Estruturas Geométricas da Física Moderna

João Pimentel Nunes

(Departamento de Matemática, IST)

NMATH, Jornadas de Matemática, IST 2015

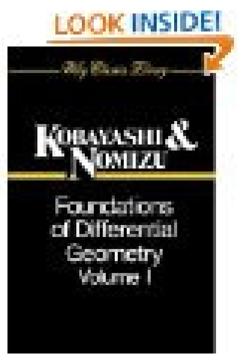
A Matemática e o Universo

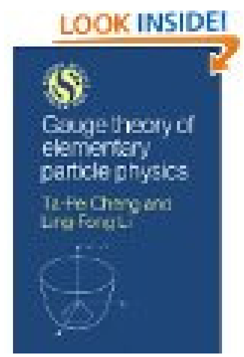
O Universo que nos rodeia tem estruturas muito diferentes a diferentes escalas. Desde as escalas mais pequenas (a escala subatómica do electrão, ou menor ainda) até às maiores escalas (as escalas astronómicas dos enxames de galáxias),
o Universo é descrito em LINGUAGEM MATEMÁTICA.

Muitas das ideias mais profundas da Matemática moderna são indispensáveis para a descrição do Universo. Por exemplo, no decorrer do Século XX, alguns físicos, que queriam descrever as interacções entre as partículas elementares, e alguns geometras motivados por problemas completamente diferentes, descobriram independentemente os mesmos conceitos e as mesmas fórmulas!

É frequente encontrarem-se alguns dos maiores teoremas da geometria moderna desempenhando papéis importantes na física microscópica!

Se formos às prateleiras da biblioteca central do IST encontramos, na secção de geometria, um livro clássico de geometria moderna; e na secção de física podemos também encontrar um excelente livro de física de partículas:



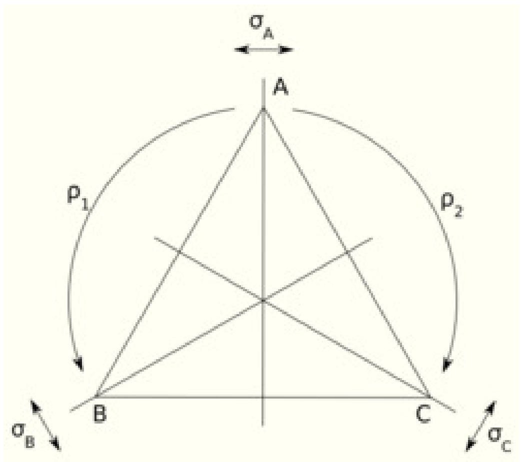


Se abrirmos as páginas destes dois livros, ambos bastante avançados, vamos encontrar as MESMAS FÓRMULAS! Extraordinário!

Para podermos descrever melhor as estruturas geométricas da física fundamental recordemos um dos conceitos mais importantes da álgebra: o de GRUPO.

O que é um grupo ?

O grupo de simetrias do triângulo é o conjunto formado pelas 6 operações que podemos efectuar sobre o triângulo transformando-o nele próprio: 3 rotações por $0^0, 120^0$ ou 240^0 e 3 reflexões relativas às diagonais do triângulo.



Se compusermos duas destas operações obtemos uma terceira operação do conjunto; a composição é associativa

$$O_1(O_2O_3) = (O_1O_2)O_3;$$

existe uma operação "identidade" (não fazer nada) e cada uma destas operações pode ser invertida. Um grupo é um conjunto de operações com estas propriedades.

Este grupo NÃO É COMUTATIVO! Por exemplo, rodar o triângulo 120^0 fazendo uma reflexão de seguida, não deixa os vértices do triângulo na mesma posição do que fazer primeiro a reflexão e depois a rotação.

O estudo das propriedades dos grupos é muito importante em Matemática! A estrutura da matéria está organizada em termos de propriedades de alguns grupos! Por exemplo, a Natureza seria muito diferente se todos os grupos fossem comutativos!!!

Representações de grupos

Uma representação (ρ, V) de um grupo G é um homomorfismo

$$\rho : G \to Aut(V),$$

onde V é um espaço vectorial, $\dim V = n$. Ou seja, a cada elemento de G atribuímos uma matriz $n \times n$, de forma a que o produto de dois elementos de G seja reproduzida pelo produto das matrizes correspondentes:

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2).$$

Exemplos

- Representação trivial $V = \mathbb{C}$, $\rho_{trivial}(g) = 1, \forall g \in G$.

