A Hipótese de Riemann

Gustavo Granja

Departamento de Matemática, IST

20 de Novembro de 2019

Enunciado da Hipótese de Riemann

A função zeta de Riemann é uma função holomorfa $\zeta \colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ que, para $\Re(z) > 1$, é definida pela expressão:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

A **Hipótese de Riemann** afirma que todos os zeros de ζ com excepção dos "zeros triviais" $-2, -4, -6, \ldots$ têm parte real $1/2$.

Este é um dos sete *problemas do Milénio* cuja resolução seria premiada pelo Instituto Clay com um milhão de dólares.

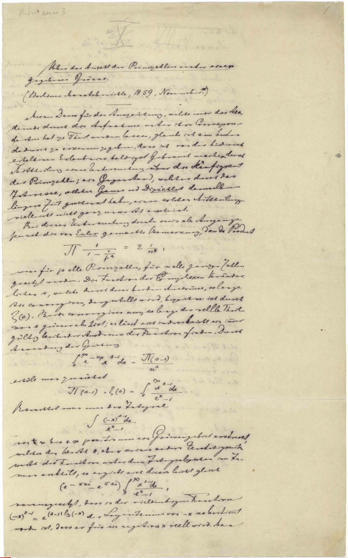
É considerado por alguns matemáticos o mais importante de todos os problemas em aberto da Matemática pura.

Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Em 1859, publicou um artigo entitulado "Über die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebener Grösse" em que investigava uma conjectura de Legendre e Gauss.

O artigo de Riemann



O Teorema dos Números Primos

A função de contagem de números primos é a função $\pi\colon]0,+\infty[\to \mathbb{N}$ definida por

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primo } : p < x\}.$$

Legendre e Gauss (quando tinha 15 ou 16 anos!) conjecturaram que

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$$

isto é,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{1}{\log t} dt} = 1.$$

Riemann estava a tentar provar esta conjectura. Não conseguiu, mas fez enormes progressos.

O Teorema dos Números Primos (cont.)

Mostra-se que a fórmula assimptótica para $\pi(x)$ acima é equivalente à afirmação que os zeros com parte imaginária não nula de $\zeta(z)$ estão na região

$$0 < \Re(z) < 1.$$

Riemann provou que os zeros estão na região

$$0 \leq \Re(z) \leq 1.$$

Hadamard e de la Valèe-Poussin provaram independentemente em 1896 que $\zeta(z)$ não tem zeros com parte real 1 ou 0, demonstrando assim o que a partir de então ficou conhecido como o Teorema dos Números Primos.

Estimativas para $\pi(x)$

A hipótese de Riemann é equivalente à afirmação que, para todo o $\epsilon > 0$.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt + O(x^{1/2+\epsilon})$$

Na realidade, é um Teorema de Schoenfeld (1976) que a Hipótese de Riemann é equivalente a

$$\left| \pi(x) - \int_2^x \frac{1}{\log t} dt \right| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log x$$

A expressão anterior diz que, se a expansão decimal de x tem N dígitos, então os primeiros $\sim N/2$ dígitos de $\pi(x)$ e $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ estão de acordo.

Mais geralmente, a localização dos zeros da função ζ dá informação detalhada sobre a distribuição dos números primos. Riemann obteve uma *fórmula explícita* para $\pi(x)$ em termos dos zeros (não triviais) de $\zeta(z)$.

Qual é o interesse?

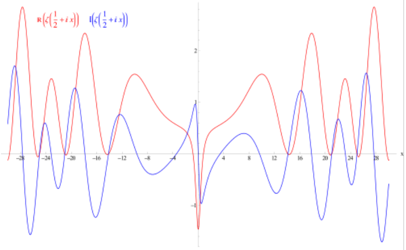
Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, o estudo da estrutura multiplicativa dos números naturais reduz-se ao estudo do conjunto dos números primos.

As questões que versam sobre a estrutura dos números naturais estão entre as mais fundamentais da Matemática. O comportamento da função $\pi(x)$ (que descreve a distribuição dos números primos entre os naturais) é uma questão básica sobre a relação entre a estrutura aditiva e multiplicativa dos naturais.

Kronecker: "Deus fez os números naturais, tudo o resto é obra humana."

Indícios a favor

- Os primeiros (em termos da distância ao eixo real) 10000000000000 de zeros de ζ na faixa $0 < \Re(z) < 1$ estão na *linha crítica* $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Mas...



- Mais de 40% dos zeros não triviais de ζ estão na linha crítica.
- Mais de 99% dos zeros estão perto da linha crítica no sentido em que satisfazem para $z = \alpha + i\beta$, $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{8}{\log|\beta|}$.

Fórmula do produto de Euler

Para $\Re(z) > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}.$$

Consequência: $\zeta(z) \neq 0$ se $\Re(z) > 1$.

Nota: Como $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$, a fórmula acima implica que há infinitos primos!

Prolongamento a $\Re(z) > 0$

Proposição: Existe uma função holomorfa $\phi\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ tal que, para $\Re(z) > 1$,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \phi(z).$$

A igualdade acima permite prolongar $\zeta(z)$ a uma função analítica definida em $\{z\colon \Re(z) > 0\} \setminus \{1\}$. Este prolongamento tem um pólo de ordem 1 em $z = 0$ com resíduo 1.

Note-se que o prolongamento é único.

A equação funcional para ζ

A função Gama de Euler é uma função definida para $\Re(z) > 0$ pela expressão

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

É fácil verificar que, nesta região, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (integrando por partes).

- $\Gamma(1) = 1$, logo $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- A equação $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ permite prolongar Γ indutivamente aos semiplanos $\{z \colon \Re(z) > -n\}$ com $n \in \mathbb{N}$. O prolongamento (ainda denotado por $\Gamma(z)$) tem pólos simples para z inteiro não positivo.

A equação funcional para ζ (cont.)

No seu artigo, Riemann obteve a seguinte *equação funcional* para a função ζ na faixa $0 < \Re(z) < 1$:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

Esta equação permite prolongar ζ ao resto do plano complexo (isto é a valores de z com $\Re(z) \leq 0$).

Pode mostrar-se que $\Gamma(z)$ não se anula para $\Re(z) > 0$ logo os únicos zeros de ζ com $\Re(z) < 0$ são os zeros de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$ (que se dizem os zeros triviais de ζ):

$$\frac{\pi z}{2} = k\pi \Leftrightarrow z = 2k \text{ com } k < 0.$$

Exercício: $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Isto é, $1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2}$.

Fracções irredutíveis

Pergunta: Qual é a percentagem das fracções $\frac{m}{n}$ que são irredutíveis (isto é, tais que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$)?
Resposta: Cerca de 60%. Mais precisamente, a proporção é $\frac{6}{\pi^2}$.

- A probabilidade de um vector $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ter ambas as coordenadas divisíveis por p é $1/p^2$.
- A probabilidade de um vector $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ter $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ é portanto

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)}$$

É fácil ver usando séries de Fourier que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esta soma foi calculada pela primeira vez por Euler em 1735.

References

- L. Ahlfors, "Complex Analysis", McGraw-Hill, 1979.
- J. Brian Conrey, "The Riemann Hypothesis", Notices of the AMS, Março de 2003.
- H. M. Edwards, "Riemann's Zeta function", Dover (2001)
- Marcus du Sautoy, "The music of the primes", Harper-Collins (2003)

Ver também:

- O sítio do Instituto Clay http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/
- Um vídeo com uma palestra de Vladimir Arnold em http://www.mathoman.com/index.php/1632-arnold-trivium-conclusion.
- A página da Wikipedia sobre a Hipótese de RIemann http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis