

# Análise de Fourier e princípios da incerteza

Afonso Vilhena Francisco

13 Dezembro 2025, Fundação Calouste Gulbenkian

**Tutor:** Diogo Oliveira e Silva

# Transformada de Fourier

## Definição

O espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$  é definido como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \text{ para cada } l, k \geq 0\}$$

## Definição

A transformada de Fourier de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  é definida como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

## Proposição

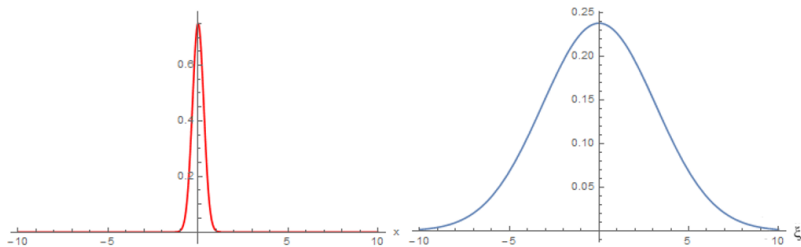
Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  então  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

# Princípio da Incerteza

## Teorema

Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1$ , então

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$



# Princípio da Incerteza de Heisenberg (1927)

Assumimos:

- ▶  $\psi$  representa a "state function";
- ▶  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ;
- ▶ a probabilidade da partícula estar no intervalo  $(a, b)$  é dada por  $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ ;
- ▶ a probabilidade do momento da partícula pertencer ao intervalo  $(a, b)$  é dada por  $\int_a^b |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

$$(\text{incerteza na posição}) \times (\text{incerteza no momento}) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

# Princípio da Incerteza de Hardy (1933)

## Teorema (Hardy)

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(x) = O(e^{-\pi ax^2})$  e  $\hat{f}(\xi) = O(e^{-\pi b\xi^2})$ , com  $a, b > 0$ , então:

- ▶ se  $ab = 1$ , então  $f$  é um múltiplo escalar de  $e^{-\pi ax^2}$
- ▶ se  $ab > 1$ , então  $f$  é a função identicamente nula.

# Próximos Passos

Séries de Fourier

Transformada de Fourier em  $\mathbb{R}$ ;

Transformada de Fourier em  $\mathbb{R}^d$ ;

Expressão dos princípios da incerteza em diferentes áreas.