- $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; $\rho_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$.

- $G = SU(2) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \bar{A}^T A = I_2, \det A = 1\}$; as representações "interessantes" de $SU(2)$ são dadas por $n \in \mathbb{N}_0$, com $\dim V_n = 2n + 1$.

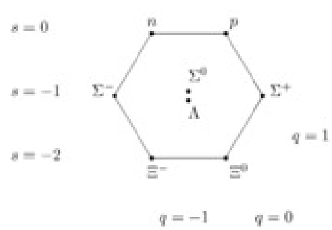
- $G = SU(3) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) : \bar{A}^T A = I_3, \det A = 1\}$; as representações "interessantes" de $SU(3)$ são dadas por $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Tem-se que $(0, 0)$ é a representação trivial; $\dim V_{(1,0)} = \dim V_{(0,1)} = 3$; $\dim V_{(1,1)} = 8$; $\dim V_{(3,0)} = 10$.

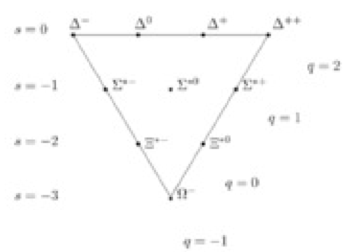
Os electrões sabem teoria de grupos ?

O protão e o neutrão, constituintes dos núcleos atómicos e responsáveis por grande parte da nossa massa, são formados por partículas mais pequenas, chamadas quarks. Concentremo-nos em 3 tipos de quarks: u, d, s. Existe uma simetria (aproximada) das forças nucleares, dada pelo grupo $SU(3)$, que consiste em "rodar" estes 3 tipos de quarks entre si.

As operações do grupo $SU(3)$ transformam as partículas alterando a sua composição em termos de quarks u, d, s. Por exemplo o protão $p = (uud)$ pode ser transformado num neutrão $n = (udd)$. Até à década de 1960, as partículas compostas por quarks (os hadrões) eram difíceis de "catalogar". Conheciam-se as suas massas, cargas e outras propriedades físicas, mas não parecia haver nenhum critério que explicasse esses parâmetros.

Até que os físicos (Gell-Mann) descobriram que essas partículas se arrumam segundo diagramas relacionados com representações do grupo $SU(3)$!!! Em particular, aparecem a $(1,1)$ e a $(3,0)$:





Na verdade, esta estrutura matemática é tão poderosa que permitiu prever a existência de algumas destas partículas antes da sua descoberta no laboratório! Mais ainda, os quarks foram descobertos/inventados exactamente devido a esta simetria $SU(3)$. Sim! As partículas elementares sabem teoria de grupos!

Os grupos entram de uma forma ainda mais profunda na descrição - geométrica - da física fundamental moderna. As partículas elementares, a força electromagnética e as forças nucleares fraca e forte são descritas por *teorias de gauge*. Estas, envolvem ideias da geometria diferencial moderna.

Para descrevermos estas teorias, foquemo-nos agora na teoria da relatividade e nas grandes escalas do Universo.

A teoria da Relatividade

Em 1905, Einstein formulou a teoria da relatividade restrita. Espaço e tempo são coordenadas do *espaço-tempo* de dimensão 4. Observadores diferentes medem tempos diferentes. O intervalo de espaço-tempo entre dois eventos $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$,

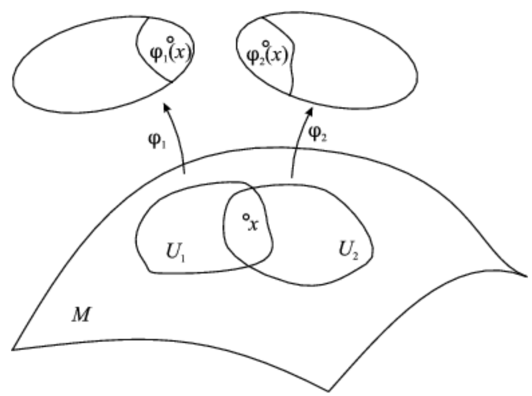
$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2, \;\; \Delta t = t_2 - t_1, \; \Delta x = x_2 - x_1$$

é invariante e igual para todos os observadores.

