Espaços de configurações e aplicações

Roger Picken

Dep. Matemática, IST, 28 de outubro de 2020

Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

2) uma configuração de n pontos distintos num grafo Γ.

Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

2) uma configuração de n pontos distintos num grafo Γ.

Um grafo é um conjunto constituido por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

2) uma configuração de n pontos distintos num grafo Γ.

Um grafo é um conjunto constituido por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

Vamos focar-nos no caso 2), onde escrevemos o espaço de configurações $\mathcal{C}^n(\Gamma) = \Gamma^n \setminus \Delta$. O subconjunto Δ corresponde aos pontos não-distintos.

Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

2) uma configuração de n pontos distintos num grafo Γ.

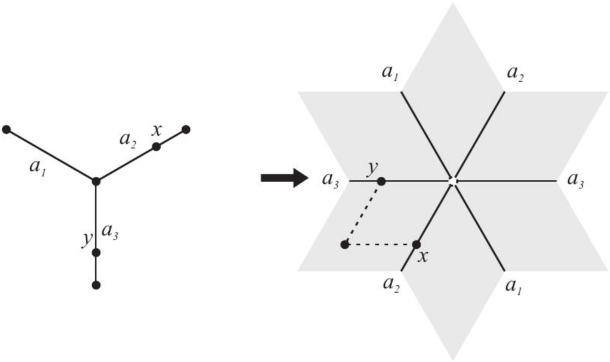
Um grafo é um conjunto constituido por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

Vamos focar-nos no caso 2), onde escrevemos o espaço de configurações $\mathcal{C}^n(\Gamma) = \Gamma^n \setminus \Delta$. O subconjunto Δ corresponde aos pontos não-distintos.

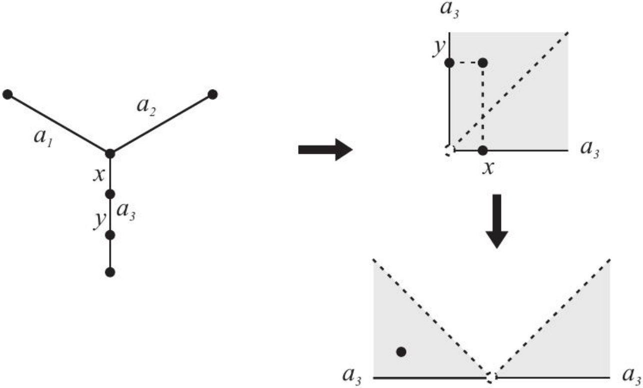
O objetivo é usar este espaço numa aplicação que é a coordenação de robôs. Para perceber a necessidade de coordenar robôs, vamos ver um filme ...

AGV Port of Rotterdam: `https://youtu.be/RdNb5vi_23Y`

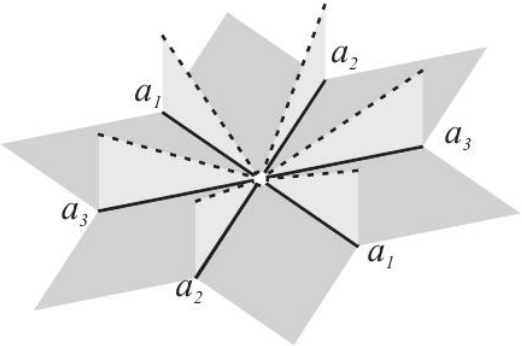
$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para $\Gamma = Y_3$



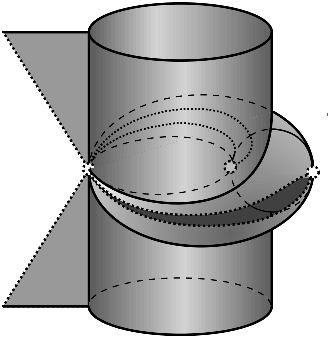
$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para $\Gamma = Y_3$

