z-z_1)(z-z_2)$, cujos zeros z_1, z_2 são os dois pontos marcados no domínio com os círculos maiores a cheio. Cada ponto na componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\Gamma^*$ que contém a origem é assumido em pares de pontos distintos do círculo delimitado pela circunferência traçada no domínio, com excepção de $f(a)$ que é assumido apenas no ponto a. Cada ponto na outra componente conexa limitada de $\mathbb{C}\setminus\Gamma^*$ é assumido num único ponto do círculo considerado no domínio.

componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, pelo que todos os pontos deste círculo são varridos o mesmo número de vezes pela imagem do raio da circunferência considerada no domínio, durante uma volta. Consequentemente, o número de pontos no círculo do domínio que têm como valor um ponto do círculo no contradomínio é o mesmo do número de pontos no círculo do domínio onde f assume o valor $f(a)$, contando multiplicidades, o que está de acordo com a estrutura local das funções holomorfas estabelecida no teorema (6.9).

(6.13) **Teorema:** *Seja $\Omega\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto, γ um caminho fechado regular simples que percorre a circunferência que delimita um círculo $\overline{B_r(a)}\subset\Omega$ no sentido positivo, f uma função não constante holomorfa em Ω. Se $w_0\in\mathbb{C}\setminus f(\gamma^*)$, então o número de pontos em $B_r(a)$ onde f assume o valor w_0, contando multiplicidades de acordo com as ordens dos zeros de $f-w_0$, é*

$$N_{w_0}\big(f;B_r(a)\big)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz\ .$$

Dem. Os pontos onde f assume o valor w_0 são os zeros da função $f-w_0$. Portanto, como $(f-w_0)'=f'$, basta provar o resultado no caso em que $w_0=0$, o que corresponde a contar o número de zeros de f em $B_r(a)$. Como os zeros de uma função holomorfa são pontos isolados e $\overline{B_r(a)}$ é um conjunto compacto, o número de zeros de f em $\overline{B_r(a)}$ é finito. Dado que, por hipótese, f não tem zeros em γ^* os zeros em $B_r(a)$ são os mesmos que em $\overline{B_r(a)}$. Portanto, podemos designar os zeros de f em $B_r(a)$, sem repetições, por $z_1,z_2,\ldots,z_k$, e as suas ordens por, respectivamente, $m_1,m_2,\ldots,m_k$, e, então, $N_0(f;B_r(a))=\sum_{j=1}^k m_j$. As funções holomorfas são analíticas, pelo que para cada zero z_0 de f de ordem m_0, o desenvolvimento de f em série de potências centrada em z_0 dá $f(z)=(z-z_0)^{m_0}g_0(z)$, onde $g_0\in H(\Omega)$ e $g_0(z_0)\neq 0$. Aplicando sucessivamente esta ideia para todos os zeros de f em $B_r(a)$, obtém-se $f(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\ldots(z-z_k)^{m_k}g(z)$, onde $g\in H(\Omega)$ e $g(z)\neq 0$ para todo $z\in\overline{B_r(a)}$. Portanto, verifica-se

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m_1}{z-z_1}+\frac{m_2}{z-z_2}+\ \cdots\ +\frac{m_k}{z-z_k}+\frac{g'(z)}{g(z)}\ ,$$

em todos os pontos $z\in\overline{B_r(a)}$. Com o caminho $\gamma:[0,2\pi]\to\Omega$ tal que $\gamma(\theta)=a+re^{i\theta}$, o Teorema de Cauchy em conjuntos convexos (4.8) implica $\int_\gamma(g'/g)=0$. Da definição de Ind_γ obtém-se $\int_\gamma(f'/f)=(2\pi i)\sum_{j=1}^k m_j\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_j)$. Como $B_r(a)$ é uma componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, sabe-se de (4.9) que a função Ind_γ é constante em $B_r(a)$. Em (4.10) obteve-se $\mathrm{Ind}_\gamma(a)=1$, pelo que $\int_\gamma(f'/f)=(2\pi i)\sum_{j=1}^k m_j=(2\pi i)\,N_0(f;B_r(a))$. *Q.E.D.*

O resultado anterior permite obter uma outra demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, diferente das referidas em (6.6) baseadas no Princípio do Módulo Máximo, na Propriedade de Valor Médio ou no Teorema de Liouville. Na verdade, se $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$ é um polinómio de grau n, é fácil mostrar que $(1/(2\pi i))\int_\gamma P'(z)/P(z)\,dz$ pode ser arbitrariamente aproximado por $(1/(2\pi i))\int_\gamma n/z\,dz=n$, onde γ é um caminho regular simples que percorre no sentido positivo a circunferência de centro na origem e raio $r>0$ suficientemente grande. Ambos os integrais têm valores inteiros, pelo que, para $r>0$ suficientemente grande, são iguais. O resultado precedente permite concluir que P tem n zeros em $\mathbb{C}$, contando multiplicidades.

