Parar ou continuar: eis a questão!

Cláudia Nunes
CEMAT, Técnico Lisboa, Universidade de Lisboa

21 Novembro 2018, IST

Motivação

O nosso objectivo é decidir quando se deve tomar uma decisão, de forma a maximizar o *lucro*, i.e.,

QUEREMOS GANHAR DINHEIRO

Opções de compra americanas

- Opção de compra
  - Contrato entre um comprador e um vendedor
  - Maturidade fixa (T), activo subjacente e preço de exercício (K)
  - A opção é exercida se o preço da acção for superior a K.
- Americana

  a opção pode ser exercida até ao instante T

Quando é que o comprador desta opção deve exercer?

Nem demasiado tarde nem demasiado cedo

Problema de saída

- Uma empresa está a operar no mercado;
- O mercado está em declíneo e por isso a empresa pode decidir fechar, tendo custos associados a esta decisão.

Problema de investimento

- Uma empresa pondera entrar num novo mercado;
- Porque o mercado está em expansão, e por isso o investimento pode ser proveitoso, embora haja custos de investimento.

Quando deve a empresa sair do mercado

Quando deve a empresa investir no mercado?

Nem demasiado tarde nem demasiado cedo

A QUESTÃO

Quando é que a decisão deve ser tomada, de forma a maximizar o retorno do lucro ou a minimizar os prejuízos?

A RESPOSTA

Usar tempos de paragem óptimos

Retorno de uma opção americana

- $S = \{S(t), t \geq 0\}$ é o processo dos preços das acções;
- r: taxa de juro (assumida conhecida e constante);

Retorno do investimento: $e^{-rt} \max(S(t) - K, 0)$

Retorno óptimo do investimento: $\sup_{t \leq T}\{e^{-rt} \max(S(t) - K, 0)\}$

Como fazer se S for um processo estocástico?

Determinístico	$\sup_{t\leq T}\{e^{-rt}\max(S(t)-K,0)\}$
Estocástico	$\sup_{t\leq T} E\left[e^{-rt}\max(S(t)-K,0)\mid S(0)\right]$

Saída do mercado

Se

- $X = \{X(t), t \geq 0\}$ for o processo da procura pelo produto;
- r: taxa de juro (assumida conhecida e constante);
- Π: lucro por unidade de tempo, enquanto a empresa está activa;
- I: custo de saída

Retorno: $\int_0^t e^{-rs}\Pi(X(s))ds - e^{-rt}I$

Como fazer se S for um processo estocástico?

Det.	$\sup_{\tau}\{\int_0^{\tau} e^{-rs}\Pi(X(s))ds - e^{-r\tau}I\}$
Est.	$\sup_{\tau} E\left[\int_0^{\tau} e^{-rs}\Pi(X(s))ds - e^{-r\tau}I \mid X(0)\right]$

Função valor

- Recompensa terminal

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_x \left[e^{-r\tau} \Pi(X(\tau)) \right]$$

(e.g. Opção americana)

- Recompensa integral

$$V(x) = \inf_{\tau \in \mathcal{S}} E_x \left[\int_0^\tau e^{-rs} \Pi(X(s)) ds - e^{-r\tau} I \right]$$

(e.g. Opção de saída)

Na apresentação de hoje

$$V(x) = \inf_{\tau \in S} E_x \left[\int_0^{\tau} e^{-rs} \Pi(X(s)) ds + e^{-r\tau} h(X(\tau)) \right]$$

(inf, sup, com h ou sem... quase *igual*)

Processo de difusão

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ é uma difusão se for solução de

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

onde

- μ é o termo de drift
- σ é a volatilidade
- $W = \{W(t), t \geq 0\}$ é um Movimento Brownian

Comentário

Movimento Browniano

- Distribuição normal
- Incrementos estacionários
- Incrementos independentes
- realizações com caminhos contínuos

mas ... é um processo não diferenciável em toda a parte!

Algumas consequências

Em resultado da não diferenciabilidade do MB, precisamos de novas regras de cálculo, nomeadamente:

- Fórmula de Ito: fórmula que define o sentido de $dF(X(t))$, onde X é um processo de difusão
- Integral de Ito: definição/propriedades de $\int_0^t F(X(s))dW(s)$

Caso particular

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

é o Movimento Geometrico Brownian (GBM)

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

Função de lucro

Hipóteses

- A função Borel mensurável $\Pi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ é tal que $\Pi \in L^1_{loc}(]0, \infty[)$.
- $v_p^+(x) := E_x\left[\int_0^\infty e^{-rs}\Pi^+(X(s))ds\right] < \infty$, para todo o $x \in]0, \infty[$.

de forma a que o problema de optimização esteja bem definido (e não-trivial, $\tau \neq 0$ e $\tau \neq \infty$).

Regiões de decisão

Relembrar:

- ou adia-se a decisão (região de continuação)
- ou toma-se a decisão, e a opção é exercida (região de paragem)

Se se tomar a decisão de paragem tarde de mais, a estratégia já não é óptima;
Se se tomar a decisão de continuar, quando já se deveria ter parado, a estratégia já não é ptima.

É preciso actuar sempre de forma óptima!

Princpio, informal

A ideia é simplificar um problema complexo, dividindo-o em problemas de menor dimensão, de forma recursiva

A decisão é óptima se for óptima até qualquer instante intermédio. Estamos a simplificar o processo de análise da decisão ao partir o problema numa sequência de passos ao longo do tempo.

