Fractais - Dimensão de Hausdorff

Maria Inês Lopes

Universidade de Coimbra

Dezembro 2025

Introdução

Fractais São figuras geométricas de estrutura detalhada. Interessaram-me pelas suas imagens e pelo facto de a sua dimensão ser não natural

Aplicações

- Medida da costa
- Astronomia
- Finanças
- Teoria do caos
- Análise

Convergência de figuras

Sejam A, $B \in \mathcal{K}$ - espaço das figuras (conjuntos compactos) e w_i uma contração ou uma afinidade, $i = 1, 2, ..., r$.

Métrica de Hausdorff
$\rho(A, B) := \min\{\varepsilon \geq 0 \,|\, A \subset B_\varepsilon \,\wedge\, B \subset A_\varepsilon\}$

Aplique-se agora sucessivamente $T : A \mapsto T(A) := \cup_{i=1}^{r} w_i(A)$
Obtem-se a sucessão A_0, $A_1 = T(A_0)$, ..., $A_{n+1} = T(A_n)$, ...
Observe-se que

$$\rho(w_i(A),\, w_i(B)) < s_i \rho(A,\, B) \Rightarrow \rho(T(A),\, T(B)) < s\rho(A,\, B)$$

onde $0 < s_i < 1$ e $s := max_{i=1,\dots,r} s_i$
Então pelo teorema do ponto fixo de Banach, obtemos que existe uma figura K tal que $T(K) = K$, isto é, K é o atrator da aplicação T.

Exemplos

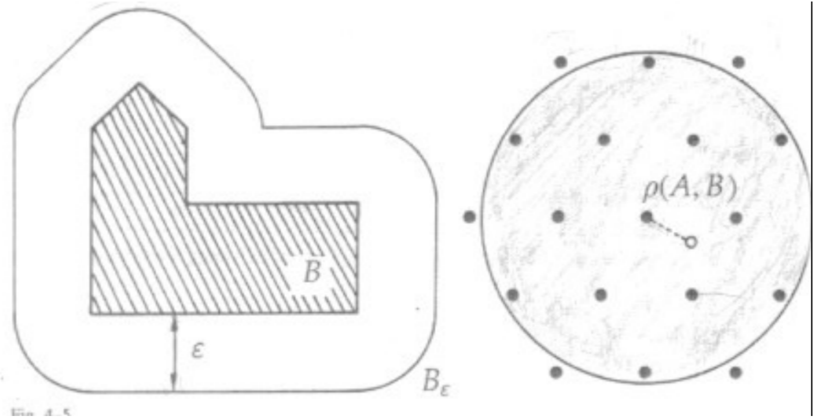

Figure 1: ε-vizinhança e $\rho(A, B)$

Dimensão de Hausdorff

Definição

Seja $q \in \mathbb{R}$.
Associa-se a medida $\mu_q : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^+$ tal que se verifica as seguintes propriedades:

i. $\mu_q(A \cup B) \leq \mu_q(A) + \mu_q(B)$
ii. $\mu_q(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_q(A_k)$
iii. $\mu_q(A + c) = \mu_q(A)$
iv. $\mu_q(A^s) = \mu_q(A)$
v. $\mu_q(\lambda A) = \lambda^q \mu_q(A)$

Hausdorff provou que

- $\mu_q(A) := \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} |B_k|^q : A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k,\ |B_k| \leq \delta\right\}$
- $dim_H(A) := q_*$ *jump-number* de $q \mapsto \mu_q(A)$

Exemplo

Poeira de Cantor
Sejam $w_1 : t \mapsto \frac{t}{3}$ $w_2 : t \mapsto 1 + \frac{t-1}{3}$ aplicações.
$T(C) := \cup_{i=1}^{2} w_i(C)$
Considere-se $C_0 := [0, 1]$, $C_1 = T(C_0)$, ..., $C_{n+1} = T(C_n)$
Seja C o ponto fixo de T.

$$\mu_q(C) = \mu_q(T(C)) = \mu_q(\cup_{i=1}^{2} w_i(C)) = \mu_q(w_1(C)) + \mu_q(w_2(C)) =$$

$$= \mu_q(\frac{1}{3}C) + \mu_q(\frac{1}{3}C) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^q \mu_q(C)$$

Daqui deduz-se $dim_H = q = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

Ilustração da Poeira de Cantor

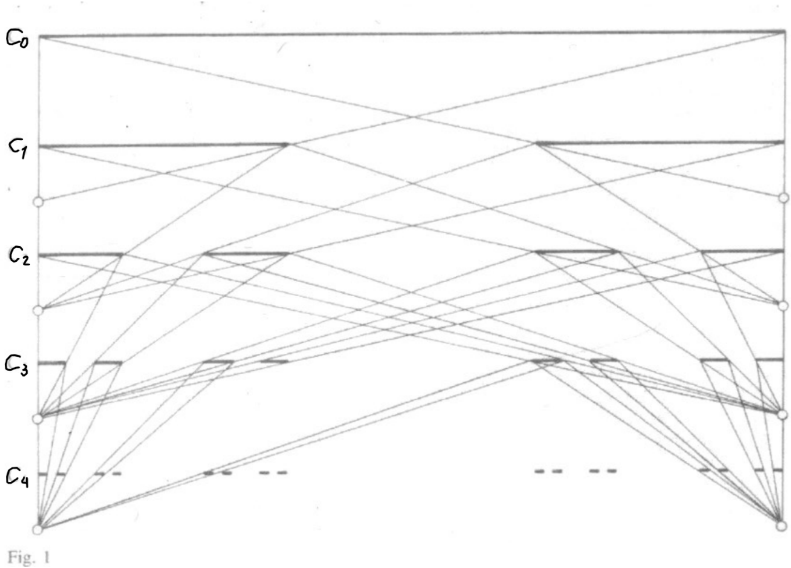

Figure 2: Poeira de Cantor - as primeiras quatro iterações