6.5. Analiticidade das séries de funções analíticas e teorema de Hurwitz

O processo de passagem ao limite em sucessões e séries de funções levou a alargar o conjunto das funções polinomiais, dando origem ao conjunto das funções analíticas. É natural indagar se a aplicação do mesmo processo a funções analíticas complexas conduz a uma nova extensão ou se, pelo contrário, continua a dar funções analíticas. O resultado seguinte, estabelecido por C. Weierstrass em 1841 nos seus "cadernos de Munique", publicados só em 1894, mostra que se verifica esta última situação quando a convergência é uniforme em subconjuntos compactos do domínio da função definida pelo limite, propriedade que já se verificava para as representações de funções analíticas em séries.

(6.14) **Teorema de Weierstrass para sucessões de funções:** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Se $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções analíticas em conjuntos abertos $\Omega_n \subset \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω, então f é analítica em Ω e $(f_n)^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Dem. Como os círculos fechados contidos em Ω são compactos, a sucessão é uniformemente convergente nesses círculos. Dado que as funções f_n são contínuas nesses círculos obtém-se que também f é contínua neles, pelo que é contínua em Ω. Seja $\Delta \subset \Omega$ um triângulo fechado arbitrário. Como Ω é um conjunto aberto, existe um triângulo fechado $\Delta' \subset \Omega$ cujo interior contém Δ. Como Δ' é compacto, a sucessão converge uniformemente neste conjunto, pelo que o integral de f sobre Δ é o limite da sucessão dos integrais de f_n sobre Δ e, do Teorema de Cauchy em triângulos (4.6),

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0 \ .$$

Resulta do Teorema de Morera (6.3) que $f \in H(\Omega)$. Se $K \subset \Omega$ é um conjunto compacto, existe $r > 0$ tal que $U = \cup_{z\in K} \overline{B_r(z)}$ é um subconjunto compacto de Ω. Da estimativa de Cauchy em (5.13) para a derivada de ordem 1 de $f - f_n$ obtém-se

$$\left| f'(z) - (f_n)'(z) \right| \le \frac{1}{r} \max_U \left| f - f_n \right| \ , \ \text{para } z \in K \, .$$

Como a sucessão $f_n \to f$ uniformemente no conjunto compacto U, $(f_n)' \to f'$ uniformemente em K. Fica, assim, provada a afirmação no teorema para $k = 1$. A afirmação para $k \in \mathbb{N}$ resulta de aplicações sucessivas da afirmação para $k = 1$ a derivadas de ordens sucessivas de f. *Q.E.D.*

Segue-se o resultado análogo para séries estabelecendo que somas de séries de funções complexas analíticas uniformemente convergentes em conjuntos compactos são analíticas e as suas derivadas de qualquer ordem podem ser obtidas derivando a série termo a termo, onde as séries obtidas também convergem uniformemente em conjuntos compactos. Assim, a situação das funções complexas contrasta radicalmente com a das funções reais, onde séries de funções indefinidamente diferenciáveis podem convergir para funções que não são diferenciáveis em qualquer ponto.

(6.15) **Teorema de Weierstrass para séries de funções:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto. Se uma série de funções* f_n *analíticas em* Ω *converge uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω *para uma função* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$*, então* f *é analítica em* Ω *e* $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ *para todo* $z \in \Omega$ *e* $k \in \mathbb{N}$*, onde a série obtida também converge uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω.

Dem. O resultado é consequência imediata do teorema anterior, aplicado à sucessão cujos termos são as somas parciais da série, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, com $\Omega_n = \Omega$. *Q.E.D.*

A verificação de que uma sucessão $\{f_n\}$ de funções analíticas converge uniformemente num conjunto compacto K pode ser facilitada pela utilização do Princípio do Módulo Máximo (5.15) porque o facto do máximo de $|f_n(z) - f(z)|$ em K ser atingido na fronteira deste conjunto implica que basta verificar a convergência uniforme nesta fronteira para ter a garantia da convergência uniforme em K.

