

# Espaços de configurações e aplicações

Roger Picken

Dep. Matemática, IST, 28 de outubro de 2020

# Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

# Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

- 1) uma configuração de dois segmentos articulados,
- 2) uma configuração de  $n$  pontos distintos num grafo  $\Gamma$ .

# Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

- 1) uma configuração de dois segmentos articulados,
- 2) uma configuração de  $n$  pontos distintos num grafo  $\Gamma$ .

Um grafo é um conjunto constituído por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

# Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

- 1) uma configuração de dois segmentos articulados,
- 2) uma configuração de  $n$  pontos distintos num grafo  $\Gamma$ .

Um grafo é um conjunto constituído por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

Vamos focar-nos no caso 2), onde escrevemos o espaço de configurações  $\mathcal{C}^n(\Gamma) = \Gamma^n \setminus \Delta$ . O subconjunto  $\Delta$  corresponde aos pontos não-distintos.

# Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

- 1) uma configuração de dois segmentos articulados,
- 2) uma configuração de  $n$  pontos distintos num grafo  $\Gamma$ .

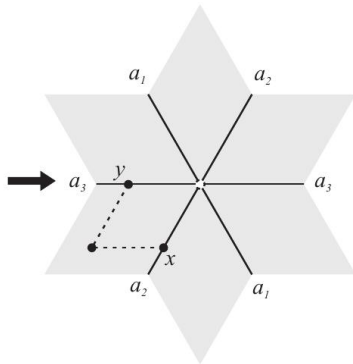
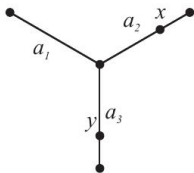
Um grafo é um conjunto constituído por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

Vamos focar-nos no caso 2), onde escrevemos o espaço de configurações  $\mathcal{C}^n(\Gamma) = \Gamma^n \setminus \Delta$ . O subconjunto  $\Delta$  corresponde aos pontos não-distintos.

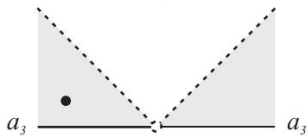
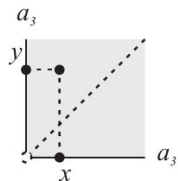
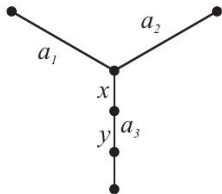
O objetivo é usar este espaço numa aplicação que é a coordenação de robôs. Para perceber a necessidade de coordenar robôs, vamos ver um filme ...

AGV Port of Rotterdam: [https://youtu.be/RdNb5vi\\_23Y](https://youtu.be/RdNb5vi_23Y)

$C^2(\Gamma)$  para  $\Gamma = Y_3$

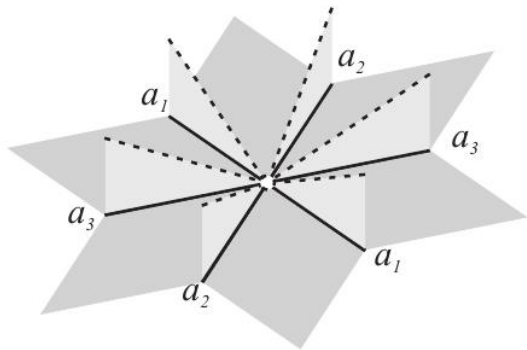


$C^2(\Gamma)$  para  $\Gamma = Y_3$

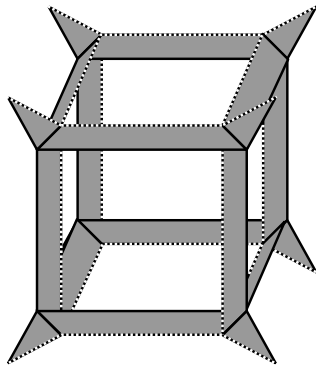
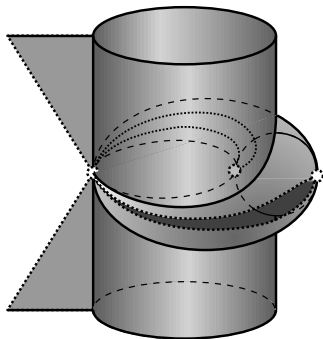




$\mathcal{C}^2(\Gamma)$  para  $\Gamma = Y_3$



$\mathcal{C}^2(\Gamma)$  para dois outros grafos  $\Gamma$



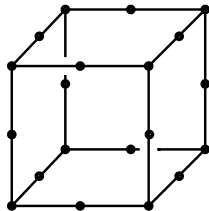
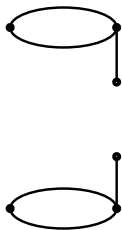
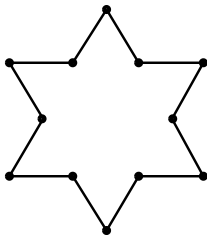
## O espaço de configurações discretizado $\mathcal{D}^n(\Gamma)$

