Ondas de choque e engarrafamentos fantasma

Juha Videman

Seminário de Matemática, IST, 18 de Dezembro, 2019

Onda progressiva

- Seja u uma função real de duas variáveis reais $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ dada por

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e c é uma constante não nula.

- a função u representa uma *onda progressiva*.
- se $c > 0$ o perfil inicial $u(x,0) = f(x)$ propaga-se, com velocidade constante c, no sentido positivo do eixo x.
- u satisfaz a equação das ondas

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

Onda progressiva

- a solução geral para a equação das ondas é da forma

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)\,,$$

onde F e G são funções (arbitrárias) de classe C^2.

- de facto, é fácil ver que

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2\big(F''(x-ct) + G''(x+ct)\big) = c^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2}\,.$$

Onda progressiva

Exemplos:

- uma onda periódica $u(x,t) = \cos(x + 4t)$;
- uma onda estacionária $u(x,t) = 2\cos 4t \cos x$;
- uma frente $u(x,t) = \arctan(\exp(x - 6t))$;
- um pulso $u(x,t) = \exp(-(x - 4t)^2$;
- uma onda de choque

$$u(x,t) = \begin{cases} 50 & , \quad x < -30t \\ 150 & , \quad x \geq -30t \end{cases}$$

Onda progressiva

- pode-se procurar soluções de onda progressiva para outras equações diferenciais.
- por exemplo, a função (uma onda progressiva chamada *solitão*)

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right], \qquad c>0\,,$$

satisfaz a equação de Korteweg-deVries:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0\,, \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots\,.$$

Modelação do escoamento de tráfego

- seja Q o número de carros num troço de estrada S com sentido único e com apenas uma faixa.
- seja $u(x,t)$ a densidade de carros (número de carros/km) na posição x no tempo t.
- Q pode variar em $S = [a,b]$ devido a :
  - entrada (ou saída) de veículos através dos extremos a (ou b);
  - criação ou remoção de veículos ao meio de S.

Modelação do escoamento de tráfego

- Seja $\phi(x,t)$ uma *função fluxo* que representa a taxa (nrº de carros por unidade de tempo) com que os carros passam na posição x no instante t.
- Seja $f(x,t)$ uma *função fonte* que descreve a taxa (nrº de carros por unidade de tempo e por km) com que os carros são adicionados ou removidos em S.

A taxa de variação de Q em S é assim

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)\,dx\,.$$

Modelação do escoamento de tráfego

Assumindo que u_t e ϕ_x são contínuas, obtém-se uma *lei de conservação*:

$$\int_a^b \left(u_t(x,t) + \phi_x(x,t) - f(x,t)\right) dx = 0\,,$$

ou na forma diferencial

$$u_t(x,t) + \phi_x(x,t) = f(x,t)\,.$$

- esta equação contém duas funções incógnitas, u e ϕ; supondo que a função fonte f é conhecida.
- para relacionar u com ϕ, precisamos de uma *equação constitutiva*, tipicamente da forma $\phi = \phi(u)$.

Modelação do escoamento de tráfego

- o fluxo ϕ depende não só da densidade de tráfego u (carros/km) mas também da sua velocidade v (km/h).
- assim, o fluxo (carros/hora) é dado por:

$$\phi = u\, v\,.$$

- assumindo que a velocidade depende linearmente da densidade u, pode-se considerar o modelo

$$\phi(u) = u\left(v_{\max} - \frac{v_{\max}}{u_{\max}}u\right) = v_{\max}\left(u - u^2/u_{\max}\right), \quad 0 \le u \le u_{\max}\,,$$

onde

  - $v_{\max}$ é a velocidade máxima obtida quando u é nula (ou quase nula);
  - $u_{\max}$ é a densidade máxima atingida quando o tráfego estiver parado.

Modelação do escoamento de tráfego

Supondo que ao longo de S não há entradas nem saídas ($f(x,t) = 0$), obtém-se a equação

$$u_t + \phi_x = u_t + v_{\max}(1 - 2u/u_{\max})u_x = 0\,.$$

Vamos ainda assumir que

- $S = (-\infty, \infty)$;
- a fila de carros parados começa em $x = 0$ no instante $t = 0$;
- os carros a chegar ao fim de fila têm a densidade $u_0 \in (0, u_{\max})$.

