Apêndice IV

Notas biográficas de cinco gigantes da matemática que contribuíram para a análise complexa: Euler, Gauss, Cauchy, Riemann e Poincaré

As introduções dos vários capítulos têm notas históricas que referem aspectos essenciais do desenvolvimento da análise complexa de uma variável. Foram referidas várias vezes contribuições para o estudo das funções complexas de L. Euler (1707-1783), C. Gauss (1777-1855), A.L. Cauchy (1789-1857), B. Riemann (1826-1866) e H. Poincaré (1854-1912). Trata-se de cinco das maiores figuras de toda a história da matemática com importantes contribuições em vários domínios da matemática e das suas aplicações. A coincidência de terem sucessivamente contribuído de forma decisiva para o estudo das funções complexas é um facto de importância assinalável, pelo que se termina este livro com uma nota história que resume as biografias destes cinco matemáticos excepcionais.

Leonhard Euler (1707-1783) foi referido no capítulo 1 a propósito da definição de números complexos, da adopção do símbolo i e da relação entre funções trigonométricas e a função exponencial; no capítulo 2 a propósito da fórmula de De Moivreno capítulo 3 a propósito da diferenciabilidade de funções complexas, das transformações conformes e de aplicações das funções complexas em hidrodinâmica e cartografia; no capítulo 4 a propósito da introdução de integrais de funções complexas; no capítulo 5 a propósito do cálculo de somas de séries, da obtenção de séries de potências para as funções exponencial, seno e coseno, e da fundação da teoria analítica dos números; no capítulo 8 a propósito da consideração de funções harmónicas, de hidrodinâmica, da Função Zeta de Riemann e de produtos infinitos de números complexos.

Euler terminou a universidade em Bâle em 1724. Publicou o primeiro artigo quando tinha dezoito anos, seguidamente escreveu sobre a propagação do som e, depois, candidatou-se a um prémio da Academia das Ciências de Paris para a mastreação de navios que ganhou com um trabalho em cujas conclusões considerava desnecessário verificar os resultados experimentalmente porque *"como eram deduzidos com base nas fundações mais seguras da mecânica, a sua verdade ou correcção não podiam ser questionadas"*. Esta atitude foi uma constante na sua vida, ao longo da qual considerou o poder dedutivo como tendo uma inquestionável supremacia.

Pouco depois de concluir a universidade foi para a Academia de S. Petersburgo onde ficou até 1741. De 1741 a 1766 Euler esteve na Academia de Berlim. Regressou à Academia de S. Petersburgo em 1766 onde permaneceu até 1783. Ficou completamente cego em 1766, embora só visse por um olho desde 1735.

As áreas acima mencionadas são uma pequena parte das importantes contribuições deste matemático que tocou profundamente em praticamente todas as áreas da matemática do seu tempo e das suas aplicações, incluindo equações diferenciais, cálculo de variações, geometria, teoria dos números, cartografia, mecânica de sólidos, mecânica de fluidos, mecânica celeste, óptica, hidráulica, construção de navios, artilharia, teoria da música, etc.

Euler teve um papel importante na adopção de notações matemáticas básicas. Por exemplo a notação π para a área do círculo de raio 1 apareceu pela primeira vez em 1706 nos trabalhos de William Jones (1675-1749) e só começou a generalizar-se a partir de 1790 devido à grande difusão dos trabalhos de Euler que começou a usar esta notação em 1736. A notação e para a base dos logaritmos naturais apareceu pela primeira vez num manuscrito de Euler de 1727-1728, só publicado em 1862, e numa sua publicação de 1736, tendo sido amplamente adoptada a partir de 1790. É de notar que o uso das notações π e e teve excepções importantes tão recentes quanto 1871, nomeadamente em publicações de referência como as tabelas matemáticas de J.M. Pierce. A notação i para a unidade imaginária apareceu pela primeira vez numa memória apresentada por Euler em 1777 à Academia de S. Petersburgo, mas só publicada em 1794, e apareceu pela segunda vez numa publicação de Euler de 1801. Nesse mesmo ano C.F. Gauss começou a usar regularmente esta notação e a partir de 1851 foi adoptada por A.L. Cauchy. O uso da notação i para a unidade imaginária só se generalizou a partir de 1890.