O conceito de convergência uniforme é particularmente útil porque várias propriedades dos termos de sucessões uniformemente convergentes em subconjunto compactos de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ passam para o limite da sucessão, o que, em geral, não acontece quando a convergência é simples. Já se observou esta situação com a continuidade (teorema (5.1)), a analiticidade (teorema 6.14), a derivação de ordem arbitrária (teorema 6.14). Os resultados seguintes estabelecem que a inexistência de zeros de funções analíticas num conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$, a injectividade de funções analíticas, e a inclusão de contradomínios de funções analíticas num mesmo conjunto também são propriedades que passam para os limites de sucessões uniformemente convergentes em subconjuntos compactos de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ (no último caso desde que a função limite não seja constante).

(6.16) **Teorema de Hurwitz[11]:** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto e* $\{f_n\}$ *uma sucessão de funções analíticas em* Ω *tal que* $f_n \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω*. Se as funções* f_n *não têm zeros em* Ω *e* f *não é identicamente zero, então* f *não tem zeros em* Ω.

[11] Este resultado foi obtido em 1889 por Adolf Hurwitz (1859-1919).

Dem. Do teorema (6.14), f é analítica em Ω. Se não é identicamente zero em Ω, resulta do teorema (5.10) que os seus zeros, caso existam, são isolados. Logo, para cada $a\in\Omega$ existe $r>0$ tal que $f\neq 0$ em $\overline{B_r(a)}\setminus\{a\}\subset\Omega$. Em particular, a função contínua $|f|$ tem um mínimo $m>0$ no conjunto compacto $\partial B_r(a)$, pelo que para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande $|f_n-f|>m/2$, $|f_n|>|f|-m/2\geq m/2$ e $|1/f_n-1/f|=|f_n-f|/(|f_n||f|)<|f_n-f|/(m^2/2)$. Como $f_n\to f$ uniformemente em $\partial B_r(a)$, obtém-se $1/f_n\to 1/f$ uniformemente em $\partial B_r(a)$. Do teorema (6.14) também $(f_n)'\to f'$ uniformemente em $\partial B_r(a)$. A conjugação destes dois factos dá $(f_n)'/f_n\to f'/f$ uniformemente em $\partial B_r(a)$ e do teorema (5.11) $\int_{\partial B_r(a)}(f_n)'/f_n\to\int_{\partial B_r(a)}f'/f$. Devido ao teorema (6.13) os integrais no lado esquerdo são nulos, pois as funções f_n não tem zeros em $\overline{B_r(a)}$. Portanto, também o integral no lado direito é nulo, e o teorema (6.13) garante que f não tem zeros em $\overline{B_r(a)}$. Como $a\in\Omega$ é arbitrário, conclui-se que f não tem zeros em Ω. *Q.E.D.*

O resultado seguinte é uma consequência imediata do teorema anterior.

(6.17) **Teorema de Injecção de Hurwitz:** *Seja $\Omega\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto e $\{f_n\}$ uma sucessão de funções analíticas em Ω tal que $f_n\to f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω. Então:*

1) Se as funções f_n são injectivas em Ω, então f é injectiva em Ω.

2) Se $S\subset\Omega$ é tal que $f_n(\Omega)\subset S$ e f não constante em Ω, então $f(\Omega)\subset S$.

Dem. 1) Seja $a\in\Omega$. Da injectividade de cada f_n resulta que a função $f_n-f_n(a)$ não tem zeros em $\Omega\setminus\{a\}$. Esta função é analítica em Ω e $f_n-f_n(a)\to f-f(a)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\Omega\setminus\{a\}$. O teorema anterior implica que $f-f(a)$ não tem zeros em $\Omega\setminus\{a\}$, pelo que f não é injectiva em Ω.

2) Seja $b\in\mathbb{C}\setminus S$. As funções f_n-b são analíticas em Ω e $f_n-b\to f-b$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω. Além disso, as funções f_n-b não têm zeros em Ω, e a função $f-b$ não é identicamente zero em Ω pois f não é constante neste conjunto. O teorema anterior implica que $f-b$ não tem zeros em Ω, pelo que f não assume o valor b neste conjunto. Conclui-se que $f(\Omega)\subset S$. *Q.E.D.*

Exercícios

6.1. Determine o maior círculo onde o prolongamento por continuidade de $z/\sin z$ tem desenvolvimento em série de potências de centro na origem.

