

Ondas de choque e engarrafamentos fantasma

Juha Videman

Seminário de Matemática, IST, 13 de Dezembro, 2017

Onda progressiva

- Seja u uma função real de duas variáveis reais $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ dada por

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e c é uma constante não nula.

- a função u representa uma *onda progressiva*.
- se $c > 0$ o perfil inicial $u(x, 0) = f(x)$ propaga-se, com velocidade constante c , no sentido positivo do eixo x .
- u satisfaz a equação das ondas

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

Onda progressiva

- a solução geral para a equação das ondas é da forma

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

onde F e G são funções (arbitrárias) de classe C^2 .

- de facto, é fácil ver que

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2(F''(x - ct) + G''(x + ct)) = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2}.$$

Onda progressiva

Exemplos:

- uma onda periódica $u(x, t) = \cos(x + 4t)$;
- uma onda estacionária $u(x, t) = \cos x \cos 4t$;
- uma frente $u(x, t) = \arctan(\exp(x - 6t))$;
- um pulso $u(x, t) = \exp(-(x - 4t)^2)$;
- uma onda de choque

$$u(x, t) = \begin{cases} 50 & , \quad x < -30t \\ 150 & , \quad x \geq -30t \end{cases}$$

Onda progressiva

- pode-se procurar soluções de onda progressiva para outras equações diferenciais.
- por exemplo, a função (uma onda progressiva chamada *solitão*)

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right], \quad c > 0,$$

satisfaz a equação de Korteweg-deVries:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \dots$$

Modelação do escoamento de tráfego

- seja Q o número de carros num troço de estrada S com sentido único e com apenas uma faixa.
- seja $u(x, t)$ a densidade de carros (número de carros/km) na posição x no tempo t .
- Q pode variar em $S = [a, b]$ devido a :
 - entrada (ou saída) de veículos através dos extremos a (ou b);
 - criação ou remoção de veículos ao meio de S .

Modelação do escoamento de tráfego

- Seja $\phi(x, t)$ uma *função fluxo* que representa a taxa (nº de carros por unidade de tempo) com que os carros passam na posição x no instante t .
- Seja $f(x, t)$ uma *função fonte* que descreve a taxa (nº de carros por unidade de tempo e por km) com que os carros são adicionados ou removidos em S .

A taxa de variação de Q em S é assim

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b f(x, t) dx .$$

Modelação do escoamento de tráfego

Assumindo que u_t e ϕ_x são contínuas, obtém-se uma *lei de conservação*:

$$\int_a^b (u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)) dx = 0,$$

ou na forma diferencial

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t).$$

- esta equação contém duas funções incógnitas, u e ϕ ; supondo que a função fonte f é conhecida.
- para relacionar u com ϕ , precisamos de uma *equação constitutiva*, tipicamente da forma $\phi = \phi(u)$.

Modelação do escoamento de tráfego

- o fluxo ϕ depende não só da densidade de tráfego u (carros/km) mas também da sua velocidade v (km/h).
- assim, o fluxo (carros/hora) é dado por:

$$\phi = u v .$$

- assumindo que a velocidade depende linearmente da densidade u , pode-se considerar o modelo

$$\phi(u) = u \left(v_{\max} - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} u \right) = v_{\max} \left(u - u^2 / u_{\max} \right), \quad 0 \leq u \leq u_{\max} ,$$

onde

- v_{\max} é a velocidade máxima obtida quando u é nula (ou quase nula);
- u_{\max} é a densidade máxima atingida quando o tráfego estiver parado.

Modelação do escoamento de tráfego

Supondo que ao longo de S não há entradas nem saídas ($f(x, t) = 0$), obtém-se a equação

$$u_t + \phi_x = u_t + v_{\max} (1 - 2u/u_{\max})u_x = 0.$$

Vamos ainda assumir que

- $S = (-\infty, \infty)$;
- a fila de carros parados começa em $x = 0$ no instante $t = 0$;
- os carros a chegar ao fim de fila têm a densidade $u_0 \in (0, u_{\max})$.

