Representações de Grupos

Sofia Campanudo Gomes

Universidade de Coimbra

Dezembro de 2025

Sejam G um grupo finito e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão n.

Sejam G um grupo finito e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão n.

$\mathrm{G} \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) = \{\text{matrizes } \mathrm{n} \times \mathrm{n} \text{ invertíveis com entradas em } \mathbb{C}\}$

ou

$\mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)} = \{\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \mid \mathrm{T} \text{ é um isomorfismo}\}$

Nota: $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL(V)}$

O que é uma representação de um grupo?

Uma **representação** de G sobre $\mathbb{C}$ é um homomorfismo de grupos

$$\rho : (\mathrm{G}, *) \to (\mathrm{GL}(\mathrm{V}), \circ)$$

O que é uma representação de um grupo?

Uma **representação** de G sobre $\mathbb{C}$ é um homomorfismo de grupos

$$\rho : (\mathrm{G}, *) \to (\mathrm{GL}(\mathrm{V}), \circ)$$

Assim, $\forall g, g' \in \mathrm{G}$, temos:

- $\rho(g) : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ isomorfismo

O que é uma representação de um grupo?

Uma **representação** de G sobre $\mathbb{C}$ é um homomorfismo de grupos

$$\rho : (\mathrm{G}, *) \to (\mathrm{GL}(\mathrm{V}), \circ)$$

Assim, $\forall g, g' \in \mathrm{G}$, temos:

- $\rho(g) : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ isomorfismo
- $\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g')$

O que é uma representação de um grupo?

Uma **representação** de G sobre $\mathbb{C}$ é um homomorfismo de grupos

$$\rho : (\mathrm{G}, *) \to (\mathrm{GL}(\mathrm{V}), \circ)$$

Assim, $\forall g, g' \in \mathrm{G}$, temos:

- $\rho(g) : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ isomorfismo
- $\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g')$
- $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$

O que é uma representação de um grupo?

Uma **representação** de G sobre $\mathbb{C}$ é um homomorfismo de grupos

$$\rho : (\mathrm{G}, *) \to (\mathrm{GL}(\mathrm{V}), \circ)$$

Assim, $\forall g, g' \in \mathrm{G}$, temos:

- $\rho(g) : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ isomorfismo
- $\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g')$
- $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$
- $\rho(1_{\mathrm{G}}) = id_{\mathrm{V}}$

Exemplos

- $\rho : S_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$
$$\sigma \mapsto sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação ímpar} \end{cases}$$

Exemplos

- $\rho : S_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathrm{GL_1}(\mathbb{C})$
$$\sigma \mapsto sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação ímpar} \end{cases}$$

- $\phi : S_n \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$
$$\sigma \mapsto [a_{ij}], \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0, & \text{se } i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

Exemplos

- $$\rho : S_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathrm{GL_1(\mathbb{C})}$$
  $$\sigma \mapsto sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação ímpar} \end{cases}$$

- $$\phi : S_n \to \mathrm{GL_n(\mathbb{C})}$$
  $$\sigma \mapsto [a_{ij}], \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0, & \text{se } i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

- $$\phi : S_n \to \mathrm{GL(V)}$$
  $$\sigma \mapsto T : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$$
  $$v_i \mapsto v_{\sigma(i)}$$

Como podemos estudar representações?

Seja U um subespaço vetorial de V.

U diz-se G-**invariante** se $\rho(g)(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}, \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$.

Como podemos estudar representações?

Seja U um subespaço vetorial de V.

U diz-se G-**invariante** se $\rho(g)(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}, \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$.

Neste caso é possível definir uma nova representação

$$\begin{aligned} \rho' : (\mathrm{G}, *) &\to (\mathrm{GL}(\mathrm{U}), \circ) \\ g &\mapsto \rho(g)|_{\mathrm{U}} \end{aligned}$$

Como podemos estudar representações?

Seja U um subespaço vetorial de V.

U diz-se G-**invariante** se $\rho(g)(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}, \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$.

Neste caso é possível definir uma nova representação

$$\begin{aligned} \rho' : (\mathrm{G}, *) &\to (\mathrm{GL}(\mathrm{U}), \circ) \\ g &\mapsto \rho(g)|_{\mathrm{U}} \end{aligned}$$

U diz-se **irredutível** se $\mathrm{U} \neq \{0_{\mathrm{V}}\}$ e U não tiver nenhum subespaço G-invariante, além de U e $\{0_{\mathrm{V}}\}$.

Resultado Importante

Se $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ for uma representação, então

$$\mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_\mathrm{m},$$

com $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_\mathrm{m}$ irredutíveis.

Resultado Importante

Se $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ for uma representação, então

$$\mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_\mathrm{m},$$

com $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_\mathrm{m}$ irredutíveis.

Então para conhecermos todas as representações de G, **basta conhecermos as representações irredutíveis**.