

Vidência Matemática: saber o futuro através de equações diferenciais

Simão Correia

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

18 Novembro 2020



Problema: como prever o comportamento...

Problema: como prever o comportamento...
- de ondas marítimas?

Problema: como prever o comportamento...

- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?

Problema: como prever o comportamento...

- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?
- da distribuição de calor dentro de uma sala?

Problema: como prever o comportamento...

- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?
- da distribuição de calor dentro de uma sala?
- de uma tempestade tropical?

Problema: como prever o comportamento...

- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?
- da distribuição de calor dentro de uma sala?
- de uma tempestade tropical?
- do preço de um produto financeiro?

Links: Explosão, Ondas perfeitas, Colisão de ondas, Onda de choque em multidões, Onda de choque em tráfego, Fluido, Trajectória de uma tempestade

Num problema mais simples, como prever a queda livre de um objecto?



Segunda Lei de Newton

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Se $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ for a posição da partícula no instante t ,

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$$

↓
Evolução temporal

↓
Regra (obtida por considerações teóricas)

Se conhecermos as soluções desta equação, conseguimos prever o comportamento da partícula!

Devido à proeminência da variável temporal, é comum interpretar u como um caminho num espaço de funções:

$$t \mapsto u(t) \quad - \text{ função nas variáveis espaciais}$$

Para determinar a solução, será necessário saber qual é o seu valor no instante inicial

$$u \Big|_{t=0} = u_0 \quad - \text{ função inicial}$$

A escolha do espaço de funções é fulcral no estudo da EDP. É preciso conhecer as suas propriedades topológicas, saber como é que os espaços se relacionam entre si, como é que se define derivada nesses espaços...



Análise Funcional (disciplina da LMAC e do MMA)

Exemplos

- 1 Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Exemplos

- ① Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- ② Equação de reacção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u)$$

Exemplos

- ① Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- ② Equação de reacção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u)$$

- ③ Equação do transporte linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemplos

- 1 Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 2 Equação de reacção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u)$$

- 3 Equação do transporte linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

- 4 Equação de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemplos

1 Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Exemplos

- 1 Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- 2 Equação de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemplos

- 1 Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- 2 Equação de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

- 3 Equação de Schrödinger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + iV(x, t)u$$

Exemplos

- 1 Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- 2 Equação de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

- 3 Equação de Schrödinger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + iV(x, t)u$$

- 4 Equação de Schrödinger não-linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i|u|^2 u$$

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assintótico?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assintótico?
- Se explodir, como é que explode?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assintótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assintótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?
- A equação preserva alguma propriedade do dado inicial?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assintótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?
- A equação preserva alguma propriedade do dado inicial?
- Como é que simulo num computador a evolução da equação?

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assintótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?
- A equação preserva alguma propriedade do dado inicial?
- Como é que simulo num computador a evolução da equação?

Perante uma EDP, fazemos exactamente as mesmas perguntas!

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x, t) = u_0(x + ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos \rightarrow **Solução forte**

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x, t) = u_0(x + ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos → **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... → **Solução fraca**

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x, t) = u_0(x + ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos \rightarrow **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... \rightarrow **Solução fraca**

Ainda mais longe, dada uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ qualquer com $v(x, t) = 0$, $|(x, t)|$ grande,

$$0 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) v \, dxdt$$

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x, t) = u_0(x + ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos \rightarrow **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... \rightarrow **Solução fraca**

Ainda mais longe, dada uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ qualquer com $v(x, t) = 0$, $|(x, t)|$ grande,

$$0 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) v \, dxdt = - \iint u \left(\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} \right) \, dxdt$$

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x, t) = u_0(x + ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos \rightarrow **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... \rightarrow **Solução fraca**

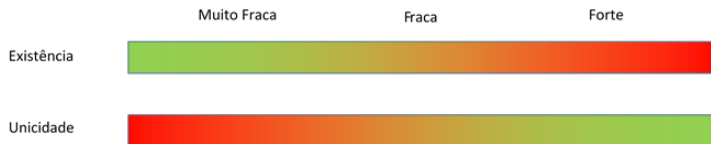
Ainda mais longe, dada uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ qualquer com $v(x, t) = 0$, $|(x, t)|$ grande,

$$0 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) v \, dxdt = - \iint u \left(\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} \right) \, dxdt$$

Basta que u seja integrável... \rightarrow **Solução muito fraca**

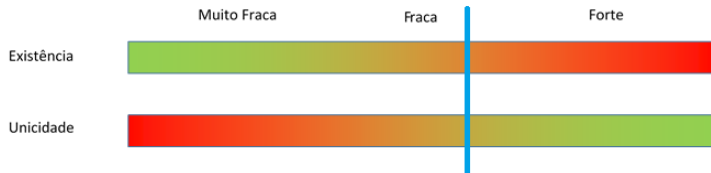
Que definição usar?