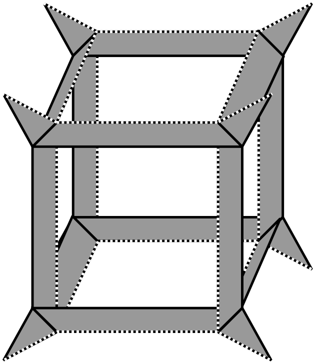


$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para $\Gamma = Y_3$



$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para dois outros grafos Γ





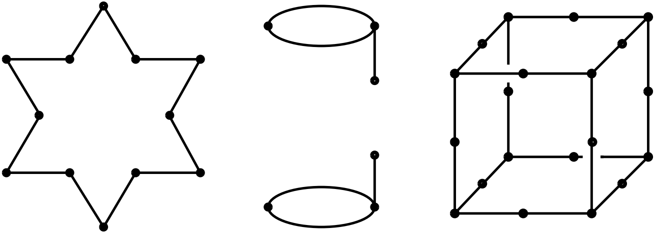
O espaço de configurações discretizado $\mathcal{D}^n(\Gamma)$

Para entender melhor a estrutura dos espaços de configurações, vamos trabalhar com o espaço de configurações discretizado de n pontos no grafo Γ:

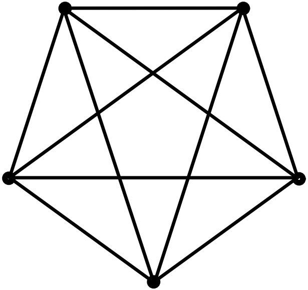
$$\mathcal{D}^n(\Gamma)$$

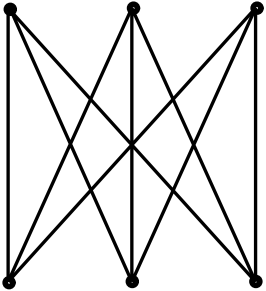
cujos elementos são as configurações com pontos separados por pelo menos uma aresta, ou seja qualquer caminho entre quaisquer dois pontos contém pelo menos uma aresta completa.

$\mathcal{D}^2(\Gamma)$ para os três grafos Γ

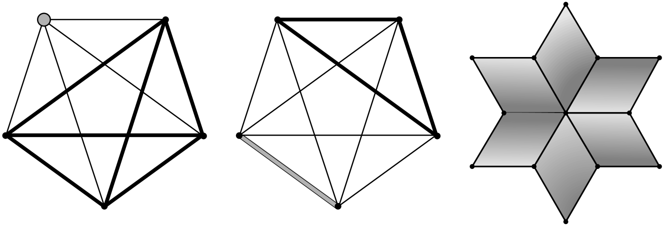


Os grafos K_5 e $K_{3,3}$





Contagem das células para K_5



Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$0-cells$	5×4	20
$1-cells$	$6 \times 5 \times 2$	60
$2-cells$	10×3	30

Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\begin{array}{lll} 0-\mathit{cells} & 5\times 4 & 20 \\ 1-\mathit{cells} & 6\times 5\times 2 & 60 \\ 2-\mathit{cells} & 10\times 3 & 30 \end{array}$$

$\mathcal{D}^2(K_5)$ é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de $\mathcal{D}^2(K_5)$?

Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\begin{array}{lll} 0-\textit{cells} & 5\times 4 & 20 \\ 1-\textit{cells} & 6\times 5\times 2 & 60 \\ 2-\textit{cells} & 10\times 3 & 30 \end{array}$$

$\mathcal{D}^2(K_5)$ é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de $\mathcal{D}^2(K_5)$?

caracteristica de Euler de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\chi = 20 - 60 + 30 = -10$$

Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\begin{array}{lll} 0-\mathit{cells} & 5\times 4 & 20 \\ 1-\mathit{cells} & 6\times 5\times 2 & 60 \\ 2-\mathit{cells} & 10\times 3 & 30 \end{array}$$

$\mathcal{D}^2(K_5)$ é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de $\mathcal{D}^2(K_5)$?

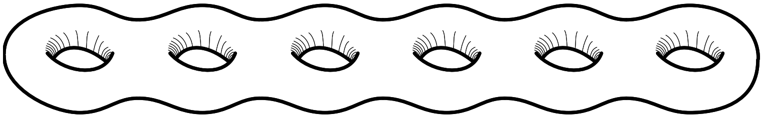
caracteristica de Euler de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\chi = 20 - 60 + 30 = -10$$

