

Consideremos uma corda fixa nas extremidades

①



que se presta a vibrar (a corda de uma guitarra ou de um violino, por exemplo).

Um modelo simples para estas vibrações é o seguinte

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & t > 0, x \in (0, L) \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, & t > 0 \text{ (a corda está fixa)} \\ v(x, 0) = v_0(x) \\ v_x(x, 0) = v_1(x) \end{cases} \text{ estado inicial da corda (cond. iniciais)}$$

Se procurarmos soluções da forma  $e^{i\omega t} \varphi(x)$  obtemos

$$-\omega^2 e^{i\omega t} \varphi(x) = c^2 e^{i\omega t} \varphi''(x)$$

Como  $e^{i\omega t} \neq 0$ , a eq. resultante é

$$\boxed{c^2 \varphi''(x) + \omega^2 \varphi(x) = 0}$$

Por outro lado, as condições nos extremos da corda traduzem-se em  $e^{i\omega t} \varphi(0) = e^{i\omega t} \varphi(L) = 0$ . Mais uma vez, como  $e^{i\omega t} \neq 0$ , temos

$$\boxed{\varphi(0) = \varphi(L) = 0}$$

Queremos pois resolver a equação

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Quais as soluções desta equação, ou seja qual a função  $\varphi$  que multiplicada por um número positivo e somada à sua segunda derivada dá zero?

Qualquer função da forma

$$\varphi(x) = A \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

satisfaz a primeira equação em (A); mas queremos que também satisfaça a segunda (cond. fronteira).

$$0 = \varphi(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \Rightarrow A = 0.$$

Temos então que a solução se reduz a um seno, com uma amplitude arbitrária (que vamos tomar como sendo 1):

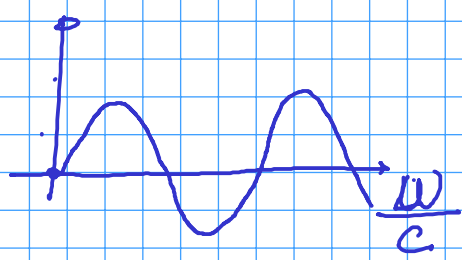
$$\boxed{\varphi(x) = \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}$$

Falta usar a segunda condição fronteira (em L):

$$\varphi(L) = \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)$$

Isto será zero se

$$\frac{\omega L}{c} = k\pi$$



$$\boxed{\omega = \frac{k\pi c}{L}}$$

$$\boxed{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \varphi(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Temos pois um número infinito mas contável de soluções que são linearmente independentes:

$$\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

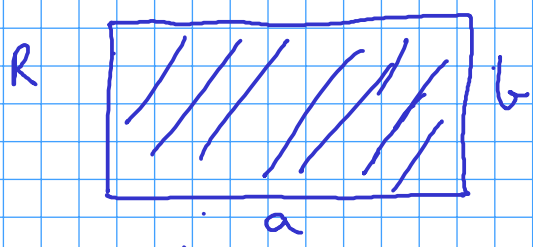
as quais correspondem as frequências  $\omega_k = \frac{k\pi c}{L}$ .

A frequência mais baixa, também conhecida pela frequência fundamental é a que dá a nota, e todas as outras são múltiplos inteiros dessa frequência:

$$\omega_1 < \omega_2 = 2\omega_1 < \omega_3 = 3\omega_1 < \dots$$

Vemos também que nota frequências fundamental diminui (fica mais grave) se o comprimento da corda aumenta.

III O que acontece quando passamos a duas dimensões? (3)



Suponhamos que temos uma membrana retangular, fixa no bordo. Depois de se proceder

à mesma passagem que no caso da corda para fazer "desaparecer" a variável  $t$ , obtemos agora a equação

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in R \\ u = 0, & (x,y) \in \partial R \end{cases} \quad (2)$$

onde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  é um operador diferencial que se chama o operador de Laplace ou o Laplaciano.

A equação (2) é uma equação às derivadas parciais, que são, em geral, muito mais difíceis de resolver que as equações ordinárias. No entanto, neste caso, e por uma variedade de razões, ainda é possível resolver esta equação pelo processo de separação de variáveis.