Modelação do escoamento de tráfego

Temos assim o seguinte problema de valor inicial

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_{\text{in}}(x) \end{cases}$$

onde

$$c(u) = v_{\text{max}} (1 - 2u/u_{\text{max}}), \quad u_{\text{in}}(x) = \begin{cases} u_0, & \text{se } x < 0 \\ u_{\text{max}}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Características e ondas de choque

- *Método das características* utiliza curvas $(x(t), t)$, a começar de $(x_0, 0)$, sobre as quais o problema (P) reduz-se a uma equação diferencial ordinária.
- essas curvas, chamadas *características*, são obtidas resolvendo a EDO

$$\frac{dx}{dt} = c(u(x, t)), \quad x(0) = x_0.$$

- note-se que sobre a característica $(x(t), t)$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u((x(t), t)) &= u_t(x(t), t) + \frac{dx}{dt} u_x(x(t), t) \\ &= u_t(x(t), t) + c(u(x(t), t)) u_x(x(t), t) = 0. \end{aligned}$$

Características e ondas de choque

- portanto, a solução u é constante sobre uma característica!
- esse valor é igual ao valor de u no ponto inicial da característica

$$u((x(t), t) = u(x_0, 0) = u_{\text{in}}(x_0).$$

- segue-se que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c(u_{\text{in}}(x_0)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = c(u_{\text{in}}(x_0))t + x_0$$

- as características são rectas no plano xt com declive $1/c(u_{\text{in}}(x_0))$.

Características e ondas de choque

Exemplo: Sejam $u_{\max} = 150$, $v_{\max} = 90$ e $u_0 = 50$.

- note-se que a velocidade com que os carros chegam à fila parada é

$$v_0 = v_{\max}(1 - u_0/u_{\max}) = 60 \text{ (km/h)}.$$

- Se $x_0 < 0$, a característica com início em $(x_0, 0)$ é

$$x(t) = c(u_0)t + x_0 = v_{\max}(1 - 2u_0/u_{\max})t + x_0 = 30t + x_0$$

- Se $x_0 \geq 0$, a característica com início em $(x_0, 0)$ é

$$x(t) = c(u_{\max})t + x_0 = -v_{\max}t + x_0 = -90t + x_0.$$

Características e ondas de choque

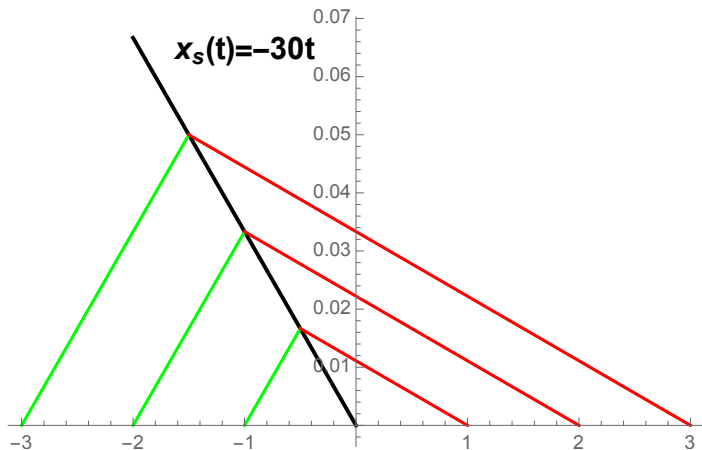


Figura: As características $x(t) = 30t + x_0$ e $x(t) = -90t + x_0$ intersectam ao longo da recta $x_s(t) = -30t$, através da qual a solução u é descontínua.

Características e ondas de choque

- A solução, dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 50, & \text{se } x < -30t \\ 150, & \text{se } x \geq -30t \end{cases},$$

é uma onda de choque que se propaga para trás com a velocidade de 30 km/h.