6.2. Determine o maior círculo centrado na origem onde a função dada é injectiva: a) z^2+z b) e^z.

6.3. Prove as seguintes propriedades das funções inteiras:

a) *Se os valores de $f\in H(\mathbb{C})$ pertencem ao semiplano complexo esquerdo, então f é constante.*

b) *Se $f\in H(\mathbb{C})$ e $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$, então f tem pelo menos um zero.*

6.4. Prove: *Toda a função inteira com períodos $z,w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ com $z/w\notin\mathbb{R}$ é constante.*

6.5. Prove: *Se uma função é contínua no círculo aberto $B_r(0)$ e é holomorfa nos semicírculos $\{z\in B_r(0):\operatorname{Im} z>0\}$ e $\{z\in B_r(0):\operatorname{Im} z<0\}$, então é necessariamente holomorfa em $B_r(0)$.*

6.6. Prove: *Se* $f \in H(\overline{B_r(a)})$, $|f| \le M$ *em* $\overline{B_r(a)}$ *e* $|f(a)| = b > 0$, *então o número de zeros de* f *em* $B_\rho(a)$, *para* $0 < \rho < r$, *contando multiplicidades, é menor ou igual a* $\log(M/b)/\log(R/\rho - 1)$.
(Sugestão: Se $z_1, \dots, z_n$ *designam os zeros de* f *em* $\overline{B_\rho(a)}$, *repetidos de acordo com as multiplicidades, defina* $g(z) = f(z)\{\Pi_{k=1}^n (1 - z/z_k)\}^{-1}$ *e note que* $g(0) = f(0)$ *).*

6.7. Prove: *Se as fronteiras de duas regiões disjuntas* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *têm em comum um segmento de recta ou um arco de circunferência* L, $f_k \in H(\Omega_k)$ *e* f_k *é contínua em* L, *para* $k = 1,2$, *e* $f_1 = f_2$ *em* L, *então a função* $f = f_k$ *em* $\Omega_k \cup L$, *para* $k = 1,2$, *é holomorfa em* $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup L$.

6.8. Prove: *Se* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é uma região cuja fronteira numa vizinhança de um dos seus pontos é um arco de curva regular simples* γ^* *e* $f \in H(\Omega)$ *é prolongável por continuidade a* γ^* *anulando-se neste arco, então* $f = 0$ *em* Ω.

6.9. Prove o **Princípio de Simetria**[12] ou **Princípio de Reflexão**: *Sejam* $\Omega_1, \Omega_1^* \subset \mathbb{C}$ *regiões cujas fronteiras são curvas de Jordan que contêm segmentos de recta ou arcos de circunferências, respectivamente,* L, L^*, *e sejam* $\Omega_2, \Omega_2^* \subset \mathbb{C}$ *regiões simétricas e disjuntas de, respectivamente,* Ω_1, Ω_1^*. *Se* f *é uma transformação conforme de* Ω_1 *sobre* Ω_1^* *tal que* $f(L) = L^*$, *então pode ser prolongada a uma transformação conforme de* $\Omega_1 \cup L \cup \Omega_2$ *sobre* $\Omega_1^* \cup L^* \cup \Omega_2^*$.
(Sugestão: Comece pelo caso em que L *e* L^* *são segmentos de recta no eixo real e aplique o exercício 6.7).*

6.10. Com base no Princípio de Simetria do exercício anterior, prove o resultado seguinte de **prolongamento analítico** devido a H. Schwarz: *Se* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é uma região cuja fronteira contém um arco analítico*[13] γ^*, *toda a transformação conforme* f *de* Ω *sobre um círculo aberto* $B_r(0)$ *tem um prolongamento analítico através de* γ^*.

6.11. Prove: *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *limitado e* $f \in H(\Omega)$ *contínua em* $\overline{\Omega}$. *Se* $a \in \Omega$ *e* $|f(z) - f(a)| \ge d > 0$ *para* $z \in \partial\Omega$, *então* $f(\Omega) \supset B_d(f(a))$.

6.12. *Seja* $\mathcal{F} = \{f \in H(B_1(0)) : f'(0) = 1\}$.

a) Prove o **Teorema de Bloch**[14]: *Se* $f \in \mathcal{F}$, *então existe* $a \in B_1(0)$ *tal que* $f(B_1(0)) \supset f(B_{\rho_a}(a)) \supset B_\beta(f(a))$, *com* $\rho_a = (1 - |a|)/2$ *e* $\beta = 3/2 - \sqrt{2}$.
(Sugestão: Designe por M *o máximo de* $|f'(z)|(1 - |z|)$ *para* $z \in \overline{B_1(0)}$, *e por* $a \in B_1(0)$ *um ponto onde este máximo ocorre. Observe que* $|f'| \le 2|f'(a)|$ *em* $B_{\rho_a}(a)$. *Estime o resto da fórmula de Taylor de 1ª ordem de* f *em no ponto* a *com base na Fórmula de Cauchy e prove que, com* $K(\rho) = \rho - \rho^2/(\rho_a - \rho)$, *se tem* $|f(z) - f(a)| \ge K(\rho)|f'(a)|$ *para* $|z - a| = \rho < \rho_a$. *Designe por* ρ^* *o ponto onde* K *assume o valor máximo e aplique o exercício anterior).*