Para entender melhor a estrutura dos espaços de configurações, vamos trabalhar com o espaço de configurações discretizado de  $n$  pontos no grafo  $\Gamma$ :

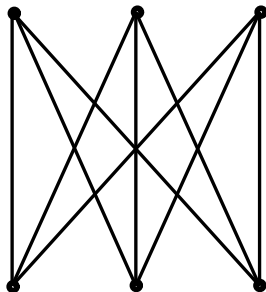
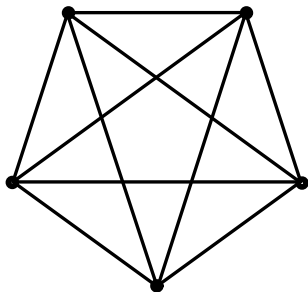
$$\mathcal{D}^n(\Gamma)$$

cujos elementos são as configurações com pontos separados por pelo menos uma aresta, ou seja qualquer caminho entre quaisquer dois pontos contém pelo menos uma aresta completa.

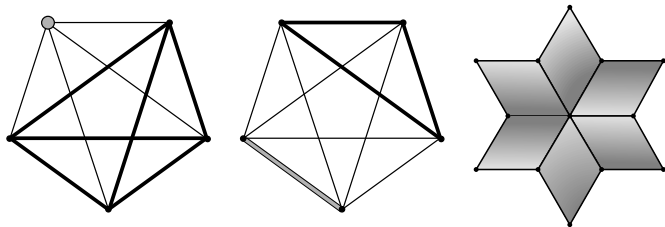
$\mathcal{D}^2(\Gamma)$  para os três grafos  $\Gamma$



# Os grafos $K_5$ e $K_{3,3}$



# Contagem das células para $K_5$



## Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

0 – cells	$5 \times 4$	20
1 – cells	$6 \times 5 \times 2$	60
2 – cells	$10 \times 3$	30

## Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$0 - \text{cells} \quad 5 \times 4 \quad 20$$

$$1 - \text{cells} \quad 6 \times 5 \times 2 \quad 60$$

$$2 - \text{cells} \quad 10 \times 3 \quad 30$$

$\mathcal{D}^2(K_5)$  é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de  $\mathcal{D}^2(K_5)$ ?



## Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$0 - \text{cells} \quad 5 \times 4 \quad 20$$

$$1 - \text{cells} \quad 6 \times 5 \times 2 \quad 60$$

$$2 - \text{cells} \quad 10 \times 3 \quad 30$$

$\mathcal{D}^2(K_5)$  é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de  $\mathcal{D}^2(K_5)$ ?

característica de Euler de  $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\chi = 20 - 60 + 30 = -10$$

## Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

0 – cells	$5 \times 4$	20
1 – cells	$6 \times 5 \times 2$	60
2 – cells	$10 \times 3$	30

$\mathcal{D}^2(K_5)$  é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de  $\mathcal{D}^2(K_5)$ ?

característica de Euler de  $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\chi = 20 - 60 + 30 = -10$$

género (genus) de  $\mathcal{D}^2(K_5)$ :

$$1 - \chi/2 = 6$$

# Representação de $\mathcal{D}^2(K_5)$

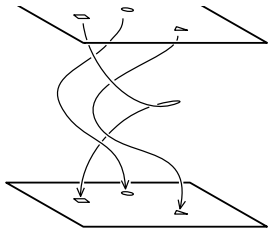
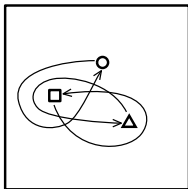


## Representação de $\mathcal{D}^2(K_5)$

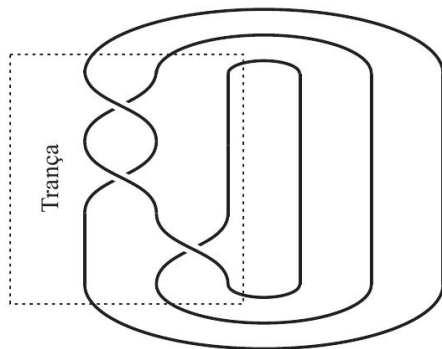


Exercício: Mostre que o género de  $\mathcal{D}^2(K_{3,3})$  é 4.