- À curva $x_s(t) = -30t$ chama-se *caminho de choque*.
- O caminho de choque é determinado pela condição de salto

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\phi(u^+) - \phi(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{\phi(u_{\max}) - \phi(u_0)}{u_{\max} - u_0} = -v_{\max} u_0 / u_{\max} = -30.$$

Soluções de viscosidade

- Suponha que os condutores sabem diminuir ou aumentar a sua velocidade consoante o trânsito à sua frente.
- Recordando que o trânsito flui no sentido positivo do eixo x :

$u_x > 0$ ($u_x < 0$), se a densidade de carros aumenta (diminui) à frente do veículo na posição x ;

- Considere o seguinte modelo modificado para a velocidade v :

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}} \right) - r \frac{u_x}{u},$$

onde

- u_x/u (km^{-1}) é a taxa de variação relativa da densidade de carros;
- r (km^2/h) é uma constante positiva que mede a receptividade dos condutores em relação às alterações do tráfego.

Soluções de viscosidade

Obtém-se assim uma EDP de segunda ordem:

$$u_t + v_{\max}(1 - 2u/u_{\max}) - r u_{xx} = 0,$$

com as "condições iniciais e de fronteira" :

- $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, 0) = u_{\max}$, muito à frente na estrada a densidade é máxima;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, 0) = 0$, muito à frente na estrada u é constante;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, 0) = u_0$, muito atrás na estrada u é igual a u_0 ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_x(x, 0) = 0$, muito atrás na estrada u é constante;

Soluções de viscosidade

Procurando soluções da forma (onda progressiva): $u(x, t) = f(x - ct)$,
obtém-se:

$$-cf' + v_{\max} f' - 2 \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f f' - r f'' = 0,$$

onde $f = f(z)$, com $z = x - ct$. Integrando entre $-\infty$ e z , vem

$$-cf + v_{\max} f - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f^2 - rf' = -cu_0 + v_{\max} u_0 - \frac{v_{\max} u_0^2}{u_{\max}};$$

tendo em conta que

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = u_0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} f'(z) = 0.$$

Soluções de viscosidade

Por outro lado, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = u_{\max}$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 0$, donde vem

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(-cf + v_{\max} f - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f^2 - rf' \right) = -cu_{\max} = -cu_0 + v_{\max} u_0 - \frac{v_{\max} u_0^2}{u_{\max}}.$$

Portanto $c = -u_0 v_{\max} / u_{\max}$ e segue-se que

$$\frac{u_0 v_{\max}}{u_{\max}} f + v_{\max} f - \frac{v_{\max}}{u_{\max}} f^2 - rf' = v_{\max} u_0$$

\Leftrightarrow

$$(f - u_0)(f - u_{\max}) = -\frac{ru_{\max}}{v_{\max}} f'.$$

Soluções de viscosidade

Por separação de variáveis, temos

$$\frac{df}{(f - u_0)(f - u_{\max})} = -\frac{v_{\max} dz}{ru_{\max}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{u_{\max} - u_0} \ln \left| \frac{f - u_{\max}}{f - u_0} \right| = -\frac{v_{\max}}{ru_{\max}} z + K.$$

Visto que $u_0 < f(z) < u_{\max}$ e escolhendo $K = 0$, obtém-se

$$f(z) = \frac{u_{\max} + u_0 \exp \left[-\frac{(u_{\max} - u_0)v_{\max}}{ru_{\max}} z \right]}{1 + \exp \left[-\frac{(u_{\max} - u_0)v_{\max}}{ru_{\max}} z \right]} = u_{\max} - \frac{u_{\max} - u_0}{1 + \exp \left[\frac{(u_{\max} - u_0)v_{\max}}{ru_{\max}} z \right]}.$$

Conclui-se assim que

$$u(x, t) = u_{\max} - \frac{u_{\max} - u_0}{1 + \exp \left[\frac{(u_{\max} - u_0)v_{\max}}{ru_{\max}} \left(x + \frac{v_{\max} u_0}{u_{\max}} t \right) \right]}.$$

Soluções de viscosidade

TPC: Mostre que

- Se $x < -(v_{\max} u_0 / u_{\max})t$, então

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0.$$

- Se $x > -(v_{\max} u_0 / u_{\max})t$, então

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_{\max}.$$

Portanto a solução de viscosidade converge para a solução onda de choque quando r tende para zero.

- Knobel, Roger. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, Student Mathematical Library, Vol. 3, American Mathematical Society, 2000.