b) Prove: *Nas condições da alínea anterior,* f *é injectiva em* $B_{\rho_a/3}(a)$ *e* $f(B_{\rho_a/3}(a)) \supset B_{1/72}(f(a))$.
(Sugestão: Estime $|f'(z) - f'(a)|$ *com base na Fórmula de Cauchy e aplique o exercício 5.11).*

c) Chama-se **constante de Bloch**[15] a $B = \inf\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}$, onde $\beta(f) = \sup\{r :$ existe um círculo aberto $S \subset B_1(0)$ onde f é injectiva tal que $f(S)$ contém um círculo aberto de raio $r\}$. Mostre que $1/72 \le B \le 1$.

d) Chama-se **constante de Landau**[16] a $L = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}$, onde $\lambda(f) = \sup\{r : f(B_1(0))$ contém um círculo aberto de raio $r\}$. Mostre que $B \le L \le 1$.

e) Prove: *Se* $f \in F$, *então* $f(B_1(0))$ *contém um círculo aberto de raio* L.

f) Prove: *Se* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *é uma região,* $f \in H(\Omega)$, $f'(c) \neq 0$ *para algum* $c \in \Omega$, *então qualquer que seja* $\varepsilon > 0$ $f(\Omega)$ *contém um círculo de raio* $d(c, \partial\Omega)|f'(c)|/(L - \varepsilon)$, *onde* $d(c, \partial\Omega)$ *é a distância de* c *a* $\partial\Omega$.

g) Prove[17]: *Se* f *é uma função inteira que não é constante, então* $f(\mathbb{C})$ *contém círculos de raios arbitrariamente grandes.*

6.13. Prove a seguinte extensão do Teorema de Liouville: *Se* f *é inteira e* $|f(z)| \le C|z|^\alpha$ *para alguns* $C > 0, \alpha < 1$, *então* f *é constante.*

---

12 O Princípio de Simetria foi mencionado pela primeira vez em 1851 por B. Riemann na sua tese de doutoramento e foi provado em 1869-1870 por H. Schwarz, que também explorou algumas consequências.

13 Um **arco analítico** ou uma **curva analítica** é a imagem de um caminho que é uma função analítica de variável real, i.e., representável por séries de potências em vizinhanças de cada ponto do domínio de γ.

14 André Bloch (1893-1948) provou este resultado em 1924 (na verdade uma versão mais forte com β $\sqrt{2}$ vezes maior). Em 1926 Edmund Landau (1892-1969) simplificou consideravelmente a prova, mas com $\beta = 1/16 < 1/12 < 3/2 - \sqrt{2} < 3\sqrt{2} - 2$. A prova sugerida neste exercício foi proposta em 1971 por Theodor Estermann (1902-1991). A. Hurwitz foi o primeiro a provar, em 1904, um resultado do tipo do Teorema de Bloch: *Se* $f \in H(B_1(0)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *e* $f(z) \neq 0$ *para todo* $z \neq 0$, *então* $f(B_1(0)) \supset B_{r(0)}$, *para* $r = 1/58$; C. Carathéodory mostrou em 1907 que nesta situação $r = 1/16$ é o raio óptimo.

15 A constante de Bloch foi introduzida por E. Landau em 1929, que provou a estimativa indicada. Em 1937, L. Ahlfors e Helmut Grunsky (1904-1986) provaram $0{,}433 < 3^{1/2}/4 \le B \le \Gamma(1/3)\Gamma(11/12)/(\Gamma(1/4)(1 + 3^{1/2})^{1/2} < 0{,}472$ e conjecturaram que a estimativa superior é o valor de B, o que ainda não está estabelecido. Em 1990, Mario Bonk simplificou a prova de L. Ahlfors e H. Grunsky.

16 A constante de Landau foi introduzida por Edmund Landau em 1929, quando também obteve a estimativa indicada e provou o resultado na alínea e). Em 1943, Hans Rademacher (1892-1969) provou $0{,}5 \le L \le \Gamma(1/3)\Gamma(5/6)/\Gamma(1/6) < 0{,}544$ e conjecturou que a estimativa superior é o valor de L, o que ainda não está estabelecido.