# Tranças



## Fecho de uma trança



É deformável em



# Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

# Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors

<https://youtu.be/6nUd-o0QUd4>



# Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors

<https://youtu.be/6nUd-o0QUd4>

A mesma dança ao vivo em Lyon

<https://youtu.be/cI0-dF02q1M>

# Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors

<https://youtu.be/6nUd-o0QUd4>

A mesma dança ao vivo em Lyon

<https://youtu.be/cI0-dF02q1M>

Projeto (alguém interessado?):

estudo topológico das figuras nas danças escocesas

(o estudo dinâmico já foi realizado por Maria Eusébio da LMAC)

# Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors

<https://youtu.be/6nUd-o0QUd4>

A mesma dança ao vivo em Lyon

<https://youtu.be/cI0-dF02q1M>

Projeto (alguém interessado?):

estudo topológico das figuras nas danças escocesas

(o estudo dinâmico já foi realizado por Maria Eusébio da LMAC)

definição de invariantes que captam entrelaçamentos superiores  
como em “reels de 3”

## Sistemas dinâmicos e linkages

Há ligações com os sistemas dinâmicos. Para o problema dos três corpos existem soluções estáveis que executam um “reel de 3”

Solução periódica estável do problema dos três corpos

<https://youtu.be/jKvnn1r-9Iw>

# Sistemas dinâmicos e linkages

Há ligações com os sistemas dinâmicos. Para o problema dos três corpos existem soluções estáveis que executam um “reel de 3”

Solução periódica estável do problema dos três corpos

<https://youtu.be/jKvnn1r-9Iw>

Watt's linkage: [https://youtu.be/Ef5Hshg\\_D2Y](https://youtu.be/Ef5Hshg_D2Y)

# Workshop: Aplicações da Topologia, IST 2015

<http://cmup.fc.up.pt/cmup/omgtp/2015/>

The image shows the cover of a book titled "Applications of Topology". The cover has a textured, abstract background with various geometric shapes and colors. At the top left, there is a logo for "40 ANOS" (40 Years) of the Faculty of Sciences of the University of Porto. To its right are the logos for "ift" (Instituto Superior Técnico) and "TÉCNICO LISBOA". Further right is the logo for "U PORTO FC FACULDADE DE CIÊNCIAS" (Faculty of Sciences of the University of Porto). The title "Applications of Topology" is prominently displayed in the center. Below the title, it says "Meeting in Lisbon Instituto Superior Técnico 4-7 Feb 2015". The authors and their topics are listed: Dmitry Feichtner-Kozlov (Bremen): Combinatorial Algebraic Topology and applications to Distributed Computing; Michael Farber (Queen Mary, London): Topological Robotics; Piotr Sułkowski (Warsaw): Random matrices, topological recursion, and applications of topology to biomolecules; Ulrich Bauer (IST Austria): Topological Data Analysis. At the bottom, it states "This is the XX1st edition of the series Oporto Meetings on Geometry, Topology and Physics." and provides the URL <http://cmup.fc.up.pt/cmup/omgtp/2015/>.

40 ANOS

ift TÉCNICO LISBOA

U PORTO FC FACULDADE DE CIÊNCIAS

## Applications of Topology

Meeting in Lisbon  
Instituto Superior Técnico  
4-7 Feb 2015

Dmitry Feichtner-Kozlov (Bremen):  
Combinatorial Algebraic Topology  
and applications to Distributed Computing

Michael Farber (Queen Mary, London):  
Topological Robotics

Piotr Sułkowski (Warsaw):  
Random matrices, topological recursion, and  
applications of topology to biomolecules

Ulrich Bauer (IST Austria):  
Topological Data Analysis

This is the XX1st edition of the series  
Oporto Meetings on Geometry, Topology and Physics.

<http://cmup.fc.up.pt/cmup/omgtp/2015/>

# Mini-cursos no encontro e outros temas atuais

Minicursos sobre aplicações da topologia em

- ▶ robótica, linkages
- ▶ ciência da computação
- ▶ biomoléculas
- ▶ análise de dados

Temas atuais:

- ▶ as estruturas topológicas no cérebro - analisando o grafo das interligações dos neurónios através de *persistent homology* etc.

# Mini-cursos no encontro e outros temas atuais

Minicursos sobre aplicações da topologia em

- ▶ robótica, linkages
- ▶ ciência da computação
- ▶ biomoléculas
- ▶ análise de dados

Temas atuais:

- ▶ as estruturas topológicas no cérebro - analisando o grafo das interligações dos neurónios através de *persistent homology* etc.
- ▶ Computação quântica topológica - usando partículas exóticas *anyons* em superfícies e tranças/danças feitas por elas



## Referências

A. Abrams and R. Ghrist,  
Finding topology in a factory: Configuration spaces,  
American Mathematical Monthly 109 (2) 140-150 (2002).  
<https://arxiv.org/pdf/math/0009118.pdf>

Daniela Pontes

Será possível encontrar topologia numa fábrica?  
Programa Novos Talentos em Matemática, 2006  
<http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~rpicken/students/daniela-pontes.pdf>

W. Basener

Topology and its Applications, Wiley 2006.

OBRIGADO!