Em 1915, Einstein, num dos mais impressionantes feitos intelectuais da história da humanidade, formulou a teoria da relatividade geral. Em termos geométricos modernos, a teoria afirma que o Universo é uma variedade diferencial de dimensão 4, equipada com uma métrica Lorentziana.

Variedades diferenciais

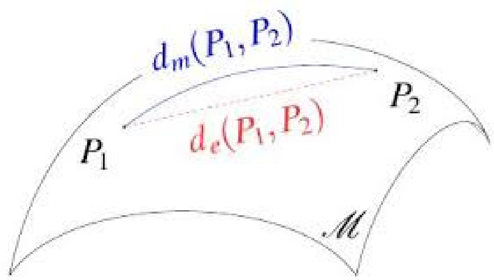
Uma variedade de dimensão n é um espaço topológico localmente "homeomorfo" a $\mathbb{R}^n$, tal que as mudanças de coordenadas locais são de classe C^∞ :



Em CDI-II já quase todos encontraram este conceito. Aí, falaram de variedades contidas em $\mathbb{R}^N$. No entanto, as variedades diferenciais podem, como acima, ser tratadas como espaços topológicos abstractos.

Geometria Riemanniana/Lorentziana

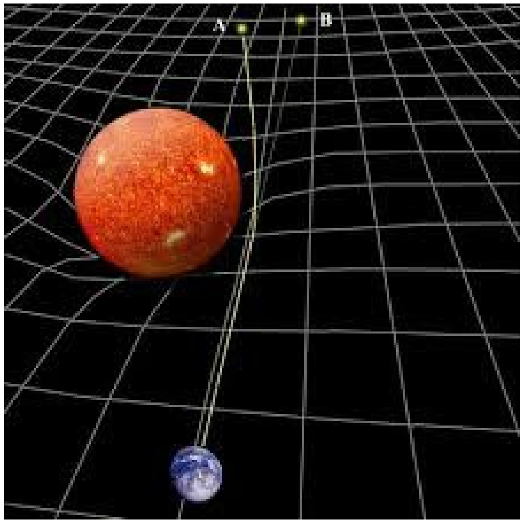
Na geometria Riemanniana, as variedades são equipadas com uma métrica: um produto interno definido positivo no espaço tangente em cada ponto:



Podemos então definir a distância entre dois pontos, e estudar geodésicas que são as curvas análogas das linhas rectas em geometria Euclidiana.

Na geometria Lorentziana, apropriada à relatividade, a métrica não é definida positiva, mas tem assinatura $(1, n-1)$.

A teoria da relatividade geral afirma que a distribuição de matéria no Universo determina esta métrica. Corpos em queda livre seguem geodésicas no espaço-tempo:



As equações de Einstein

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

permitem, em princípio, determinar a métrica g_{ij} sabendo-se a distribuição de matéria T_{ij}. R_{ij} e R são partes do tensor da curvatura. Na verdade, as equações de Einstein são um sistema não-linear de EDPs de análise muito difícil, com grande interesse matemático quer na análise quer na geometria.

Uma questão muito difícil é a da forma global, ou topologia, do Universo...

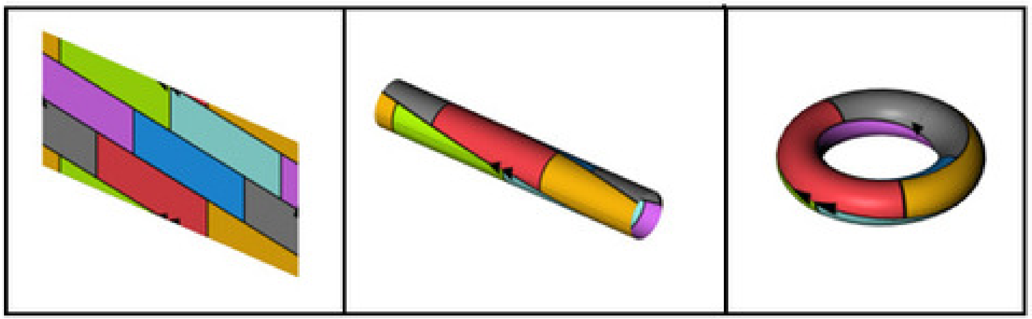
E as grandes escalas ?