$u(x,y) = X(x)Y(y) \longrightarrow u(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

Então  $\Delta u = X''Y + XY''$

e, analogamente  $X(a) = 0$   
 $Y(0) = Y(b) = 0$

e  $X''Y + XY'' + \lambda XY = 0$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$

$\frac{X''}{X} + \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \sigma$  (pois tem de ser função de  $x$  e de  $y$  ao mesmo tempo)

Obtemos então duas equações

$$\begin{cases} X'' = (\sigma - \lambda) X \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \sigma Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

que são semelhantes à equação da corda:

(4)

$$\begin{cases} Y(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) & \text{que, substituindo na equação em } X, \\ \sigma_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{da } \begin{cases} X'' = \left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \lambda\right) X \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$$\boxed{\lambda_k = \pi^2 \left( \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Coloca-se agora a questão de saber qual a relação entre  $k$  e o par  $(m, n)$ .

1º problema Qual é a frequência fundamental?

Deveremos tomar  $m$  e  $n$  o mais pequenos que seja possível

$$\lambda_1 = \pi^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \quad (f = \sqrt{\lambda_1})$$

Uma primeira observação é que, fazendo  $a$  e  $b$  grandes, podemos obter uma frequência fundamental tão pequena quanto quisermos. Mas se só fizermos uma das dimensões aumentar, não vamos conseguir fazer a frequência fundamental ir para zero! Por outro lado, o problema de tomar as frequências tão pequenas quanto quisermos não faz sentido se fixarmos a área, por exemplo (pensem no problema de determinar o rectângulo com o menor perímetro; isto só faz sentido se a área estiver fixa)

Problemas em que se tem um objecto geométrico e se pretende minimizar/maximizar uma das suas medidas quando se mantém outra fixa, chamam-se

## Problemas isoperimétricos

(5)

Encontrando a área do rectângulo igual a  $\pi^2$ , qual o rectângulo que tem a frequência fundamental mais baixa? Fazamos  $a = \pi/t$ ,  $b = \pi t$ . Então

$$\lambda_1 = \pi^2 \left( \frac{1}{\pi^2 t^2} + \frac{t^2}{\pi^2} \right) = \frac{1}{t^2} + t^2$$

Este função tem um mínimo global em  $t = 1$  (quadrado)

Uma outra forma de ver este problema

A forma geral dos valores próprios é, no caso em que fixamos a área,

$$\lambda_n = \frac{m^2}{t^2} + n^2 t^2, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Qual é o segundo valor próprio?

$$\lambda_2 = \min \left\{ \frac{1}{t^2} + 4t^2, \frac{4}{t^2} + t^2 \right\}$$

$$\text{Se } t \leq 1, \lambda_2 = \frac{1}{t^2} + 4t^2; \text{ se } t > 1, \lambda_2 = \frac{4}{t^2} + t^2.$$

Aqui podemos eventualmente dizer que assumimos  $t \geq 1$ , por exemplo, sem perda de generalidade. Mas se continuarmos com  $\lambda_3, \lambda_4$ , etc. o problema complica-se.

Para se convencer disso, podem fazer os gráficos das funções  $\frac{m^2}{t^2} + n^2 t^2$  para  $m, n = 1, 2, 3, \dots, 10$ , por

exemplo...

Exercício Provar que o mínimo de  $\lambda_2$  é atingido para  $t = 2^{\pm 1/2}$  e o de  $\lambda_3$  é atingido no quadrado ( $t=1$ ).

Haverá mais casos em que o quadrado seja um minimizador?

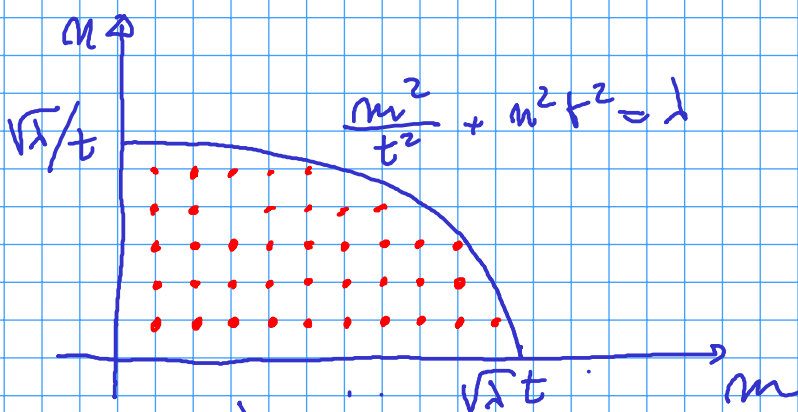
Uma vez que o problema de determinar  $\lambda_k$  exatamente parece ser extremamente complicado, poderemos pensar em obter uma solução aproximada para  $k$  grande. Queremos estudar o comportamento de

$$\lambda_k = \frac{m^2}{t^2} + m^2 t^2$$

A nossa intuição diz-nos que  $\lambda_k$  deve crescer mais depressa, ou não, - ou mais devagar que no caso da corda? Assim também  $\lambda_k$  proporcional a  $k^2$ . E agora?