Equação da programação dinâmica

$$V(x) = \inf_{\tau \in S} E_x \left[\int_0^{\tau} e^{-rs} \Pi(X(s)) ds + e^{-r\tau} V(X(\tau)) \right]$$

Gerador infinitesimal

$$\mathcal{L}F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{E\left[F(X(t+h)) - F(x)|X(t) = x\right]}{h}$$

essencialmente o gerador descreve o movimento do processo no intervalo infinitesimal;é um operador diferencial, e para difusões homogêneas (cujos parâmetros não dependem explicitamente do tempo):

$$\mathcal{L}F(x) = \mu(x)F'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)F''(x)$$

O que é que fazemos com a equação do princípio da programação dinâmica?

- Aplicamos a fórmula de Ito a $e^{-r\tau}V(X(\tau))$:

$$d\left(e^{-rt}V(X(t))\right) = \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{Inf. Generator}} V(X(t))dt + \ldots dW(t)$$

- Aplicamos a primeira isometria de Ito:

$$E\left[\int_0^t e^{-rs}V(X(s))dW(s)\right] = 0$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$E\left[\int_0^{\tau} e^{-rs}\left(\mathcal{L}V(X(t)) - rV(X(t)) + \Pi(X(t))\right) dt\right] = 0$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\min\{-rV(x) + \mathcal{L}V(x) + \Pi(x), h(x) - V(x)\} = 0}_{\text{Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman}}$$

Equação de HJB (cont.)

- Após a tomada de decisão, o retorno é h.

$$\min\{-rV(x)+\mathcal{L}V(x)+\Pi(x), \quad \underbrace{h(x) - V(x)}_{\text{parar e exercer a opção}} \quad \} = 0$$

- Antes de exercer a opção, temos o lucro imediato Π, mais o valor da opção, tudo descontado no instante presente. Logo:

$$min\{\underbrace{-rV(x) + \mathcal{L}V(x) + \Pi(x)}_{\text{Continuar e não exercer}}, h(x)-V(x)\} = 0$$

Regiões de continuação e de paragem

- Exercer em $D = \{x : V(x) = h(x)\}$
- Continuar em $C = \{x : V(x) < h(x)\}$

Mas V é ainda desconhecido. Assim sendo, como definir estes conjuntos?

O problema

Equação HJB:
$\min\{-rV(x)+\mathcal{L}V(x)+\Pi(x), h(x)-V(x)\}=0$

- Resolver a EDO: $-rV(x)+\mathcal{L}V(x)+\Pi(x)=0$;
- Para termos solução única, necessitamos de condições fronteira.

Que condições fronteira? Onde está a fronteira???

Problema de fronteira livre

Teorema da verificação

$\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$é a solução do problema de optimização:

$$V(x) = \inf_{\tau \in S} E_x \left[\int_0^{\tau} e^{-rs} \Pi(X(s)) ds + e^{-r\tau} h(X(\tau)) \right]$$

se

- ν for de classe $C^1(\mathbb{R})$;
- ν for solução da HJB
- Para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} E[\nu(X(t))] = 0$$

Temos uma acção, cujo preço segue um GBM, e queremos decidir qual a devemos vender. Existe um custo fixo pela transação, a.

Quando vender?

- O lucro pela venda da acção (caso esta seja vendida no instante t) em valores actuais é $e^{-rt}(X(t)-a)$;
- A função valor é dada por

$$V(x)=\inf_{\tau\in S} E[e^{-r\tau}(a-X(\tau))|X(0)=x]$$

$(\Pi(x)=0; h(x)=a-x)$

- Como X segue um GBM, o seu gerador infinitesimal é $\mathcal{L}\nu(x) = \mu x \nu'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \nu''(x)$
- Na região de continuação:

$$\underbrace{-r\nu(x) + \mu x \nu'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \nu''(x)}_{\text{Equação de Cauchy-Euler de ordem 2}} = 0$$

e a sua solução é

$$\nu(x) = c_1 x^{\beta_1} + c_2 x^{\beta_2}, \quad x \in C$$

($\beta_1 > 1$ e $\beta_2 < 0$ são as raízes do polinómio característico)

- O nosso palpite é que $C = (0, x^*)$. Porquê?
- 3 incógnitas: c_1, c_2 and x^*
- Necessitamos de 3 condições, que vêm do teorema da verificação:
  - $\nu(x^*) = h(x^*) = a - x^*$
  - $\nu'(x^*) = h'(x^*) = -1$
  - $\nu(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Estratégia óptima de venda

$$V(x) = \begin{cases} (a - x^*) \left(\frac{x}{x^*}\right)^{\beta_1} & 0 < x < x^* = \frac{a\beta_1}{\beta_1 - 1} \\ a - x & x \geq x^* = \frac{a\beta_1}{\beta_1 - 1} \end{cases}.$$

Logo:

- Deixar a venda em stand-bye enquanto o preço da acção for inferior a x^*
- Assim que atingir x^*, vender a acção.

Processo estocástico

- X pode não seguir um GBM.
- O processo pode apresentar discontinuidades (usual em finanças).

Nestes casos encontrar a solução analítica da EDO pode ser complexo. Métodos numéricos podem ser necessários.

Função de lucro

- A função de lucro pode não ser monótona. Nesse caso pode ser difícil *adivinhar* a forma da região de continuação (pode ser não-conexa, por exemplo)
- Pode depender de outras variáveis (quantidade, subsídios, etc), envolvendo nesse caso várias etapas de optimização.

Outras questões

- Horizonte finito (e em consequência leva a uma EDP na HJB)
- Competição entre empresas (i.e., a empresa decide mas tendo necessidade de obter informação sobre o comportamento das outras empresas)
- Aprendizagem (à medida que o tempo passa, a empresa reúne mais informação sobre o processo de incerteza)

Decidir nem sempre é fácil!