Como vimos, a álgebra e a geometria são fundamentais na descrição do Universo às mais pequenas escalas. E nas grandes escalas ? Qual é a forma do Universo ?

... Ninguém sabe, e ninguém sabe se a porção de Universo que conseguimos observar com os mais potentes telescópios é apenas uma pequena parte do Universo... Será que o nosso Universo é limitado ?...

A Topologia, a disciplina matemática que estuda a “forma” dos espaços, sugere-nos algumas hipóteses divertidas...

Se o espaço que habitamos tivesse apenas duas dimensões talvez o nosso Universo fosse como a superfície de um donut:



Um raio de luz emitido de um ponto na superfície do donut acaba por dar um número infinito de voltas passando perto do lugar de onde partiu...

Será que vivemos no interior de um donut tri-dimensional de proporções gigantescas ?!

Voltemos às partículas elementares e às teorias de gauge. Começamos pela teoria de gauge mais simples (e que todos já conhecem: O ELECTROMAGNETISMO!

O Electromagnetismo

Recordem (ou fiquem a saber!) que o campo eléctrico E e magnético B se podem escrever em termos de potenciais, um campo escalar ϕ e um campo vectorial $A = (A_1, A_2, A_3)$:

$$E = -\nabla\phi - \partial_t A, \quad B = \nabla \times A.$$

No electromagnetismo clássico, escrever E, B em termos de (ϕ, A) é uma conveniência. Mas, na mecânica quântica isso é inevitável! Por exemplo, o efeito de Bohm-Aharonov mostra que A, e portanto também ϕ, têm significado físico. A relatividade mostra que ϕ e A se relacionam intimamente: devemos pensar em (ϕ, A) como um campo vectorial no espaço-tempo de dimensão 4.

Transformações de gauge

As equações anteriores não determinam (ϕ, A) unicamente. Se $\alpha(t, x)$ é um campo escalar no espaço-tempo, então

$$\tilde{\phi} = \phi - \partial_t \alpha, \quad \tilde{A} = A + \nabla_x \alpha$$

determinam os mesmos E, B.

Ou seja: ao definirmos (ϕ, A) temos uma liberdade imensa! Podemos escolher qualquer campo vectorial no espaço-tempo $\alpha(t, x)$ para alterar (ϕ, A).

Seja M a variedade do espaço-tempo. Na verdade, devemos pensar não em α mas, de forma equivalente, na função

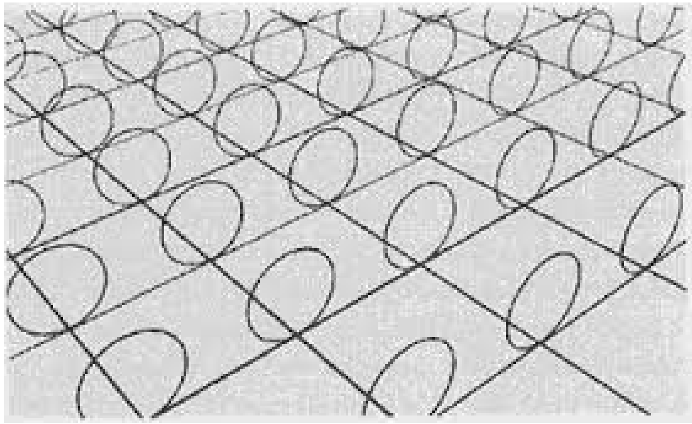
$$e^{i\alpha} : M \to U(1),$$

ou seja, a cada ponto do espaço-tempo podemos atribuir um elemento do grupo $U(1)$!

As transformações de gauge escrevem-se então na seguinte forma:

$$\tilde{\phi} = \phi + ie^{-i\alpha}\partial_t e^{i\alpha}, \quad \tilde{A} = A - ie^{-i\alpha}\nabla_x e^{i\alpha}.$$

O electromagnetismo é uma teoria de gauge associada ao grupo $U(1) \cong S^1$!



Atrás, vimos como Gell-Mann usou as representações de $SU(3)$ para classificar os hadrões. No electromagnetismo é o grupo $U(1)$ que aparece, mas de uma forma muito diferente!.