17 O Pequeno Teorema de Picard (exercícios 10.21 e 10.22) estabelece o resultado mais forte de que toda a função inteira não constante omite quanto muito um ponto de $\mathbb{C}$.

6.14. a) Diz-se que uma m-pla ordenada de polinómios reais $(P_1,...,P_m)$ é uma **cadeia de Sturm**[18] se em cada zero de P_k os polinómios adjacentes P_{k-1} e P_{k+1} têm valores diferentes de zero de sinais contrários e P_m não tem zeros. Chama-se **cadeia de Sturm generalizada** a uma m-pla ordenada de polinómios reais obtidos de uma cadeia de Sturm multiplicando cada elemento por um mesmo polinómio real.

Prove: *Se P, Q são polinómios reais com o grau de Q maior ou igual ao de P, então a m-pla ordenada $(P_1,...,P_m)$, com $P_1 = P, P_2 = Q$ e cada um dos outros elementos P_k igual ao resto da divisão polinomial dos dois elementos anteriores (resto da divisão de P_{k-2} por P_{k-1}) é uma cadeia de Sturm generalizada.*

b) Chama-se **índice de Cauchy** de uma função racional real R à diferença $I(R)$ entre o número de saltos de $-\infty$ para $+\infty$ nos valores de $R(x)$ quando x cresce de $-\infty$ para $+\infty$.

Prove: *O número de raizes reais distintas de um polinómio real P é $I(P'/P)$.*

Dada uma cadeia de Sturm generalizada $P = (P_1,...,P_m)$, designa-se por $\Delta S(P)$ a diferença entre os números de mudanças de sinal na m-pla ordenada $(P_1(x),...,P_m(x))$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

Prove[19]: *Se $(P_1,...,P_m)$ é uma cadeia de Sturm generalizada, então $I(P_2/P_1) = \Delta S(P)$.*

c) Considere uma função polinomial complexa de coeficientes reais designados como se segue: $P(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + a_2 z^{n-4} + b_2 z^{n-5} + \cdots$. Chama-se **tabela de Routh**[20] a

$$\begin{array}{llllll} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{[n/2]} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-[n/2]} & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & & \\ d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \end{array}$$

onde $[n/2]$ é o menor inteiro maior ou igual a $n/2$ e os elementos de cada linha a partir da segunda são obtidos das duas linhas precedentes subtraindo aos elementos da linha de cima os elementos correspondentes da linha de baixo multiplicados pelo número que faz com que a diferença obtida na primeira coluna seja nula, omitindo depois esta diferença nula com o correspondente deslizamento de uma posição para a esquerda de todas as outras diferenças calculadas.

Prove o **critério de Routh**[23]: *Todos os zeros da função polinomial P têm parte real negativa se e só se todos os elementos na primeira coluna da tabela de Routh são diferentes de zero e do mesmo sinal.*

(Sugestão: Aplique o Princípio do Argumento sobre um caminho que percorre no sentido positivo o arco da circunferência no semiplano complexo direito com centro na origem e raio $R \to +\infty$ e o correspondente diâmetro contido no eixo imaginário, mostre que o aumento de um argumento contínuo de $P(i\omega)$ quando $i\omega$ percorre o eixo imaginário de baixo para cima é $\pi I(R)$, onde $I(R)$ é o índice de Cauchy de $R(\omega) = (b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \cdots)/(a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \cdots)$, e calcule $I(R)$ com base na alínea b)).

Exercícios com aplicações a análise e processamento de sinais

6.15. Dada uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, define-se a função real $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$, chamada **transformada de Fourier**[21] de f, considerando o integral de Lebesgue. Esta função fica definida em $\mathbb{R}$ se e só se f é integrável à Lebesgue em $\mathbb{R}$, ou seja, $f \in L^1(\mathbb{R})$. À transformação $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ chama-se **transformação de Fourier**[22]. É claro que é uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R})$ no espaço das funções reais definidas em $\mathbb{R}$ e pode ser invertida em condições relativamente gerais. Em particular pode-se provar: *Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(t) = (1/(2\pi))\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$, para $t \in \mathbb{R}$, então g é contínua em $\mathbb{R}$, $g(t) \to 0$ quando $t \to \pm\infty$, e $f = g$* q.t.p.[23] *em* $\mathbb{R}$. Uma consequência imediata é: *A transformação de Fourier é injectiva*.

---

[18] Jacques Charles François Sturm (1803-1855).