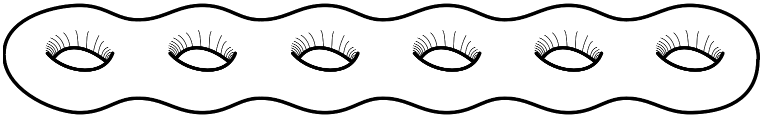
género (genus) de $\mathcal{D}^2(K_5)$:

$$1 - \chi/2 = 6$$

Representação de $\mathcal{D}^2(K_5)$

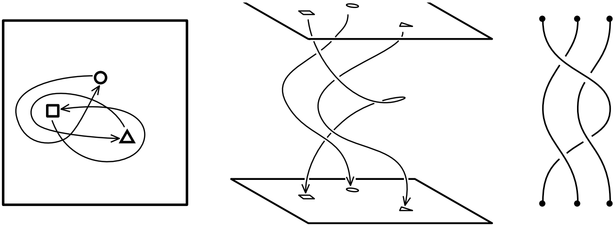


Representação de $\mathcal{D}^2(K_5)$

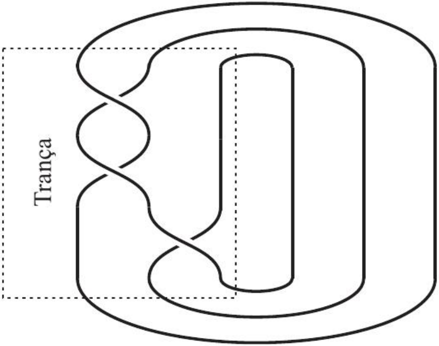


Exercicio: Mostre que o género de $\mathcal{D}^2(K_{3,3})$ é 4.

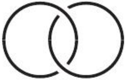
Tranças



Fecho de uma trança



É deformável em



Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors
`https://youtu.be/6nUd-oOQUd4`

Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors
https://youtu.be/6nUd-oOQUd4

A mesma dança ao vivo em Lyon
https://youtu.be/cIO-dF02q1M

Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors
`https://youtu.be/6nUd-oOQUd4`

A mesma dança ao vivo em Lyon
`https://youtu.be/cIO-dF02q1M`

Projeto (alguém interessado?):

estudo topológico das figuras nas danças escocesas

(o estudo dinâmico já foi realizado por Maria Eusébio da LMAC)

Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors
`https://youtu.be/6nUd-oOQUd4`

A mesma dança ao vivo em Lyon
`https://youtu.be/cIO-dF02q1M`

Projeto (alguém interessado?):

estudo topológico das figuras nas danças escocesas

(o estudo dinâmico já foi realizado por Maria Eusébio da LMAC)

definição de invariantes que captam entrelaçamentos superiores como em "reels de 3"

Sistemas dinâmicos e linkages

Há ligações com os sistemas dinâmicos. Para o problema dos três corpos existem soluções estáveis que executam um "reel de 3"

Solução periódica estável do problema dos três corpos
`https://youtu.be/jKvnn1r-9Iw`

Sistemas dinâmicos e linkages

Há ligações com os sistemas dinâmicos. Para o problema dos três corpos existem soluções estáveis que executam um "reel de 3"

Solução periódica estável do problema dos três corpos
`https://youtu.be/jKvnn1r-9Iw`

Watt's linkage: `https://youtu.be/Ef5Hshg_D2Y`

Workshop: Aplicações da Topologia, IST 2015

http://cmup.fc.up.pt/cmup/omgtp/2015/

Mini-cursos no encontro e outros temas atuais

Minicursos sobre aplicações da topologia em

- robótica, linkages
- ciência da computação
- biomoléculas
- análise de dados

Temas atuais:

- as estruturas topológicas no cérebro - analisando o grafo das interligações dos neurónios através de *persistent homology* etc.

Mini-cursos no encontro e outros temas atuais

Minicursos sobre aplicações da topologia em

- robótica, linkages
- ciência da computação
- biomoléculas
- análise de dados

Temas atuais:

- as estruturas topológicas no cérebro - analisando o grafo das interligações dos neurónios através de *persistent homology* etc.
- Computação quântica topológica - usando particulas exóticas *anyons* em superficies e tranças/danças feitas por elas

Referências

A. Abrams and R. Ghrist,
Finding topology in a factory: Configuration spaces,
American Mathematical Monthly 109 (2) 140-150 (2002).
https://arxiv.org/pdf/math/0009118.pdf

Daniela Pontes
Será possivel encontrar topologia numa fábrica?
Programa Novos Talentos em Matemática, 2006
http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~rpicken/students/daniela-pontes.pdf

W. Basener
Topology and its Applications, Wiley 2006.

OBRIGADO!