Slide 3: $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| = \dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}$

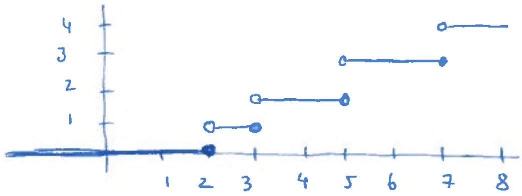
Fixando $\alpha > 1$ tem-se $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ para todo o $z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\}$. Uma vez que limites uniformes podem ser trocados com o integral ao longo de uma curva fechada conclui-se ~~que~~ do Teorema de Morera que um limite uniforme de funções holomorfas é holomorfa. Portanto

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{é holomorfa em } \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\}$$

Uma vez que α é arbitrário, a expressão para ζ define uma função holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1\}$

Slide 6: Gráfico de $\pi(x)$



É mais habitual enunciar a fórmula assintótica para $\pi(x)$ na forma

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

{ isto diz que a probabilidade de um número entre 0 e x ser primo é aproximadamente $\frac{1}{\log x}$. Por exemplo, se $x = 10000$ cerca de $\frac{1}{\log 10000} \sim 11\%$ dos números ≤ 10000 são primos.

Exercício (usar a regra de Cauchy)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{\log x}}{\int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt} = 1$$

No entanto, a diferença entre $\frac{x}{\log x}$ e $\int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$ tende para ∞ quando $x \to \infty$ e o integral logarítmico é uma aproximação muito melhor de $\pi(x)$.

Slide 8: Fórmula explícita para $\pi(x)$:

$$\pi_0(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\pi(x+h) + \pi(x-h)}{2} = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} f(x^{\frac{1}{n}})$$

onde $\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } p^2 \text{ divide } n \text{ para algum primo } p \\ (-1)^{\#\text{ fatores primos de } p} & \text{caso contrário} \end{cases}$

é a função de Möbius (muito utilizado em combinatória, o seu valor em n é a soma das raízes complexas de ordem n de 1 que são primitivas i.e $\mu(n) = \sum_{(k,d)=1} e^{2\pi i k/n}$)

e $$f(x) = li(x) - \sum_{\rho \text{ zero não trivial de } \zeta} li(x^\rho) - \log 2 - \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

e $$li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$$ ← valor principal de Cauchy, i.e. $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t}$

Slide 10: Mas...

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$$ muda de sinal infinitas vezes (Littlewood 1914)

O mais pequeno valor de x conhecido para o qual isto sucede é $\sim 10^{347}$

Sabe-se que a função não troca de sinal antes de $x = 10^{14}$

Slide 11: $\left|\frac{1}{p^z}\right| = \frac{1}{p^{\mathrm{Re}\, z}} < 1$ logo $\frac{1}{1-\frac{1}{p^z}} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \cdots$

$$\left(1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{3^{2z}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{5^{2z}}+\cdots\right)\cdots = 1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{2^z3^z}+$$
$$= \zeta(z)$$

(pela propriedade distributiva e pelo Teorema Fundamental da aritmética que diz que cada n se pode escrever de forma única como um produto de potências de primos)

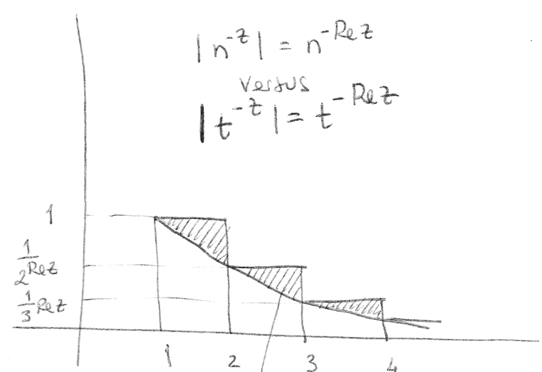
Note-se que se houver ∞s factores diferentes de 1, o produto é 0 e portanto não contribui para o resultado.