[19] Este resultado é o caso particular com intervalo $]-\infty,+\infty[$ do Teorema de Sturm relativo à determinação do número de zeros de um polinómio real num intervalo, estabelecido em 1829 por J.C.F. Sturm.

[20] Edward Routh (1831-1907). O critério de Routh foi publicado por E. Routh em 1887.

[21] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). A transformação de Fourier foi introduzida pelo próprio J.B.J. Fourier, em associação com a introdução de séries de Fourier, numa comunicação sobre a propagação do calor apresentada na Academia das Ciências de Paris em 1807, mas só publicada em 1822 depois de grande controvérsia. Contudo, a transformação de Fourier só foi tornada rigorosa com trabalhos de vários matemáticos no final do século XIX e do início do século XX, inclusivamente com a adopção do integral de Lebesgue, introduzido por H. Lebesgue em 1902. O desenvolvimento da análise de Fourier veio a originar a área da matemática conhecida por Análise Harmónica. Charles Louis Fefferman (1949-) recebeu em 1978 a Medalha Fields por contribuições nesta área.

[22] Pode-se encontrar um estudo da transformação de Fourier no livro de W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, indicado na bibliografia final.

[23] q.t.p. significa “quase em toda a parte”, i.e., excepto possivelmente num conjunto de medida nula.

A transformação de Fourier é muito útil no estudo e resolução de equações diferenciais, na análise e controlo de sistemas, na análise e processamento de sinais. Neste contexto é usual chamar à transformada de Fourier de uma função f **decomposição na frequência** ou **decomposição espectral** de f. Graficamente, representa-se esta decomposição, em função da frequência, pelos gráficos do módulo e de um argumento (ou, na linguagem de análise de sinais, **amplitude** e **fase**) da transformada de Fourier (Figura 6.4).

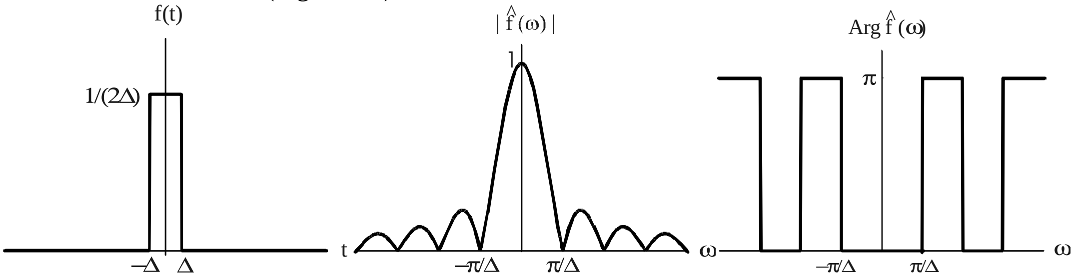

Figura 6.4: Decomposição espectral de um impulso unitário de largura 2Δ

6.16. Prove: *Se* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $\hat{f}$ *tem suporte num intervalo compacto* $[-\tau,\tau]$ *(i.e.,* $f=0$ *em* $\mathbb{R}\setminus[-\tau,\tau]$*), então a extensão complexa da fórmula de inversão da transformada de Fourier,* $g(z)=(1/(2\pi))\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega z}d\omega$ *(* $g=f$ q.t.p. *em* $\mathbb{R}$*), é uma função inteira de ordem* $\rho\le 1$ *e, quando* $\rho=1$ *é de tipo* $\sigma\le\tau$. *(Sugestão: Aplique o Teorema de Morera e majore o integral).*

6.17. Prove o seguinte **teorema de interpolação**[24]: *Seja* $\tau>0$. *Se* f *é uma função inteira de ordem* $\rho<1$*, ou de ordem* $\rho=1$ *e tipo* $\sigma<\tau$*, então* $f(z)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} f(n\pi/\tau)(\sin\tau z)/(\tau z-n\pi)$.
(Sugestão: Para $N\in\mathbb{N}$ *designe* $F_N(z)=1/(2\pi i)\int_{\gamma_N} f(\varsigma)/\{(\varsigma-z)\sin(\tau\varsigma)\}d\varsigma$*, onde* γ_N *é um caminho regular simples que descreve a circunferência* $|z|=(N+1/2)\pi/\tau$ *no sentido positivo, aplique o Teorema dos Resíduos para calcular o integral, e mostre que* $|F_N(z)|\to 0$ *quando* $N\to+\infty$*, estimando* $|f(z)|$ *com base numa estimativa* $|\sin(z)|\ge m e^{|Im\ z|}$*, para* $z\in\gamma_N$*, e aplicando os exercícios 6.14 e 6.15).*