O número das publicações de Euler identificadas por Gustav Eneström totalizou 886. A sua influência na geração seguinte de matemáticos foi enorme. Pierre-Simon Laplace (1749-1827) costumava dizer a matemáticos mais jovens *"Leiam Euler. É o mestre de todos nós."* e C. Gauss escreveu *"O estudo dos trabalhos de Euler permanecerá como a melhor escola para os diferentes campos da matemática e nada poderá substitui-lo"*.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi referido no capítulo 1 a propósito da introdução da designação "número complexo" e da concepção dos números complexos como pontos de um plano; no capítulo 4 a propósito da noção de integral de uma função complexa; no capítulo 5 a propósito da convergência de séries; no capítulo 6 a propósito da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra; no capítulo 8 a propósito das funções harmónicas, da teoria do potencial, da Propriedade de Valor Médio para funções harmónicas e da Função Gama; no capítulo 10 a propósito de funções elípticas e de geometria não-euclideana..

Gauss estudou de 1795 a 1798 na Universidade de Göttingen e doutorou-se em Helmstädt em 1799. Foi director do laboratório astronómico e professor da universidade de Göttingen.

A tese de doutoramento de Gauss, em 1799, foi um marco na história da matemática ao avançar decisivamente na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que tinha iludido os esforços de grandes matemáticos anteriores, como d'Alembert, Euler, Lagrange e Laplace. Embora esta tentativa de demonstração estivesse incompleta, Gauss foi o primeiro a provar este teorema para polinómios com coeficientes reais, em 1816, e apresentou uma outra prova em 1849, agora para polinómios com coeficientes complexos, seguindo as ideias da sua tentativa de 1799.

Gauss teve importantes contribuições em teoria dos números, mecânica celeste, geodesia, álgebra dos números complexos, geometria, teoria do potencial, equações diferenciais. No âmbito da geometria, iniciou o tratamento de superfícies pela chamada "geometria intrínseca", introduzindo a descrição métrica local de superfícies e a ideia de curvatura, bem como a sua relação com a métrica. O célebre Teorema Egregium de Gauss foi um contributo determinante para o desenvolvimento da noção de variedade diferencial independentemente do espaço onde é realizada. Com estes resultados Gauss contribuiu decisivamente para a fundação da geometria diferencial.

Em 1820 Gauss detinha os principais resultados da "geometria não-euclideana", designação que se deve a ele próprio, mas não revelou as suas conclusões que contrariavam as filosofias dominantes sobre o espaço, devidas a Kant, que consideravam a geometria euclideana a única maneira correcta de pensar sobre o espaço. Gauss não quis envolver-se em disputas sobre este assunto de forma a *"não perder tempo"*. Escreveu numa carta a Bernal: *"Provavelmente não vou escrever as minhas investigações muito detalhadas sobre este assunto durante um longo período. Talvez durante a minha vida, porque temo a agitação que ouviríamos dos Boecianos se me expressasse sobre este assunto"*.

A partir de 1830 Gauss contribuiu significativamente para vários ramos da física, nomeadamente para a teoria da tensão superficial, para a óptica onde introduziu a noção de comprimento focal de um sistema de lentes e inventou a lente grande-angular de Gauss com o objectivo de reduzir a aberração cromática, para o geomagnetismo de que foi um dos fundadores, para a teoria do magnetismo e para os métodos de o observar. James Clerk Maxwell (1831-1879), no prefácio do seu fundamental *Treatise on Electricity and Magnetism* de 1873 refere que Gauss *"não só acrescentou significativamente o conhecimento da teoria da atracção magnética, como reconstruiu toda a ciência magnética no que respeita aos instrumentos usados, aos métodos de observação e ao cálculo de resultados, de tal forma que as suas memórias sobre o magnetismo terrestre podem ser tomadas como um modelo de investigação física por todos que estejam envolvidos na medição de quaisquer forças da natureza"*.