Por exemplo $\frac{1}{2^z}\cdot\frac{1}{3^z}\cdot\frac{1}{5^z}\cdots = 0.$

Slide 12 Suponhamos que $\mathrm{Re}\, z > 1$. Então

$$\int_1^{+\infty} t^{-z}\, dt = \frac{t^{-z+1}}{-z+1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-z} - \zeta(z) = \int_1^{\infty} t^{-z}\, dt - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} \left(t^{-z} - n^{-z}\right) dt}_{\phi_n(z)}$$



área ~~maior~~ muito mais pequena que a correspondente ao integral ou soma da série

$$|\phi_n(z)| \le \int_n^{n+1} |t^{-z} - n^{-z}|\, dt$$

$$|t^{-z} - n^{-z}| = \left|\int_n^t -z\, s^{-z-1}\, ds\right| \le |z| \int_n^t s^{-\mathrm{Re}\, z - 1}\, ds = \frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z}\, s^{-\mathrm{Re}(z)}\Big|_t^n$$

$$= \frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z}\left(n^{-\mathrm{Re}\, z} - t^{-\mathrm{Re}\, z}\right) = |z|\, s^{-\mathrm{Re}\, z - 1}(t-n)$$ para algum $s \in]n,t[$ (pelo T. Lagrange

$$\le |z|\, n^{-\mathrm{Re}\, z - 1}$$

Slide 12 (cont):

Como antes, da convergência das séries de Dirichlet conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z)$ converge uniformemente em qualquer região da forma

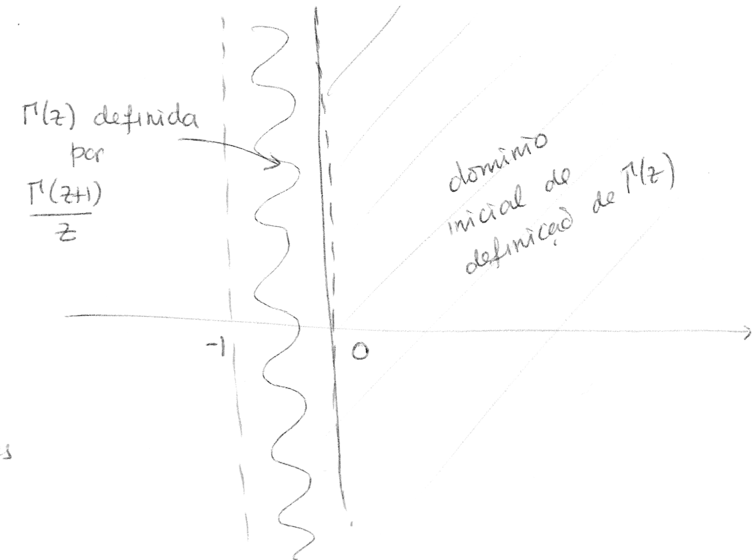
$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + 1 > \alpha\} \quad \text{com } \alpha > 1$$

e portanto a soma define uma função holomorfa

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z) \quad \text{na região} \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + 1 > 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

O prolongamento de uma função holomorfa é único porque duas funções holomorfas que coincidam num aberto do seu domínio são necessariamente iguais (porque os zeros das funções holomorfas não identicamente nulas são isolados).

Slide 13:



Para $z \sim 0$ a nova definição de $\Gamma(z)$ diz que

$$\Gamma(z) \sim \frac{\Gamma(1)}{z} = \frac{1}{z}$$

logo Γ tem um pólo simples em $z=0$ com resíduo 1.

Seguidamente podemos prolongar $\Gamma(z)$ à faixa $-2 < \operatorname{Re} z \leq 1$ pela equação $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$

Para $z \sim -1$ temos agora $\Gamma(z) \sim \frac{1}{-1}\Gamma(z+1) \sim -\frac{1}{z+1}$ logo Γ tem um polo de ordem 1 em $z=-1$ com resíduo -1.

Etc ...

Conclusão: $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\} \to \mathbb{C}$

Slide 14:

A equação funcional permite prolongar $\zeta(z)$ a $\operatorname{Re} z \leq 0$: De facto se $\operatorname{Re} z < 1$ o termo direito da igualdade é um produto de funções holomorfas em $1-z$, excepto ζ quando $z=0$ (notar que $\operatorname{Re}(1-z) > 0$ logo Γ e ζ são holomorfas em $1-z$, mas nesse ponto o polo simples de $\zeta(1-z)$ é cancelado pelo zero simples de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$)