Espaços de configurações e aplicações

Roger Picken

Dep. Matemática, IST, 14 de novembro de 2018

Espaços de configurações

Um espaço de configurações é um espaço em que cada ponto representa uma configuração, por exemplo

1) uma configuração de dois segmentos articulados,

2) uma configuração de n pontos distintos num grafo Γ.

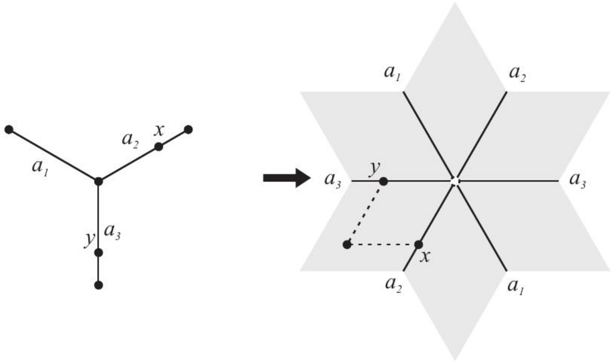
Um grafo é um conjunto constituido por vértices (pontos) e arestas (linhas) ligando os vértices.

Vamos focar-nos no caso 2), onde escrevemos o espaço de configurações $\mathcal{C}^n(\Gamma) = \Gamma^n \setminus \Delta$. O subconjunto Δ corresponde aos pontos não-distintos.

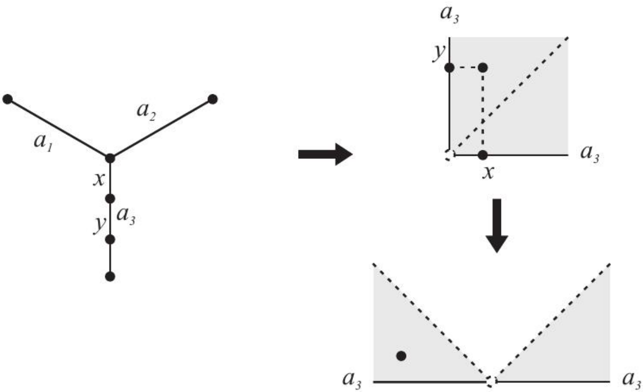
O objetivo é usar este espaço numa aplicação que é a coordenação de robôs. Para perceber a necessidade de coordenar robôs, vamos ver um filme ...

AGV Port of Rotterdam: `https://youtu.be/RdNb5vi_23Y`

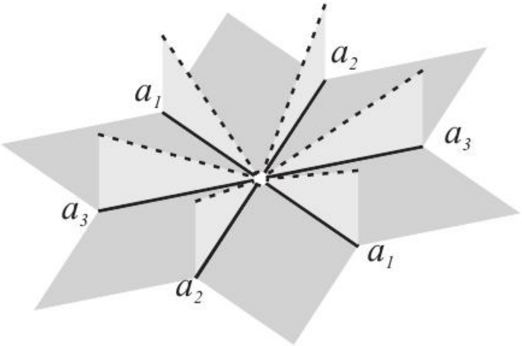
$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para $\Gamma = Y_3$



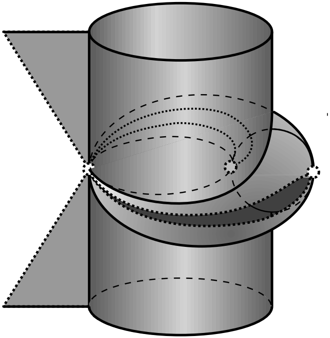
$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para $\Gamma = Y_3$

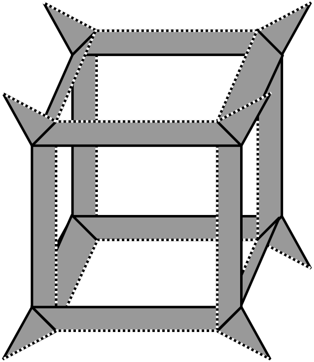


$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para $\Gamma = Y_3$



$\mathcal{C}^2(\Gamma)$ para dois outros grafos Γ





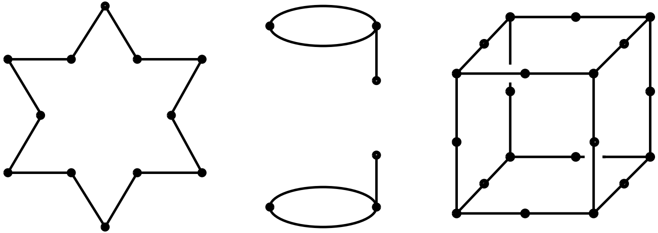
O espaço de configurações discretizado $\mathcal{D}^n(\Gamma)$

Para entender melhor a estrutura dos espaços de configurações, vamos trabalhar com o espaço de configurações discretizado de n pontos no grafo Γ:

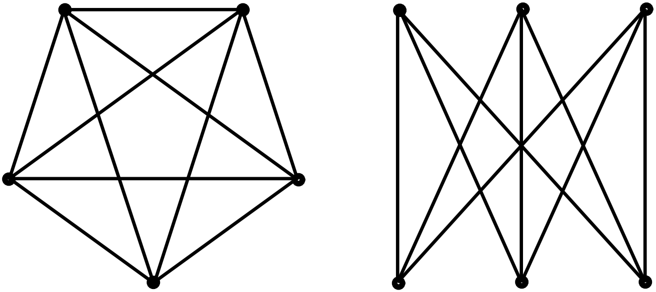
$$\mathcal{D}^n(\Gamma)$$

cujos elementos são as configurações com pontos separados por pelo menos uma aresta, ou seja qualquer caminho entre dois pontos contém pelo menos uma aresta.