6.18. Considere o circuito da Figura 6.5 e recorde os exercícios 1.17 e 6.25.
a) Supondo que existem, mostre que as transformadas de Fourier das tensões de saída e entrada, respectivamente $\hat{v}_0$ e $\hat{v}_i$, estão relacionadas por $\hat{v}_0(\omega)=\{(1/2)/\{1+i(3RC/2)\omega\}\}\hat{v}_i(\omega)$ e observe que o módulo e o argumento de $\hat{v}_0/\hat{v}_i$ têm as representações gráficas na Figura 6.6. Em particular, as componentes espectrais de alta frequência do sinal de entrada são mais atenuadas do que as de baixa frequência. Por esta razão, diz-se que este circuito é um **filtro passa-baixo**.
b) Chama-**se largura de banda** de um filtro passa-baixo à frequência $f_B=\omega_B/(2\pi)$ onde o sinal é atenuado a -3 dB[25] do seu valor em $\omega=0$. Para o circuito aqui considerado, mostre que ω_B é aproximadamente $2/(3RC)$. Calcule o valor de RC de modo ao filtro ter largura de banda de 100 Hz.

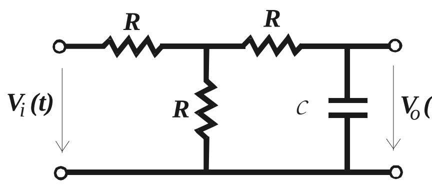

Figura 6.5: Circuito eléctrico

[24] Este resultado foi descoberto em 1933 por Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (1908-) num contexto de análise de sinais, embora fosse conhecido anteriormente em matemática como um resultado geral de interpolação. Estabelece que uma função de ordem $\rho=1$ e tipo $\sigma<\tau$ pode ser interpolada exactamente a partir dos seus valores nos pontos $n\pi/\tau$, $n\in\mathbb{Z}$. Conjugando este facto com o resultado do exercício anterior, obtém-se que uma função $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ com transformada de Fourier $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ de suporte num intervalo compacto $[-\tau,\tau]$ é interpolada exactamente pela expressão dada, a partir apenas dos seus valores nos pontos $n\pi/\tau$. Isto garante que uma frequência de amostragem superior a σ/π é suficiente para permitir reconstituir completamente um sinal com espectro de frequência limitado por $\sigma/(2\pi)$ (i.e., de **largura de banda** $\sigma/(2\pi)$), ou seja, basta uma frequência de amostragem dupla da frequência máxima no espectro do sinal. Neste contexto, o resultado é conhecido por **Teorema de Amostragem de Shannon-Kotelnikov**. O matemático Claude Shannon (1916-2001) fundou a Teoria da Informação em 1948, altura em que também provou o Teorema da Amostragem por um método diferente do aqui referido. O resultado tinha sido previsto para funções sinusoidais em 1928 por Harry Nyquist (1889-1976), pelo que a frequência dupla da largura de banda de um sinal é conhecida por **ritmo de amostragem de Nyquist**. Tanto Nyquist como Shannon trabalharam nos *Bell Telephone Laboratories*, respectivamente nos períodos 1934-1954 e 1941-1952.

[25] "dB" designa decibéis. É uma medida logarítmica de amplitude de sinais que foi introduzida em acústica para quantificar a intensidade sonora: um sinal de amplitude A tem $20\log_{10} A$ dB.

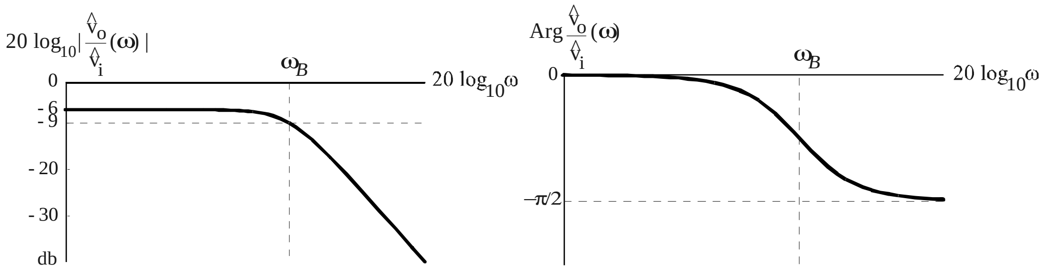

Figura 6.6: Módulo e argumento de $\hat{v}_0 / \hat{v}_i$ para o circuito da figura anterior