Após a morte de Gauss descobriram-se manuscritos seus que revelaram uma grande quantidade de importantes trabalhos que não tinham sido publicados. Numa carta enviada por Gauss ao seu amigo dos tempos de estudante Wolfgang Bolyai encontra-se a seguinte extraordinária passagem: *"Não é o conhecimento mas o acto de aprender, não a posse mas o acto de ali chegar, que me dá o maior prazer. Quando acabo por clarificar e explorar completamente um assunto, então afasto-me dele para entrar na escuridão outra vez."*

A propósito de Gauss, L. Kronecker escreveu: *"O nome de Gauss está ligado a quase tudo o que matemáticos do nosso século desenvolveram como ideias originais."*

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi referido no capítulo 3 a propósito das noções de limite e derivada; no capítulo 4 a propósito da noção de integral de funções complexas, do Teorema de Cauchy, da Fórmula de Cauchy e da Propriedade de Valor Médio para funções diferenciáveis; no capítulo 5 a propósito das noções convergência de sucessões e séries e de função, do Teorema de Liouville (funções analíticas limitadas em todo o plano complexo são constantes); no capítulo 6 a propósito da representação de funções diferenciáveis por séries de potências; no capítulo 7 a propósito do Teorema de Cauchy em regiões simplesmente conexas; no capítulo 8 a propósito da noção de resíduo, do Teorema dos Resíduos e do primeiro critério de convergência para produtos infinitos.

Cauchy completou a *École Polytéchnique* de Paris em 1807 e *o Institut des Ponts et Chaussées* em 1810, após o que iniciou carreira como engenheiro até 1813, primeiro na construção do canal de Ourcq e depois no dique de Cherbourg. Seguidamente leccionou na *École Polytéchnique* até 1830, onde iniciou o seu esforço de tornar rigorosa a análise matemática. De 1830 a 1833 foi professor de física matemática em Turim, e entre 1833 e 1838 esteve em Praga de onde regressou a Paris. Depois de um período de quatro anos no *Bureau des Longitudes,* em que contribuiu com trabalhos significativos em astronomia matemática, foi professor na Sorbonne a partir de 1848.

As actividades de Cauchy englobaram um amplo leque de domínios, incluindo teoria da elasticidade, de que foi um dos fundadores, óptica, mecânica celeste, geometria, álgebra, teoria dos números. O seu nome está definitivamente ligado à refundação da análise matemática, numa fase em que foram tornados rigorosos os conceitos básicos desta área, incluindo as próprias noções de limite, derivada e integral, para as quais Cauchy contribuiu de forma decisiva. É também a Cauchy que se deve a definição de função dos nossos dias, como correspondência entre elementos de dois conjuntos, ultrapassando as noções imprecisas anteriores baseadas na identificação de funções com expressões algébricas ou analíticas que foram origem de várias dificuldades. A mesma definição já tinha sido adoptada nas lições de B. Bolzano em 1817, as quais permaneceram pouco conhecidas durante mais de cem anos, pois só foram publicadas em 1930. Também foi Cauchy que fez a primeira prova de existência de soluções de equações diferenciais, em 1836.

A produtividade científica de Cauchy foi apenas ultrapassada por Euler. Era tão grande que a Academia das Ciências de Paris resolveu restringir o número de artigos que um membro podia apresentar anualmente para publicação. Publicou quase 800 artigos e as suas obras completas preenchem 27 grandes volumes.