Modelação do escoamento de tráfego

Temos assim o seguinte problema de valor inicial

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0\,, & -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_{\text{in}}(x) \end{cases}$$

onde

$$c(u) = v_{\max}\left(1 - 2u/u_{\max}\right), \qquad u_{\text{in}}(x) = \begin{cases} u_0, & \text{se} \quad x < 0 \\ u_{\max}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Características e ondas de choque

- *Método das características* utiliza curvas $(x(t), t)$, a começar de $(x_0, 0)$, sobre as quais o problema (P) reduz-se a uma equação diferencial ordinária (EDO).
- essas curvas, chamadas *características*, são obtidas resolvendo a EDO

$$\frac{dx}{dt} = c(u(x,t)), \qquad x(0) = x_0 .$$

- note-se que sobre a característica $(x(t), t)$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u((x(t), t) &= u_t(x(t), t) + \frac{dx}{dt} u_x(x(t), t) \\ &= u_t(x(t), t) + c(u(x(t), t)) \, u_x(x(t), t) = 0 . \end{aligned}$$

Características e ondas de choque

- portanto, a solução u é constante sobre uma característica!
- esse valor é igual ao valor de u no ponto inicial da característica

$$u((x(t),t) = u(x_0,0) = u_{\rm in}(x_0)\,.$$

- segue-se que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c(u_{\rm in}(x_0)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = c(u_{\rm in}(x_0))t + x_0$$

- as características são rectas no plano xt com declive $1/c(u_{\rm in}(x_0))$.

Características e ondas de choque

Exemplo: Sejam $u_{\max} = 150$, $v_{\max} = 90$ e $u_0 = 50$.

- note-se que a velocidade com que os carros chegam à fila parada é

$$v_0 = v_{\max}(1 - u_0/u_{\max}) = 60 \quad (km/h).$$

- Se $x_0 < 0$, a característica com início em $(x_0, 0)$ é

$$x(t) = c(u_0)t + x_0 = v_{\max}(1 - 2u_0/u_{\max})\, t + x_0 \; = 30t + x_0$$

- Se $x_0 \geq 0$, a característica com início em $(x_0, 0)$ é

$$x(t) = c(u_{\max})t + x_0 = -\, v_{\max}\, t + x_0 = -90t + x_0\, .$$

Características e ondas de choque

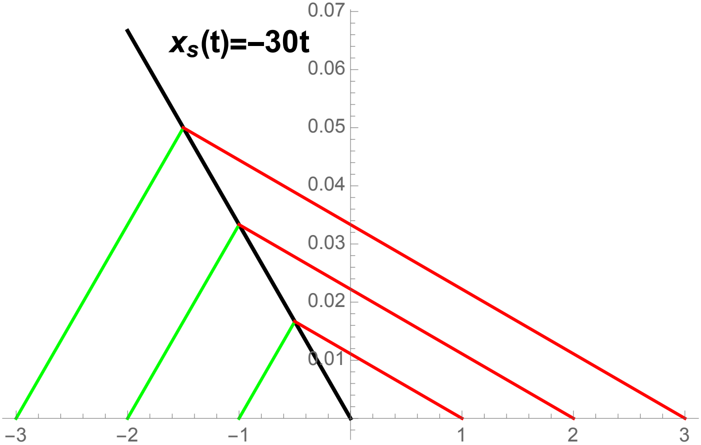

Figura: As características $x(t) = 30t + x_0$ e $x(t) = -90t + x_0$ intersectam ao longo da recta $x_s(t) = -30t$, através da qual a solução u é descontínua.

Características e ondas de choque

- A solução, dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 50, & \text{se } \; x < -30t \\ 150, & \text{se } \; x \geq -30t \end{cases},$$

é uma onda de choque que se propaga para trás com a velocidade de 30 km/h.

- À curva $x_s(t) = -30t$ chama-se *caminho de choque*.
- O caminho de choque é determinado pela condição de salto

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\phi(u^+) - \phi(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{\phi(u_{\max}) - \phi(u_0)}{u_{\max} - u_0} = -\, v_{\max}\, u_0 / u_{\max} = -\, 30\,.$$

Soluções de viscosidade

- Suponha que os condutores sabem diminuir ou aumentar a sua velocidade consoante o trânsito à sua frente.
- Recordando que o trânsito flui no sentido positivo do eixo x:

  $u_x > 0$ ($u_x < 0$), se a densidade de carros aumenta (diminui) à frente do veículo na posição x;

- Considere o seguinte modelo modificado para a velocidade v:

$$v = v_{\max}\left(1 - \frac{u}{u_{\max}}\right) - r\frac{u_x}{u}\,,$$

onde

  - u_x/u (km^{-1}) é a taxa de variação relativa da densidade de carros;
  - r (km^2/h) é uma constante positiva que mede a receptividade dos condutores em relação às alterações do tráfego.