A equação 
$$\frac{m^2}{t^2} + m^2 t^2 = \lambda$$

é a equação de uma elipse no plano  $m, m$ :



O número de pontos com coordenadas inteiros dentro da elipse (no 1º quadrante) determina a ordem do valor próprio!

Por outro lado, cada ponto a vermelho corresponde a um quadrado de lado 1 que está contido na elipse!

Temos pois que

$$\frac{1}{4} A_2 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\lambda_k} t \cdot \frac{\sqrt{\lambda_k}}{t} = \frac{\pi \lambda_k}{4}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$k \quad \longrightarrow \quad \boxed{\lambda_k \approx \frac{4k}{\pi}}$$

Por outro lado

$$\frac{\pi \lambda}{4} = \frac{1}{4} A_c \leq k + \sqrt{\lambda} t + \frac{\sqrt{\lambda}}{t}$$

$$\lambda \leq \frac{4k}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left( t + \frac{1}{t} \right) \sqrt{\lambda}$$

$$\lambda \leq \frac{4k}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} P \sqrt{\lambda}$$

$$\lambda - \frac{2P}{\pi^2} \sqrt{\lambda} - \frac{4k}{\pi} \leq 0$$

$$\frac{P}{\pi^2} - \sqrt{\frac{P^2}{\pi^4} + \frac{4k}{\pi}} \leq \sqrt{\lambda} \leq \frac{P}{\pi^2} + \sqrt{\frac{P^2}{\pi^4} + \frac{4k}{\pi}}$$

$$\lambda \leq \frac{P^2}{\pi^4} + \frac{P^2}{\pi^4} + \frac{4k}{\pi} + \frac{2P}{\pi^2} \sqrt{\frac{P^2}{\pi^4} + \frac{4k}{\pi}}$$

$$\lambda \leq \frac{4k}{\pi} + \frac{2P}{\pi^2} \sqrt{\frac{P^2}{\pi^4} + \frac{4k}{\pi}} + \frac{2P^2}{\pi^4}$$

Temos pois

$$\frac{4k}{\pi} \leq \lambda_k \leq \frac{4k}{\pi} + \frac{2P}{\pi^2} \sqrt{\frac{P^2}{\pi^4} + \frac{4k}{\pi}} + \frac{2P^2}{\pi^4}$$

Dividindo por  $k$

$$\frac{4}{\pi} \leq \frac{\lambda_k}{k} \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2P}{k\pi^2} \sqrt{\frac{P^2}{\pi^2} + \frac{4k}{\pi}} + \frac{2P^2}{k\pi^4}$$

e fazendo  $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k \approx \frac{4k}{\pi} + o(k)$$

(7)

$$\text{Lado } \pi t \text{ e } \frac{\sqrt{\lambda}}{t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P = 2\pi t + \frac{2\pi}{t}$$
$$= 2\pi \left( t + \frac{1}{t} \right)$$

Há várias direções que se podem tomar a partir daqui: (8)

1. Lei de Weyl

J. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, Pure and applied mathematics 115, Academic Press. [Capítulo II, seção 3]

2. Conjectura de Pólya

G. Pólya, On the eigenvalues of vibrating membranes, Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), 419-433.

(+ avançado) P. Li e S.T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, Comm. Math. Phys. 88 (1983), 309-318.

3. Determinar o comportamento assintótico dos extremos

P.R.S. Athreya e P. Freitas, Optimal spectral rectangles and lattice ellipses, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 469 (2013), no. 2150, 20120492, 15 p.

B. Coltris e A. El Soufi, Entremal eigenvalues of the Laplacian on Euclidean domains and closed surfaces, Math. Z. 278 (2014), 529-546.

4. O problema do círculo de Gauss.

B.C. Berndt, S. Kim e A. Zaharescu, The circle problem of Gauss and the divisor problem of Dirichlet - Still unresolved, Amer. Math. Monthly 125 (2018), 99-114.