Vidência Matemática: saber o futuro através de equações diferenciais

Simão Correia

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

13 Novembro 2019

Problema: como prever o comportamento...

Problema: como prever o comportamento...
- de ondas marítimas?

Problema: como prever o comportamento...
- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?

Problema: como prever o comportamento...
- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?
- da distribuição de calor dentro de uma sala?

Problema: como prever o comportamento...
- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?
- da distribuição de calor dentro de uma sala?
- de uma tempestade tropical?

Problema: como prever o comportamento...
- de ondas marítimas?
- de multidões dentro de recintos?
- da distribuição de calor dentro de uma sala?
- de uma tempestade tropical?
- do preço de um produto financeiro?

Links: Explosão, Ondas perfeitas, Onda de choque, Fluido, Trajectória de uma tempestade

Num problema mais simples, como prever a queda livre de um objecto?

$$\Downarrow$$

Segunda Lei de Newton

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

Se $x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ for a posição da partícula no instante t,

$$\begin{array}{ccc} mx''(t) & = & F(t, x(t), x'(t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Evolução temporal} & & \text{Regra (obtida por considerações teóricas)} \end{array}$$

Se conhecermos as soluções desta equação, conseguimos prever o comportamento da partícula!

Em sistemas mais complexos, a função desconhecida pode depender de mais variáveis...

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \vec{F}(t, x, u(x,t), \nabla_x u(x,t), \dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Evolução temporal} & & \text{Regra (obtida por considerações teóricas)} \end{array}}$$

Equação com derivadas parciais

Devido à proeminência da variável temporal, é comum interpretar u como um caminho num espaço de funções:

$$t \mapsto u(t) \quad - \text{ função nas variáveis espaciais}$$

Para determinar a solução, será necessário saber qual é o seu valor no instante inicial

$$u\Big|_{t=0} = u_0 \quad - \text{ função inicial}$$

A escolha do espaço de funções é fulcral no estudo da EDP. É preciso conhecer as suas propriedades topológicas, saber como é que os espaços se relacionam entre si, como é que se define derivada nesses espaços...

$$\Downarrow$$

Análise Funcional (disciplina da LMAC e do MMA)

Exemplos

1. Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Exemplos

1. Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. Equação de reacção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

Exemplos

1. Equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. Equação de reacção-difusão
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

3. Equação do transporte linear
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1. Equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. Equação de reacção-difusão
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

3. Equação do transporte linear
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Equação de Burgers
$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemplos

1. Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Exemplos

1. Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2. Equação de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemplos

1. Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2. Equação de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

3. Equação de Schrödinger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + iV(x,t)u$$

Exemplos

1. Equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2. Equação de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

3. Equação de Schrödinger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + iV(x,t)u$$

4. Equação de Schrödinger não-linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i|u|^2 u$$

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assimptótico?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assimptótico?
- Se explodir, como é que explode?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assimptótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assimptótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?
- A equação preserva alguma propriedade do dado inicial?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assimptótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?
- A equação preserva alguma propriedade do dado inicial?
- Como é que simulo num computador a evolução da equação?

Voltando às EDO's...

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x : [0, T] \to \mathbb{R}^N$$

Que questões é que devemos colocar?

- Existe uma solução? É única?
- Como é que a solução depende do dado inicial?
- A solução está definida para todo o $t > 0$ ou explode antes?
- Se for global, qual o comportamento assimptótico?
- Se explodir, como é que explode?
- Existem soluções periódicas? São estáveis?
- A equação preserva alguma propriedade do dado inicial?
- Como é que simulo num computador a evolução da equação?

Perante uma EDP, fazemos exactamente as mesmas perguntas!

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x,t) = u_0(x+ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos $\rightarrow$ **Solução forte**

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x,t) = u_0(x+ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos $\rightarrow$ **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... $\rightarrow$ **Solução fraca**

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x,t) = u_0(x+ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos $\rightarrow$ **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... $\rightarrow$ **Solução fraca**

Ainda mais longe, dada uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ qualquer,

$$0 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) v \; dxdt$$

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x,t) = u_0(x+ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos $\rightarrow$ **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... $\rightarrow$ **Solução fraca**

Ainda mais longe, dada uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ qualquer,

$$0 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) v \; dxdt \text{ “} = \text{” } - \iint u \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \; dxdt$$

Um caso fácil

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Então

$$u(x,t) = u_0(x+ct)$$

Se $u_0 \in C^1$, a equação é verificada em todos os pontos → **Solução forte**

A fórmula é válida se u_0 for somente contínua... → **Solução fraca**

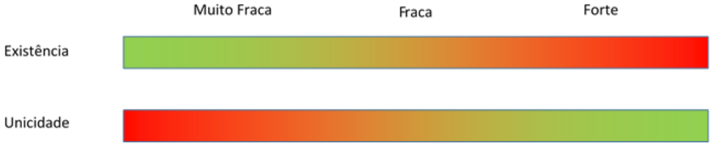
Ainda mais longe, dada uma função $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ qualquer,

$$0 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) v \; dxdt \text{ “ = ” } - \iint u \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \; dxdt$$

Basta que u seja integrável... → **Solução muito fraca**

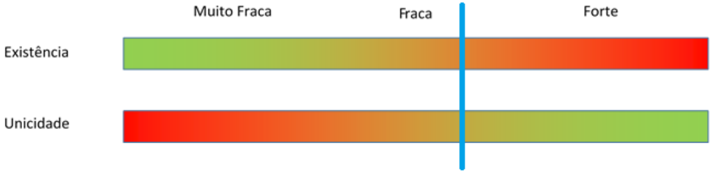
Que definição usar?