Teorias de gauge

No $SU(3)$ de Gell-Mann, podíamos escolher apenas um elemento de $SU(3)$ simultâneamente para todos os pontos do espaço-tempo M.

Numa teoria de gauge associada ao grupo G podemos, como vimos, escolher um elemento de G diferente para cada ponto do espaço-tempo M!

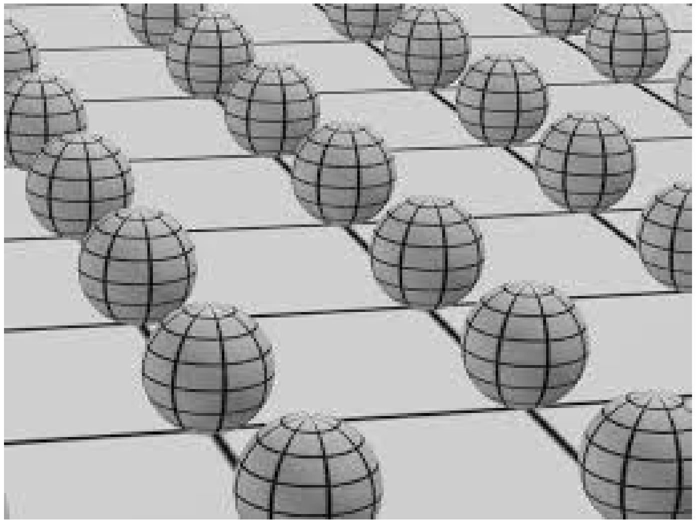
As forças electromagnética, nuclear fraca e nuclear forte são descritas (com enorme sucesso!) em termos de teorias de gauge associadas aos grupos $U(1), SU(2)$ e $SU(3)$ respectivamente.

As partículas são geometria

A estrutura matemática que acabámos de descrever chama-se fibrado principal. Localmente, um fibrado principal com grupo de estrutura G é da forma

$$U \times G,$$

onde $U \subset M$ é um pequeno aberto.



As partículas que transmitem as forças electromagnética e nucleares são: o fotão (força electromagnética), os bosões Z e W (a força nuclear fraca) e os gluões (força nuclear forte). Geometricamente, elas correspondem a conexões em fibrados principais, e sofrem transformações de gauge que generalizam as do electromagnetismo.

As partículas que interagem por meio destas forças são os leptões (que só sentem as forças electromagnética e nuclear fraca): electrão, muão, neutrinos, ... e os quarks que sentem as 3 forças.

Geometricamente, os leptões e os quarks são secções de fibrados vectoriais "associados" aos fibrados principais anteriores.

Fibrados vectoriais

Seja G um grupo e V uma representação. Dado um fibrado principal com grupo de estrutura G em M, podemos contruir um fibrado vectorial E de fibra V em M. Localmente, E é da forma

