22 Séculos a Medir Área

Miguel Abreu

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Seminário de Matemática - LMAC
IST-Alameda, 11 de Outubro de 2017

Introdução e Objectivos

Baseado numa vinheta Klein escrita em co-autoria com Ana Cannas da Silva para o Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa, que se insere no Klein Project da International Mathematical Union (IMU) e International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Dar explicação simpléctica para a fórmula

$$\text{Volume } B^{2n}(R) = \frac{\pi^n R^{2n}}{n!} = (2\pi)^n \cdot \frac{(R^2/2)^n}{n!} .$$

Nota: Volume $B^N(R) = \pi^{N/2} R^N / \Gamma(N/2+1)$.

Divulgar Projecto Klein, em particular as suas vinhetas.

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

"A área da superfície de uma esfera entre 2 planos paralelos que a intersectam depende apenas da distância entre esses planos e não da altura onde intersectam a esfera"

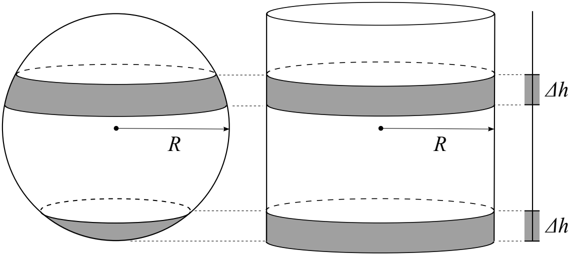


Figure: Faixas esféricas e cilíndricas com a mesma área.

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

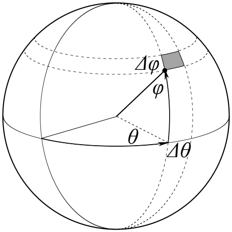


Figure: Longitude: $0 \leq \theta < 2\pi$; latitude: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Área aproximada do rectângulo sombreado:

altura $\times$ largura $\simeq (R \cdot \Delta\varphi)(R \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\theta) = \Delta\theta \cdot R^2 \cos\varphi \cdot \Delta\varphi$.

Área aprox. da faixa esférica entre os paralelos φ e $\varphi + \Delta\varphi$:

$$\text{área}_{\text{esf}} \simeq 2\pi R^2 \cos\varphi \cdot \Delta\varphi \,.$$

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

Como

$$\begin{aligned}\Delta h &= R \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) - R \cdot \sin\varphi \\ &= R \cdot (\sin\varphi \cdot \cos\Delta\varphi + \cos\varphi \cdot \sin\Delta\varphi) - R \cdot \sin\varphi \\ &= R \cdot \sin\varphi \cdot (\cos\Delta\varphi - 1) + R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\Delta\varphi\end{aligned}$$

e

$$\cos\Delta\varphi - 1 \simeq 0\,,\ \sin\Delta\varphi \simeq \Delta\varphi \quad \text{quando } \Delta\varphi \simeq 0,$$

temos que

$$\Delta h \simeq R \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi\,.$$

Logo

$$\text{área}_{\text{esf}} \simeq 2\pi R^2 \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi = 2\pi R \cdot \Delta h = \text{área}_{\text{cil}}\,.$$

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

Assim, o uso das coordenadas (h, θ) simplifica de forma significativa o cálculo da área de certas regiões esféricas.

Estas coordenadas são um primeiro exemplo de coordenadas de acção-ângulo, muito usadas em geometria simpléctica.

Em dimensão 2 a Geometria Simpléctica não é mais do que o estudo de transformações que preservam área. Este Teorema de Arquimedes pode ser considerado como o seu primeiro resultado.

Coordenadas de acção-ângulo para o círculo

$$h = \frac{1}{2}r^2 \quad \text{e} \quad \theta$$

com

$$\theta = \text{ângulo a partir de um semi-eixo do plano}$$
$$r = \text{distância à origem.}$$

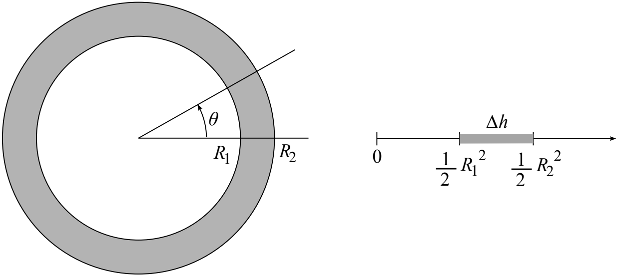


Figure: Em coordenadas de acção-ângulo, área de coroa circular $= 2\pi \cdot \Delta h$.

Coordenadas de acção-ângulo para $B^4 \subset \mathbb{R}^4$

$$(h_1 = {r_1}^2/2, \theta_1, h_2 = {r_2}^2/2, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$$

$$B^4(R) = \left\{ (h_1, \theta_1, h_2, \theta_2) \ : \ h_1 + h_2 \leq \frac{1}{2} R^2 \right\}$$

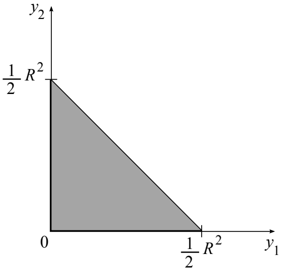
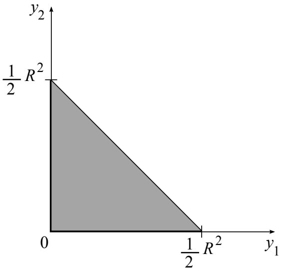


Figure: Triângulo que "codifica" a bola de raio R em dimensão 4.

Volume para $B^4 \subset \mathbb{R}^4$



$$\text{Volume } B^4(R) = (2\pi)^2 \times \text{área do triângulo sombreado}$$
$$= (2\pi)^2 \times \frac{(R^2/2)^2}{2}$$
$$= \frac{\pi^2 \cdot R^4}{2}$$

Coordenadas de acção-ângulo e volume para $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$(h_1 = {r_1}^2/2, \theta_1, \ldots, h_n = {r_n}^2/2, \theta_n) \in \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2n}$$

$$B^{2n}(R) = \left\{ (h_1, \theta_1, \ldots, h_n, \theta_n) \; : \; h_1 + \cdots + h_n \leq \frac{1}{2} R^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume } B^{2n}(R) &= (2\pi)^n \times \text{volume do } n\text{-simplex correspondente} \\ &= (2\pi)^n \times \frac{(R^2/2)^n}{n!} \\ &= \frac{\pi^n \cdot R^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

Projecto Klein

- Livros originais do Klein (recentemente traduzidos para português e publicados pela SPM)
- ICMI-IMU Klein Project: blog.kleinproject.org
- Projecto Klein de Matemática em Língua Portuguesa (Sociedade Brasileira de Matemática, ...) com colaboração da SPM: klein.sbm.org.br
- Vinhetas Klein