Bernhard Riemann (1826-1866) foi referido no capítulo 1 a propósito da introdução do plano complexo estendido e da Superfície Esférica de Riemann; no capítulo 3 a propósito das condições de Cauchy-Riemann para diferenciabilidade de funções complexas; no capítulo 5 a propósito da definição de função, do Teorema de Unicidade de funções analíticas (funções analíticas numa região que coincidem num conjunto com pontos limite são iguais), do Princípio do Módulo Máximo (o módulo de uma função analítica não constante numa região não pode ter máximos locais), e do correspondente resultado para mínimos (o módulo de uma função analítica não constante numa região só pode ter mínimos relativos em pontos onde se anula); no capítulo 6 a propósito do Teorema da Aplicação Aberta (a imagem de um conjunto aberto por uma função holomorfa não constante é um conjunto aberto) e do Princípio de Simetria ou Reflexão; no capítulo 7 a propósito da noção de conectividade de uma região ou de uma superfície; no capítulo 8 a propósito da Função Zeta de Riemann, da distribuição dos números primos e da Hipótese de Riemann (os zeros da função zeta de Riemann na faixa crítica $0 \leq \mathcal{Re}\, z \leq 1$ têm parte real ½.); no capítulo 9 a propósito do Princípio de Dirichlet; no capítulo 10 a propósito do Teorema da Transformação de Riemann que estabelece a existência de homeomorfismos conformes que transformam qualquer região simplesmente conexa propriamente contida no plano complexo no círculo aberto de raio 1, das funções elípticas, do prolongamento analítico, das Superfícies de Riemann e da Geometria Riemanniana.

Riemann estudou nas universidades de Göttingen e Berlim. Obteve o doutoramento na Universidade de Göttingen em 1851. Em 1854 foi nomeado *Privatdozent* (professor sem salário) em Göttingen e, depois de ter sido promovido a professor assistente por Dirichlet que em 1885 foi nomeado para a cadeira de Gauss quando este morreu, acabou por suceder a Dirichlet na mesma cadeira, em 1859, onde se manteve até ter morrido com apenas 39 anos.

A tese de doutoramento de Riemann, apresentada em 1851 na Universidade de Göttingen com o título *"Bases da Teoria Geral das Funções de Variável Complexa",* continha aspectos fundamentais desta área, em particular a clarificação das agora chamadas equações de Cauchy-Riemann na diferenciabilidade de funções complexas, o Teorema da Aplicação Aberta e o Princípio da Conservação de Domínio, o Princípio do Módulo Máximo, o Teorema de Unicidade de funções analíticas, o prolongamento analítico, as chamadas "Superfícies de Riemann" que vieram a ser uma das bases da noção de variedade diferencial e da geometria diferencial, o Teorema da Transformação de Riemann. Para estudar as "Superfícies de Riemann" introduziu um conjunto de conceitos topológicos, entre os quais a noção de conexidade. Estas contribuições fizeram de Riemann um dos fundadores tanto da geometria diferencial como da topologia.

Em 1854, como candidato a *Privatdozent,* publicou uma segunda tese *"Sobre a Representação das Funções por Séries Trigonométricas",* onde desenvolveu o conceito hoje conhecido por integral de Riemann, estabeleceu condições necessárias e suficientes para a sua existência e lançou as bases do desenvolvimento do integral de Lebesgue. Um outro requisito que tinha de preencher para a aprovação era a apresentação de uma lição num tópico escolhido pelos professores entre três indicados pelo candidato. Era usual seleccionar o primeiro dos tópicos indicados, mas Gauss forçou a escolha do terceiro tópico indicado por Riemann, relativo aos fundamentos da geometria, pois tinha curiosidade de ver como aquele brilhante candidato lidaria com este desafio em que Gauss tinha pensado profundamente durante décadas. Esta escolha levou Riemann a abandonar os tópicos a que se dedicava na altura, nas suas palavras *"as minhas investigações nas ligações entre electricidade, magnetismo, luz e gravitação",* para preparar a lição sobre os fundamentos da geometria em dois meses de trabalho intensivo. A lição consistiu nas bases da chamada Geometria Riemanniana que teve um papel crucial no desenvolvimento da geometria diferencial e da topologia e veio a ser o quadro apropriado para a teoria geral da relatividade desenvolvida por Albert Einstein (1879-1955) 60 anos depois. Nos anos seguintes Riemann leccionou um curso *"Sobre as Hipóteses de Base da Geometria"* cujo texto foi publicado postumamente em 1868 e teve um papel essencial, precisamente no desenvolvimento da geometria diferencial e da teoria da relatividade.