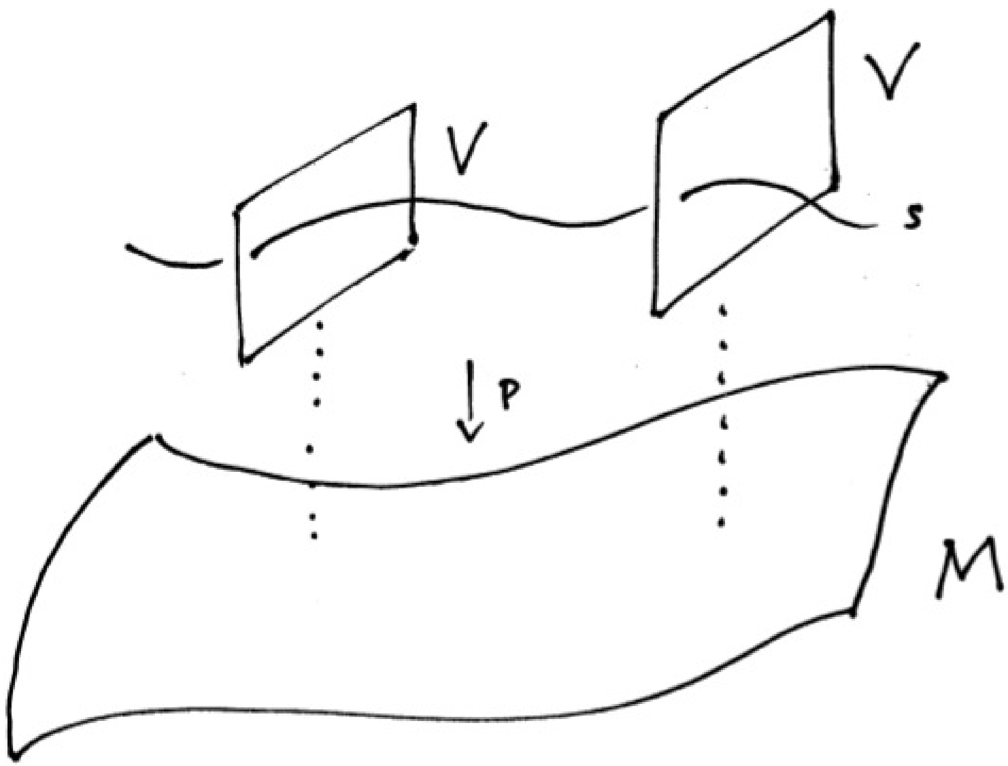
$$U \times V,$$

onde $U \subset M$ é um pequeno aberto. Existe uma projecção $p : E \to M$. Uma secção de E é uma aplicação

$$s : M \to E \text{ tal que } p \circ s = id_M.$$

Ou seja, para darmos uma secção damos para cada $(t, x) \in M$ um vector da cópia de V sobre o ponto (t, x).

Os fibrados vectoriais em variedades são fundamentais na geometria e topologia.



$E \xrightarrow{p} M$

Ingredientes para uma teoria de gauge

• Um espaço-tempo M.

• Um grupo (de Lie) G.

• Um fibrado principal com grupo de estrutura G em M. Este ingrediente caracteriza a força e as partículas que a transmitem, como o fotão no caso do electromagnetismo.

• Uma colecção de representações de G. Este ingrediente fornece fibrados vectoriais em M. As suas secções serão as partículas, como os leptões e os quarks, que interagem sob acção da força.

O modelo standard das partículas elementares

Uma das maiores conquistas intelectuais da humanidade foi descobrir que as partículas na Natureza interagem segundo uma teoria de gauge baseada no grupo

$$G = U(1) \times SU(2) \times SU(3).$$

Os quarks e leptões arrumam-se segundo uma lista, algo complicada, de representações de G.

Este modelo foi testado experimentalmente - com enorme sucesso - até à exaustão! A descoberta de qual o G correcto e de qual a lista de representações correcta - ou seja, quais as "doses" correctas de cada ingrediente, resultou (algures nos anos 70 do século XX) de dezenas de anos de trabalho por centenas de especialistas.

As teorias de gauge são extraordinariamente difíceis de resolver. ("Millenium Problems" do Clay Institute.) Quando G é não-comutativo, as partículas que transmitem a força (representadas por conexões nos fibrados) também interagem através ela, tornando a teoria extremamente não-linear. Os termos não-lineares estão cheios de conteúdo geométrico. Por contraste, o electromagnetismo ($G = U(1)$) é uma teoria linear, os fotões não chocam entre si. É possível identificar perfeitamente estes dois diagramas num livro de geometria diferencial!!!

Mas porquê ?!!!!!

Porquê teorias de gauge ? Porquê $G = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ e não outro grupo qualquer ?!! Porquê a lista particular de representações de G que observamos na Natureza ?! (Ou seja, porquê estas partículas e não outras ?!)

Ninguém sabe. Talvez a teoria de cordas dê, um dia, algumas respostas. A ideia é que a própria topologia global do espaço-tempo dê as respostas...Também aqui a linguagem é geométrica: superfícies de Riemann, variedades de Calabi-Yau, simetria espelho, invariantes de Gromov-Witten, ...

A Matemática em todas as coisas

As questões por responder são cada vez mais e é isso que torna interessante buscar as respostas. E as respostas contêm quase sempre MATEMÁTICA/GEOMETRIA, quer estejamos a estudar o átomo, a galáxia, a atmosfera, a sustentabilidade dos ecossistemas, a propagação de doenças, as cotações da bolsa ou as redes de telemóveis.