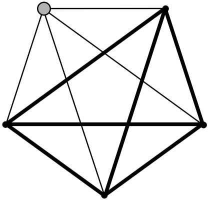
$\mathcal{D}^2(\Gamma)$ para os três grafos Γ

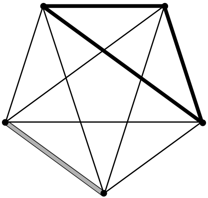


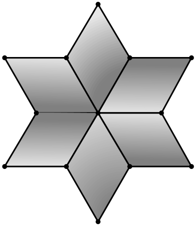
Os grafos K_5 e $K_{3,3}$



Contagem das células para K_5







Contagem das células de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\begin{array}{lll} 0 - \textit{cells} & 5 \times 4 & 20 \\ 1 - \textit{cells} & 6 \times 5 \times 2 & 60 \\ 2 - \textit{cells} & 10 \times 3 & 30 \end{array}$$

$\mathcal{D}^2(K_5)$ é variedade (admite-se orientável), porque cada 1-célula tem exatamente duas 2-células adjacentes.

Qual é o aspeto de $\mathcal{D}^2(K_5)$?

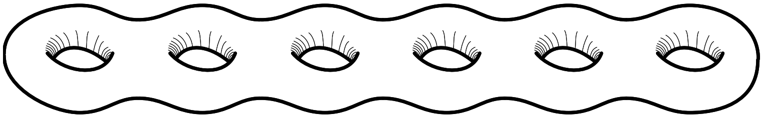
caracteristica de Euler de $\mathcal{D}^2(K_5)$

$$\chi = 20 - 60 + 30 = -10$$

género (genus) de $\mathcal{D}^2(K_5)$:

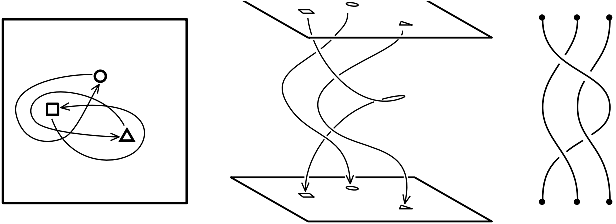
$$1 - \chi/2 = 6$$

Representação de $\mathcal{D}^2(K_5)$

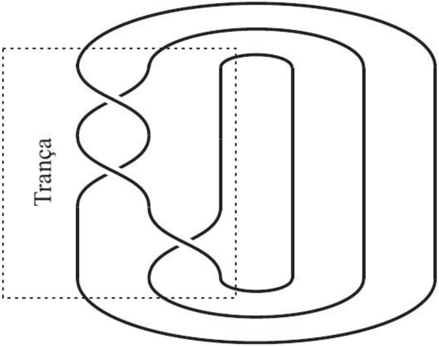


Exercicio: Mostre que o género de $\mathcal{D}^2(K_{3,3})$ é 4.

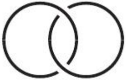
Tranças



Fecho de uma trança



É deformável em



Tranças e danças (escocesas!)

As figuras nas danças escocesas correspondem a tranças coloridas.

Dança escocesa - animação da dança De'il Amang the Tailors
`https://youtu.be/6nUd-oOQUd4`

A mesma dança ao vivo em Lyon
`https://youtu.be/cIO-dFO2q1M`

Projeto (alguém interessado?):

estudo topológico das figuras nas danças escocesas

definição de invariantes que captam entrelaçamentos superiores
como em "reels de 3"

Sistemas dinâmicos e linkages

Há ligações com os sistemas dinâmicos. Para o problema dos três corpos existem soluções estáveis que executam um “reel de 3”

Solução periódica estável do problema dos três corpos
`https://youtu.be/jKvnn1r-9Iw`

Watt’s linkage: `https://youtu.be/Ef5Hshg_D2Y`

Referências

A. Abrams and R. Ghrist,
Finding topology in a factory: Configuration spaces,
American Mathematical Monthly 109 (2) 140-150 (2002).
https://arxiv.org/pdf/math/0009118.pdf

Daniela Pontes
Será possivel encontrar topologia numa fábrica?
Programa Novos Talentos em Matemática, 2006
http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~rpicken/students/daniela-pontes.pdf

W. Basener
Topology and its Applications, Wiley 2006.

Eventos

XXIst Oporto Meeting on Geometry, Topology and Physics
IST, 4-7 fevereiro de 2015
`http://cmup.fc.up.pt/cmup/omgtp/2015/`

Mini-cursos no evento e tema do futuro

Minicursos sobre aplicações da topologia em

- robótica, linkages
- ciência da computação
- biomoléculas
- análise de dados

Tema do futuro: as estruturas topológicas no cérebro!

Procuram-se "cliques" (= maltas) e cavidades, com a teoria das redes neurais por perto.