Cada definição de solução tem as suas vantagens e desvantagens...



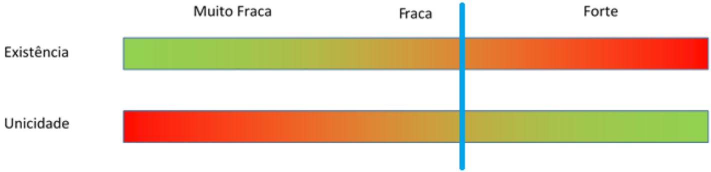
Que definição usar?

O mais importante é que seja possível mostrar simultaneamente existência e unicidade!



Que definição usar?

O mais importante é que seja possível mostrar simultaneamente existência e unicidade!



Um milhão de dólares para quem encontrar este ponto de equilíbrio para as equações de Navier-Stokes (que modelam fluidos incompressíveis)!

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Nos problemas não-lineares, estas propriedades deixam de ser triviais...

$$u'(t) = u(t), \; u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^t$$

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Nos problemas não-lineares, estas propriedades deixam de ser triviais...

$$u'(t) = u(t),\ u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^t$$

$$u'(t) = u^2(t),\ u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = (1/u_0 - t)^{-1}$$

Linear vs. Não-linear

Nos problemas lineares (na incógnita u), o comportamento das soluções é mais fácil de compreender. Tipicamente, dado um dado inicial, existe uma única solução da equação, que está definida para todo o tempo e com comportamento em $t = +\infty$ bem determinado. Em casos particulares, é possível encontrar fórmulas explícitas.

Nos problemas não-lineares, estas propriedades deixam de ser triviais...

$$u'(t) = u(t),\ u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^t$$

$$u'(t) = u^2(t),\ u(0) = u_0 \Rightarrow u(t) = (1/u_0 - t)^{-1}$$

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|},\ u(0) = 0 \Rightarrow \text{Existem múltiplas soluções.}$$

Transporte vs. Burgers

Já vimos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

modela uma onda com velocidade c.

Então e a equação de Burgers?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Calor com termos não-lineares

Calor linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor com termos não-lineares

Calor linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor não-linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3$$

Calor com termos não-lineares

Calor linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor não-linear:

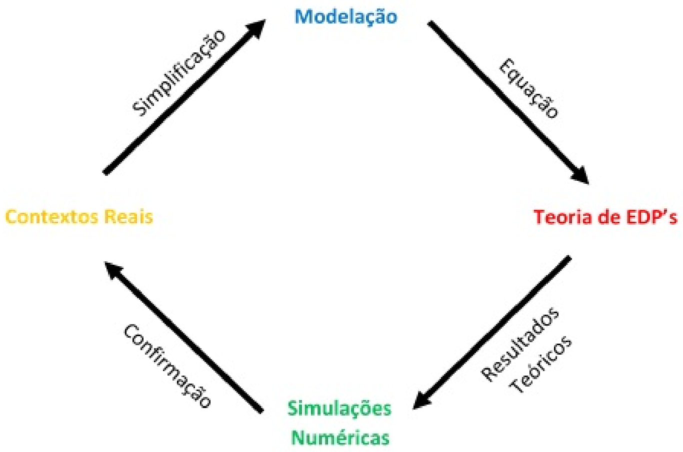
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3$$

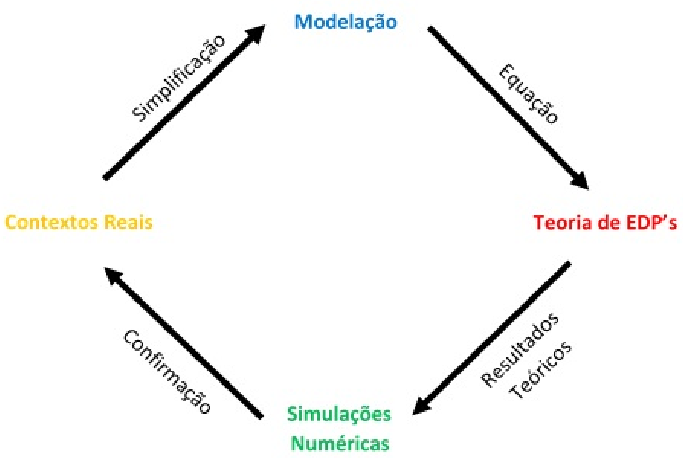
Então e se for

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3$$

- Não é possível obter uma teoria geral de EDP's: as equações têm comportamentos demasiado diferentes que dependem de
    - Número de derivadas
    - Tipo de não-linearidade
    - Número de variáveis espaciais
    - Sinais
    - ...

- Não é possível obter uma teoria geral de EDP's: as equações têm comportamentos demasiado diferentes que dependem de
    - Número de derivadas
    - Tipo de não-linearidade
    - Número de variáveis espaciais
    - Sinais
    - ...
- Trabalhando somente com a equação, temos de tentar descobrir o máximo que pudermos sobre as suas soluções


Modelação
Equação
Teoria de EDP's
Resultados Teóricos
Simulações Numéricas
Confirmação
Contextos Reais
Simplificação



Obrigado pela vossa atenção!