Cada definição de solução tem as suas vantagens e desvantagens...



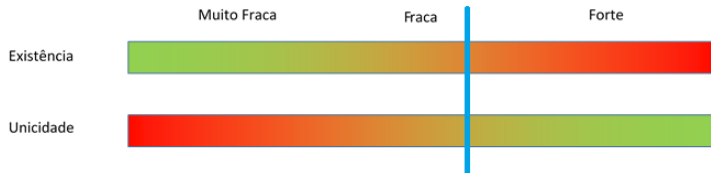
Que definição usar?

O mais importante é que seja possível mostrar simultaneamente existência e unicidade!



Que definição usar?

O mais importante é que seja possível mostrar simultaneamente existência e unicidade!



Um milhão de dólares para quem encontrar este ponto de equilíbrio para as equações de Navier-Stokes (que modelam fluidos incompressíveis)!

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Nos problemas não-lineares, estas propriedades deixam de ser triviais...

$$u'(t) = u(t), u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^t$$

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Nos problemas não-lineares, estas propriedades deixam de ser triviais...

$$u'(t) = u(t), \quad u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^t$$

$$u'(t) = u^2(t), \quad u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = (1/u_0 - t)^{-1}$$

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Nos problemas não-lineares, estas propriedades deixam de ser triviais...

$$u'(t) = u(t), \quad u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^t$$

$$u'(t) = u^2(t), \quad u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = (1/u_0 - t)^{-1}$$

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad u(0) = 0 \Rightarrow \text{Existem múltiplas soluções.}$$

Transporte vs. Burgers

Já vimos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

modela uma onda com velocidade c .

Então e a equação de Burgers?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Calor linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor com termos não-lineares

Calor linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor não-linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3$$

Calor com termos não-lineares

Calor linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor não-linear:

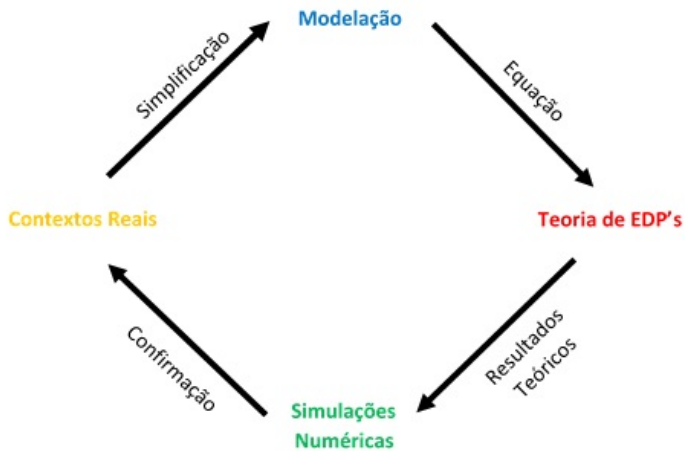
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3$$

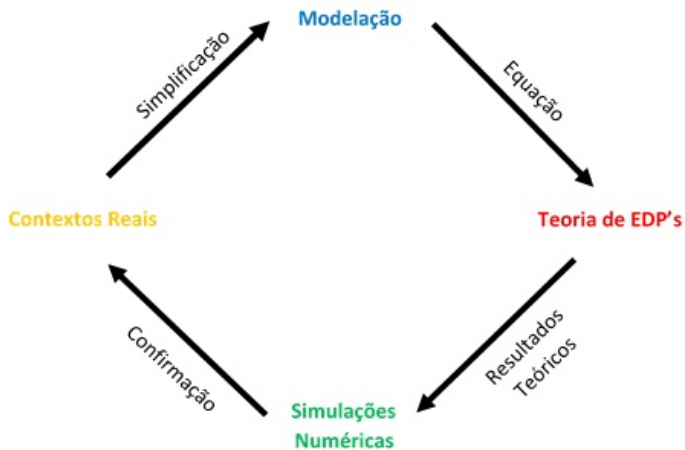
Então e se for

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3$$

- Não é possível obter uma teoria geral de EDP's: as equações têm comportamentos demasiado diferentes que dependem de
 - Número de derivadas
 - Tipo de não-linearidade
 - Número de variáveis espaciais
 - Sinais
 - ...

- Não é possível obter uma teoria geral de EDP's: as equações têm comportamentos demasiado diferentes que dependem de
 - Número de derivadas
 - Tipo de não-linearidade
 - Número de variáveis espaciais
 - Sinais
 - ...
- Trabalhando somente com a equação, temos de tentar descobrir o máximo que pudermos sobre as suas soluções





Obrigado pela vossa atenção!