Soluções de viscosidade

Obtém-se assim uma EDP de segunda ordem:

$$u_t + v_{\max}(1 - 2u/u_{\max})\, u_x - r\, u_{xx} = 0\,,$$

com as "condições iniciais e de fronteira" :

- $\lim_{x\to\infty} u(x,0) = u_{\max}$, muito à frente na estrada a densidade é máxima;
- $\lim_{x\to\infty} u_x(x,0) = 0$, muito à frente na estrada u é constante;
- $\lim_{x\to-\infty} u(x,0) = u_0$, muito atrás na estrada u é igual a u_0;
- $\lim_{x\to-\infty} u_x(x,0) = 0$, muito atrás na estrada u é constante;

Soluções de viscosidade

Procurando soluções da forma (onda progressiva): $u(x,t) = f(x - ct)$, obtém-se:

$$-cf' + v_{\max} f' - 2\frac{v_{\max}}{u_{\max}} f\, f' - r\, f'' = 0\,,$$

onde $f = f(z)$, com $z = x - ct$. Integrando entre $-\infty$ e z, vem

$$-cf + v_{\max} f - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f^2 - rf' = -cu_0 + v_{\max} u_0 - \frac{v_{\max} u_0^2}{u_{\max}}\,;$$

tendo em conta que

$$\lim_{z\to-\infty} f(z) = u_0\,, \qquad \lim_{z\to-\infty} f'(z) = 0\,.$$

Soluções de viscosidade

Por outro lado, $\lim_{z\to\infty} f(z) = u_{\max}$ e $\lim_{z\to\infty} f'(z) = 0$, donde vem

$$\lim_{z\to\infty}\left(-cf + v_{\max} f - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f^2 - rf'\right) = -cu_{\max} = -cu_0 + v_{\max} u_0 - \frac{v_{\max} u_0^2}{u_{\max}}\,.$$

Portanto $c = -u_0 v_{\max}/u_{\max}$ e segue-se que

$$\frac{u_0 v_{\max}}{u_{\max}} f + v_{\max} f - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f^2 - rf' = v_{\max} u_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(f - u_0)(f - u_{\max}) = -\frac{ru_{\max}}{v_{\max}} f'\,.$$

Soluções de viscosidade

Por separação de variáveis, temos

$$\frac{df}{(f-u_0)(f-u_{\max})} = -\frac{v_{\max}\,dz}{ru_{\max}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u_{\max}-u_0}\ln\left|\frac{f-u_{\max}}{f-u_0}\right| = -\frac{v_{\max}}{ru_{\max}}z + K\,.$$

Visto que $u_0 < f(z) < u_{\max}$ e escolhendo $K = 0$, obtém-se

$$f(z) = \frac{u_{\max} + u_0\exp\left[-\frac{(u_{\max}-u_0)v_{\max}}{ru_{\max}}z\right]}{1+\exp\left[-\frac{(u_{\max}-u_0)v_{\max}}{ru_{\max}}z\right]} = u_{\max} - \frac{u_{\max}-u_0}{1+\exp\left[\frac{(u_{\max}-u_0)v_{\max}}{ru_{\max}}z\right]}\,.$$

Conclui-se assim que

$$u(x,t) = u_{\max} - \frac{u_{\max}-u_0}{1+\exp\left[\frac{(u_{\max}-u_0)v_{\max}}{ru_{\max}}\left(x+\frac{v_{\max}u_0}{u_{\max}}t\right)\right]}\,.$$

TPC 1

TPC 1: Mostre que

- Se $x < -(v_{\max} u_0 / u_{\max}) t$, então

$$\lim_{r \to 0^+} u(x,t) = u_0 \,.$$

- Se $x > -(v_{\max} u_0 / u_{\max}) t$, então

$$\lim_{r \to 0^+} u(x,t) = u_{\max} \,.$$

Portanto a solução de viscosidade converge para a solução onda de choque quando r tende para zero.

TPC 2

TPC 2: Considere o seguinte modelo para a velocidade

$$v = v_{\max}\left(1 - \frac{u^2}{u_{\max}^2}\right)$$

e determine as características e as soluções onda de choque e de viscosidade do problema

$$\begin{cases} u_t + v_{\max}\left(1 - 3\,\frac{u^2}{u_{\max}^2}\right) u_x = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = u_{\text{in}}(x) \end{cases}$$

Considere $u_{\max} = 150$, $v_{\max} = 90$, $u_0 = 50$ e

$$u_{\text{in}}(x) = \begin{cases} u_0, & \text{se} \quad x < 0 \\ u_{\max}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Bibliografia

- Knobel, Roger. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, Student Mathematical Library, Vol. 3, American Mathematical Society, 2000.