

Bolsa Novos Talentos Gulbenkian em Matemática

Espaços lenticulares como prequantizações de espaços projetivos com pesos

Miguel Gama | Tutor: Miguel Abreu

December 13, 2025

Quocientes de S^3 por ações de S^1

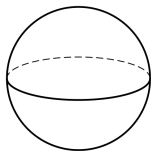
$$S^3 = \{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

$$S^1 = (\{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}, \cdot)$$

$$S^1 \curvearrowright S^3 : e^{it}(z_1, z_2) = (e^{it}z_1, e^{it}z_2)$$

$$\text{Stab}(\mathbf{z}) = \{e^{it} : e^{it}\mathbf{z} = \mathbf{z}\} = \{1\} \quad \forall \mathbf{z}$$

S^3/S^1 pode ser equipado com estrutura que o torna variedade suave ($\simeq S^2$).

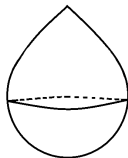


$$\{e^{it}(z_1, z_2) : e^{it} \in S^1\} \in S^3/S^1$$

$$S^1 \curvearrowright S^3 : e^{it}(z_1, z_2) = (e^{it}z_1, e^{2it}z_2)$$

$$\text{Stab}((0, z)) = \{1, -1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

S^3/S^1 não pode ser variedade suave: temos singularidades nas órbitas $[(0, z)]$.



Espaços Projetivos com Pesos

Definição de Espaços Projetivos com Pesos $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{WP}(m_1, \dots, m_n) := S^{2n-1}/S^1$$

em que $S^1 \hookrightarrow S^{2n-1} : e^{it}(z_1, \dots, z_n) = (e^{im_1 t} z_1, \dots, e^{im_n t} z_n)$ e $\text{mdc}(m_1, \dots, m_n) = 1$

Não podemos equipar $\mathbb{WP}(m_1, \dots, m_n)$ com estrutura que a torna variedade suave.

(Um dos m_j é diferente de 1 $\implies \exists \mathbf{z} \in S^{2n-1} : \text{Stab}(\mathbf{z}) \neq 1$)

É exemplo de uma **orbivariiedade simplética**.

Espaços Lenticulares

Espaços lenticulares

$$L_p^{2n-1}(q_1, \dots, q_n) = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$$

em que $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow S^{2n-1} : \xi_p(z_1, \dots, z_n) = (\xi_p^{q_1} z_1, \dots, \xi_p^{q_n} z_n)$ e $\text{mdc}(p, q_j) = 1 \ \forall j$

Podemos equipar um espaço lenticular com estrutura que o torna variedade suave. Substituímos agora $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ pelo quociente $S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ (isto é, permitimos $p > 1$):

Espaços induzidos por espaços lenticulares

$$L_p^{2n-1}(q_1, \dots, q_n)/S^1$$

em que $S^1 \hookrightarrow L_p^{2n-1}(q_1, \dots, q_n) : e^{it}[(z_1, \dots, z_n)] = [(e^{im_1 t} z_1, \dots, e^{im_n t} z_n)]$

Objetivos do Trabalho a Desenvolver

- Clarificar relação entre espaços lenticulares e espaços projetivos com pesos.
- Descrever os espaços projetivos com pesos que podem ser obtidos a partir de um dado $L_p^{2n-1}(q_1, \dots, q_n)$.
- Descrever os espaços lenticulares que podem ser obtidos como prequantização de um dado $\mathbb{WP}(m_1, \dots, m_n)$.
- Fixadas propriedades de interesse no espaço lenticular e nos pesos $(m_1, \dots, m_n)$, descrever os espaços projetivos com pesos que podem ser obtidos.