Riemann teve também contribuições importantes para a teoria de equações diferenciais e para a teoria dos números. Nesta área publicou em 1859 um artigo dedicado à distribuição dos números primos que, embora não ultrapassando dez páginas, veio a exercer uma profunda influência em estudos ulteriores. Nesse artigo foi introduzida a célebre Função Zeta de Riemann, a função complexa definida por

$\varsigma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}1/n^{s}$. Entre várias questões sobre esta função que levaram à criação de importantes subáreas da matemática nos cem anos seguintes, formulou a célebre Hipótese de Riemann que permanece sem solução até hoje: todos os zeros da função ς com parte real em $[0,1]$ têm parte real igual a $1/2$.

As ideias contidas nos trabalhos de Riemann impressionam pela sua profundidade e por terem sido desenvolvidas num curto período de uma década e meia, o que não impediu que tivesse sido um dos matemáticos que mais influenciou futuros desenvolvimentos da matemática.

Henri Poincaré (1854-1912) foi referido no capítulo 4 a propósito da noção de homotopia; no capítulo 6 a propósito da noção de ordem de uma função inteira; no capítulo 7 a propósito das noções de cadeia, ciclo e homologia; no capítulo 10 a propósito da unicidade de transformações de Riemann de regiões simplesmente conexas propriamente contidas no plano complexo no círculo unitário de centro na origem (quando a imagem e a derivada num dado ponto são especificadas), de um modelo para a Geometria Hiperbólica ou de Lobatchevsky no círculo unitário do plano complexo, de funções analíticas globais, do Teorema de Poincaré-Volterra (o conjunto de elementos de uma função analítica global centrados num ponto é numerável) e do estudo de funções automorfas (invariantes sob um subgrupo discreto dos automorfismos de um círculo).

Poincaré foi aluno na *École Polytechnique* entre 1873 e 1875 e depois frequentou a *École des Mines.* Trabalhou como engenheiro em Vesoul. Doutorou-se na Universidade de Paris em 1879 com uma tese em equações diferenciais e obteve uma posição na Universidade de Caen. Em 1881 foi nomeado para a Universidade de Paris e em 1886 obteve nesta universidade um lugar de professor de física matemática e teoria da probabilidade. Mais tarde ocupou a cátedra de astronomia na *École Polytechnique.*

Poincaré dominava um conjunto impressionantemente amplo de assuntos e contribuiu profundamente para muitas áreas da matemática e das suas aplicações. Leccionava sobre uma matéria diferente em cada ano, apresentando contribuições para áreas muito diversas, como equações diferenciais, teoria do potencial, topologia, álgebra, teoria dos números, luz, electricidade, condução do calor, capilaridade, electromagnetismo, relatividade, hidrodinâmica, mecânica celeste, termodinâmica, probabilidade. As suas contribuições para a mecânica celeste foram muito importantes e deram origem a três volumes dos seus *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste,* publicados em 1892, 1893 e 1899, a que se seguiram três volumes de natureza principalmente pedagógica das *Leçons de Mécanique Celeste,* em 1905, 1909 e 1910. Também teve contribuições fundamentais para a geometria algébrica, com trabalhos publicados em 1910-11. Foi um dos fundadores da chamada teoria qualitativa ou geométrica de equações diferenciais que veio a dar origem à teoria dos sistemas dinâmicos. Foi, ainda, um dos principais fundadores da topologia algébrica, área para que contribuiu com seis artigos, o primeiro dos quais em 1894.

Poincaré foi o principal fundador da análise complexa de várias variáveis, com contribuições em 1883 para funções racionais de duas variáveis, em 1895 para o estudo de sub-variedades algébricas de $\mathbb{C}^n$, em 1886-87 para a extensão do Teorema de Cauchy às funções de duas variáveis complexas e para as bases da teoria multidimensional dos resíduos, em 1907 para o estudo de funções biholomorfas em regiões de $\mathbb{C}^2$.

Henri Poincaré também se dedicou à divulgação da matemática, da física e da filosofia das ciências para o grande público, tendo as suas publicações tido um considerável impacto.